ИЗПЪКНАЛО ОПТИМИРАНЕ. ТЕОРЕМА НА КУН — ТАКЪР

1. Теория

Общата задача на *изпъкналото оптимиране* има следния вид

(1) $\min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}),\quad X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i \in I_1,\ h_i(\mathbf{x}) = 0,\ i \in I_2,\ x_j \ge 0,\ j \in J_1\}.$

Тук I_1 и I_2 са подмножества на $I = \{1, \dots, m\}$, $I_1 \cup I_2 = I$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $J_1 \subset J = \{1, \dots, n\}$ и функциите $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $i \in I_1$ са *изпъкнали*, а $h_i(x)$, $i \in I_2$ — *афинни* ($h_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}\rangle - b_i$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$). Допуска се, разбира се, някои от функциите $g_i(\mathbf{x})$, $i \in I_1$, да бъдат също афинни. Лесно се проверява, че множеството X е изпъкнало.

Определение 1. Казваме, че за задача (1) е изпълнено *условието на Слейтър*, ако съществува точка $\overline{\mathbf{x}} \in X$, такава че $g_i(\overline{\mathbf{x}}) < 0$ за всяко $i \in I_1$, за което функцията $g_i(\mathbf{x})$ не е афинна. (Ако всички функции g_i, $i \in I_1$, са афинни, това условие е тривиално изпълнено.)

Определение 2. *Функция на Лагранж* за задача (1) наричаме функцията

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i\in I_1} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{i\in I_2} \lambda_i h_i(\mathbf{x}).$$

Координатите на вектора $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^{\mathrm{T}}$ наричаме *множители на Лагранж*.

Определение 3. Казваме, че точката $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ е *седлова точка* на функцията на Лагранж за задача (1) в областта

$$\Lambda = \{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+m} : x_j \ge 0,\ j \in J_1,\ \lambda_i \ge 0,\ i \in I_1\},$$

ако за всяка точка $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \in \Lambda$ са изпълнени неравенствата

$$L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \le L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \le L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^*).$$

Теорема 1 (Кун и Такър)**.** Нека в задача (1) е изпълнено условието на Слейтър. Тогава следните две твърдения са еквивалентни:

1) Точката $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на задача (1).

2) Съществува вектор $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$, $\lambda_i^* \geq 0$, $i \in I_1$, такъв че $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ е седлова точка на функцията на Лагранж за задача (1).

Теорема 2 (локални условия на Кун и Такър)**.** Нека в задача (1) функциите f, g_i, $i \in I_1$, са диференцуеми и е изпълнено условието на Слейтър. Тогава следните две твърдения са еквивалентни:

1) Точката $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на задача (1).

2) Съществува вектор $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$, такъв че $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ удовлетворява условията:

$$\begin{array}{llll}
L'_{x_j}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \geq 0, & j \in J_1; & L'_{\lambda_i}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq 0, & i \in I_1; \\
x_j^* L'_{x_j}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0, & j \in J_1; & \lambda_i^* L'_{\lambda_i}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0, & i \in I_1; \\
x_j^* \geq 0, & j \in J_1; & \lambda_i^* \geq 0, & i \in I_1; \\
L'_{x_j}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0, & j \in J \setminus J_1; & L'_{\lambda_i}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0, & i \in I_2.
\end{array}$$

Ще приведем още една еквивалентна формулировка на теорема 2, която често се използва като „работен“ критерий за оптималност.

Теорема 3. При предположенията от теорема 2 точката $\mathbf{x}^* \in X$ е оптимално решение на задача (1) тогава и само тогава, когато съществуват числа $\lambda_i^* \geq 0$, $i \in I_1(\mathbf{x}^*)$, λ_i^*, $i \in I_2$, $\mu_j^* \geq 0$, $j \in J_1(\mathbf{x}^*)$ такива, че

$$-f'(\mathbf{x}^*) = \sum_{i \in I_1(\mathbf{x}^*)} \lambda_i^* g_i'(\mathbf{x}^*) + \sum_{i \in I_2} \lambda_i^* \mathbf{a}_i + \sum_{j \in J_1(\mathbf{x}^*)} \mu_j^* (-\mathbf{e}_j),$$

където $I_1(\mathbf{x}^*) = \{i \in I_1 : g_i(\mathbf{x}^*) = 0\}$, $J_1(\mathbf{x}^*) = \{j \in J_1 : x_j^* = 0\}$, а $\mathbf{e}_j$ е j-тият единичен вектор в $\mathbb{R}^n$.

2. Примери

Пример 1. Да се намери минимумът на функцията

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2$$

при ограничения $x_1^2 + x_2^2 \leq 10$, $-2x_1 + x_2 = 5$.

Решение. Най-напред да покажем, че това е задача на изпъкналото оптимиране. Разглеждаме матрицата от вторите частни производни (нарича се *матрица на Хесе* или *хесиан*) на целевата функция

$$\begin{bmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Първият главен минор на тази матрица е равен на 2, а вторият главен минор е равен на 4. Според критерия на Силвестър хесианът е положително дефинитен. Следователно функцията е строго изпъкнала. Тогава задачата има единствено решение. Аналогично се доказва, че функцията $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 10$ също е изпъкнала (тя има същия хесиан).

Условието на Слейтър е изпълнено за точката $\overline{\mathbf{x}} = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, защото тя е допустима и $g(\overline{\mathbf{x}}) < 10$ (тази точка се намира лесно, ако се начертае допустимото множество, което е отсечка).

Функцията на Лагранж е

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 10) + \lambda_2(-2x_1 + x_2 - 5),$$

$\lambda_1 \geq 0$.

Системата от условия на Кун и Такър е

$$\begin{aligned} L'_{x_1} &\equiv 2(x_1 - 3) + 2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 = 0, & L'_{\lambda_1} &\equiv x_1^2 + x_2^2 - 10 \leq 0,\ \lambda_1 \geq 0, \\ L'_{x_2} &\equiv 2(x_2 - 5) + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0, & L'_{\lambda_2} &\equiv -2x_1 + x_2 - 5 = 0, \\ & & \lambda_1 L'_{\lambda_1} &\equiv \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 10) = 0. \end{aligned}$$

Разглеждаме два случая:

1) $\lambda_1 = 0$. Останалите две уравнения се свеждат до

$$\begin{aligned} x_1 - 3 - \lambda_2 &= 0, \\ 2(x_2 - 5) + \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

Елиминираме λ_2 и получаваме, като добавим ограничението равенство, системата

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 13 &= 0, \\ -2x_1 + x_2 - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Тя има решение $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{31}{5}$. Точката $\left(\frac{3}{5}, \frac{31}{5}\right)^{\mathrm{T}}$ не е допустима, защото не удовлетворява неравенството $x_1^2 + x_2^2 \leq 10$.

2) $\lambda_1 \neq 0$. Тогава остава $x_1^2 + x_2^2 - 10 = 0$. От ограничението равенство изразяваме $x_2 = 2x_1 + 5$ и заместваме в квадратното уравнение. Така получаваме $x_1^2 + 4x_1 + 3 = 0$, което има два корена $x_1 = -3$ и $x_1 = -1$. Съответно за x_2 имаме $x_2 = -1$ и $x_2 = 3$.

   а) За точката $(-3, -1)^{\mathrm{T}}$ търсим множителите на Лагранж

$$\begin{aligned} -6 - 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 0, \\ -12 - 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \end{aligned}$$

   откъдето $-18 - 5\lambda_1 = 0$ или $\lambda_1 = -\frac{18}{5} < 0$, противоречие.

   б) За точката $(-1, 3)^{\mathrm{T}}$ търсим множителите на Лагранж

$$\begin{aligned} -4 - \lambda_1 - \lambda_2 &= 0, \\ -4 + 6\lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \end{aligned}$$

   откъдето $-8 + 5\lambda_1 = 0$ или $\lambda_1 = \frac{8}{5} > 0$, $\lambda_2 = -\frac{28}{5}$.

И така, единствено векторът $\mathbf{x}^* = (-1, 3)^{\mathrm{T}}$ с множители на Лагранж $\lambda_1 = \frac{8}{5}$, $\lambda_2 = -\frac{28}{5}$ удовлетворява условията на Кун и Такър и следователно е оптимално решение на задачата. Стойността на целевата функция е 20.

Пример 2. Дадена е задачата

$$\min\{2x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_1x_2 + 4(2 - \sqrt{5})x_1 + 5(\sqrt{5} - 2)x_2\}$$

при условия

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 \le 4 && (g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 4), \\ & x_1^2 - x_2 \le 0 && (g_2(x) = x_1^2 - x_2), \\ & x_1 + x_2 \ge 1 && (g_3(x) = -x_1 - x_2 + 1), \\ & x_1 \ge 0. && \end{aligned}$$

Да се изследват за оптималност точките $\mathbf{x}_1 = (0, 2)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}_2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$.

Решение. Лесно се проверява, че това е задача на изпъкналото оптимиране. Условието на Слейтър е изпълнено — например точката $\overline{\mathbf{x}} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$ удовлетворява всички ограничения, а първите две — като строги неравенства. Условията на теорема 3 са изпълнени.

Непосредствено се проверява, че $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ удовлетворяват ограниченията.

В $\mathbf{x}_1$ активни са ограниченията $g_1(\mathbf{x}) \le 0$ и $x_1 \ge 0$. Пресмятаме $-f'(\mathbf{x}_1) = (4\sqrt{5}-4, -5\sqrt{5}-6)^{\mathrm{T}}$, $g_1'(\mathbf{x}_1) = (0,4)^{\mathrm{T}}$. За проверка на оптималността на $\mathbf{x}_1$ търсим числа $\lambda_1 \ge 0$ и $\mu_1 \ge 0$, такива че

$$\begin{pmatrix} 4\sqrt{5}-4 \\ -5\sqrt{5}-6 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т. е. търсим решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} 4\sqrt{5}-4 = -\mu_1 \\ -5\sqrt{5}-6 = 4\lambda_1 \\ \lambda_1 \ge 0,\ \mu_1 \ge 0, \end{array} \right.$$

която се оказва несъвместима. Следователно $\mathbf{x}_1$ не е точка на минимум.

Аналогично проверката за оптималност на $\mathbf{x}_2$ (в $\mathbf{x}_2$ активни са ограниченията $g_2(\mathbf{x}) \le 0$ и $g_3(\mathbf{x}) \le 0$) води до системата

$$\left| \begin{array}{l} \sqrt{5}-3 = (\sqrt{5}-1)\lambda_2 - \lambda_3 \\ \quad -3 = -\lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_3 \ge 0, \end{array} \right.$$

която има решение $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Следователно $\mathbf{x}_2$ е оптимално решение на задачата.

Задачи

1. Нека в задачата на изпъкналото оптимиране

$$\min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x}), \quad X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1,\dots,s,\ h_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = s+1,\dots,m\},$$

където $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $i = 1,\dots,s$, са изпъкнали, а $h_i(\mathbf{x})$, $i = s+1,\dots,m$, са афинни, за всяко $i \in \{1,\dots,s\}$ съществува точка $\overline{\mathbf{x}}_i \in X$, такава че $g_i(\overline{\mathbf{x}}_i) < 0$. Да се покаже, че за задачата е изпълнено условието на Слейтър.

2. Да се докаже теорема 3, като се използва теорема 2.

3. Да се даде „геометрично“ тълкуване на теорема 3.

4. Да се покаже, че за оптималното решение на задачата

$$\min\{f(x) = -x : x \in \mathbb{R},\ ax^2 \le 0\},$$

където a е положителна константа, не са изпълнени необходимите условия на теорема 3. Да се изясни защо.

5. Да се покаже, че за задачата $\max\{f(x) = x^2 : -1 \le x \le 2\}$ точките $x^* = 2$ и $x^{**} = -1$ удовлетворяват достатъчните условия на теорема 3. При все това x^{**} не е решение на задачата. Да се изясни защо.

6. При какви условия задачата $\max\{f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in X\}$, където $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, има оптимално решение ($\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$)?

7. Да се изведе условие, при което произволна точка $\mathbf{x}$ от X, $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0\}$, е оптимално решение на задачата $\max\{f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in X\}$ ($\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$).

8. Да се докаже, че задачата $\min\{f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{x}^{\mathrm{T}}, \mathbf{D}\mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in X\}$, където $X \subset \mathbb{R}^n$ е непразно затворено изпъкнало множество, а $\mathbf{D}$ е симетрична положително дефинитна матрица $n \times n$, има винаги оптимално решение.

9. Нека в задачата $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$, където X е изпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^n$, а $f(\mathbf{x})$ е изпъкнала функция в X, съществуват точка $\mathbf{z}$ и направление $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, такива че $\mathbf{z} + \lambda\mathbf{y} \in X$ и $f(\mathbf{z}) > f(\mathbf{z} + \lambda\mathbf{y})$ за всяко $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Да се установи дали това условие е необходимо и достатъчно за неограниченост (отдолу) на $f(\mathbf{x})$ в X.

10. Да се решат задачите:

10.1. $\min\{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 : x_1 + x_2 \le 4\}$.

10.2. $\min\left\{\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 : 4x_1 + 2x_2 \le 0,\ x_1 + x_2 = 1,\ x_2 \ge 0\right\}$.

10.3. $\max\{10x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2 : x_1 + x_2 \le 5,\ 7x_1 + 2x_2 \ge 14,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\}$.

10.4. $\min\left\{\left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (x_2 - 5)^2 : -x_1 + x_2 \le 2,\ 2x_1 + 3x_2 \le 11,\ x_1, x_2 \ge 0\right\}$.

11. Нека $\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Разглеждаме задачата $\min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Да се намерят необходими условия за оптималност на точката $\mathbf{x}^*$. Кога тези условия са достатъчни? Кога имаме единственост на решението?

12. Нека $\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Да се докаже теоремата на Фаркаш: Разрешима е една и само една от следните две системи:

$$1)\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\quad \mathbf{x} \ge 0; \qquad 2)\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \le 0,\quad \langle \mathbf{b}^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}\rangle > 0.$$

Упътване. Да се разгледа подходяща оптимизационна задача и да се приложат условията на Кун — Такър.

13. Дадена е задачата $\min\{\langle \mathbf{x}^{\mathrm{T}}, \mathbf{A}\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{b}^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{x} \in X\}$, където X е изпъкнало и затворено множество, $\mathbf{A}$ е симетрична положително дефинитна матрица $n \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Да се докаже, че оптималното решение $\mathbf{x}^*(\mathbf{b})$ удовлетворява условието на Липшиц като функция на параметъра $\mathbf{b}$. Да се даде пример, в който $\mathbf{x}^*(\mathbf{b})$ не е диференцуема функция.

14. Дадена е общата задача на изпъкналото оптимиране (1). Нека $\psi(\boldsymbol{\lambda}) = \inf\{L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) : x_j \geq 0,\ j \in J_1\}$, където $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ е функцията на Лагранж за задача (1). Да се докаже, че ако $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на задача (1), то съществува вектор $\boldsymbol{\lambda}^*$, $\lambda_i^* \geq 0$, $i \in I_1$, такъв че

$$f(\mathbf{x}^*) = \psi(\boldsymbol{\lambda}^*) = \max\{\psi(\boldsymbol{\lambda}) : \lambda_i \geq 0,\ i \in I_1\}.$$

Забележка. Задачата $\max\{\psi(\boldsymbol{\lambda}),\ \lambda_i \geq 0,\ i \in I_1\}$ се нарича *двойствена на задача* (1). Твърдението, което формулирахме, може да се изкаже така: ако $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение на (правата) задача (1), то съществува оптимално решение на двойствената задача. При това оптималните стойности на целевите функции на правата и двойствената задача съвпадат.

15. Нека X и Y са непразни изпъкнали компактни множества в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ съответно и функцията $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ е изпъкнала по $\mathbf{x}$ при фиксирано $\mathbf{y}$ и вдлъбната по $\mathbf{y}$ при фиксирано $\mathbf{x}$.

15.1. Да се покаже, че $\min\limits_{\mathbf{x} \in X} \max\limits_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \max\limits_{\mathbf{y} \in Y} \min\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Необходимо ли е предположението за изпъкналост?

15.2. Да се покаже, че $g(\mathbf{x}) = \max\limits_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ е изпъкнала функция, а $\psi(\mathbf{x}) = \max\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ е вдлъбната функция.

15.3. Да се докаже, че $\min\limits_{\mathbf{x} \in X} \max\limits_{\mathbf{y} \in Y} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\limits_{\mathbf{y} \in Y} \min\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

16. Нека X е компактно множество в $\mathbb{R}^n$, а f и g_i, $i = 1, \ldots, m$, са непрекъснати функции, дефинирани в $\mathbb{R}^n$. Да се докаже, че функцията

$$\psi(\lambda) = \min\left\{f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\right\}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

е вдлъбната в $\mathbb{R}^m$.

17. Дадена е задачата $\max\{-x+y : x+y^2 \leq 0,\ x \geq 0\}$. Има ли седлова точка функцията на Лагранж за тази задача? Да се намери оптималното решение на двойствената задача (вж. забележката към задача 14).

18. Да се намери оптималното решение на следната задача

$$\max\{2x + 3y + z : x + y + z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Да се намери явния вид на двойствената задача (вж. забележката към задача 14) и нейното оптимално решение.

19. Нека $\mathbf{H}$ е симетрична положително дефинитна матрица $n \times n$, $\mathbf{A}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Разглеждаме двете задачи

$$\text{I.}\ \min\left\{\tfrac{1}{2}\langle \mathbf{x}^{\mathrm{T}}, \mathbf{H}\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{c}^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}\rangle : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}\right\},\ \ \text{II.}\ \min\left\{\tfrac{1}{2}\langle \mathbf{v}^{\mathrm{T}}, \mathbf{G}\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{h}^{\mathrm{T}}, \mathbf{v}\rangle : \mathbf{v} \ge 0\right\},$$

където $\mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{h} = \mathbf{A}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{c} + \mathbf{b}$. Да се намерят връзките между условията на Кун — Такър за задачи I и II.

Отговори и решения

1. Условието на Слейтър е изпълнено за произволна точка от вида $\overline{\mathbf{x}} = \lambda_1\overline{\mathbf{x}}_1 + \cdots + \lambda_s\overline{\mathbf{x}}_s$, където $\lambda_i > 0$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_s = 1$. Точката $\overline{\mathbf{x}} \in X$ и $g_i(\overline{\mathbf{x}}) \leq \lambda_1 g_i(\overline{\mathbf{x}}_1) + \cdots + \lambda_i g_i(\overline{\mathbf{x}}_i) + \cdots + \lambda_s g_i(\overline{\mathbf{x}}_s) < 0$ за всяко $i = 1, \ldots, s$.

2. Положете $L'_{x_j} = v_j$. Тогава $(L'_{x_1}, \ldots, L'_{x_n}) = \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$, където $\mathbf{e}_j$, $j = 1, \ldots, n$, е j-тият единичен вектор в $\mathbb{R}^n$.

3. $\mathbf{x}^*$ е точка на минимум тогава и само тогава, когато антиградиентът $-f'(\mathbf{x})$ в точката $\mathbf{x}^*$ се съдържа в конуса с образуващи, определени от външните нормали към граничните повърхнини, върху които лежи $\mathbf{x}^*$.

4. Не е изпълнено условието на Слейтър. Условията на теорема 3 в случая не са необходими (те са само достатъчни).

5. Търси се max на изпъкнала функция в изпъкнала област, а това не е задача на изпъкналото оптимиране и условията на теорема 3 не са достатъчни (те са само необходими).

6. Ако $X \neq \emptyset$ и системата $\mathbf{c} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$ е съвместима.

7. Съвместимост на системата $\mathbf{c} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$.

8. Покажете, че $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) = \infty$. Тогава целевата функция е коерцитивна и според следствието от теоремата на Вайерщрас задачата има оптимално решение.

9. Условието очевидно е необходимо, но не е достатъчно — например за задачата $\min\{f(x) = e^{-x} : x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$ неравенството е изпълнено за $y = 1$ и например $z = 0$, но $f(x) \geq 0$.

10.1. $\mathbf{x}^* = (1, 3)^{\mathrm{T}}$, $f^* = 2$.

10.2. $\mathbf{x}^* = (-1, 2)^{\mathrm{T}}$, $f^* = \dfrac{17}{2}$.

10.3. $\mathbf{x}^* = (4, 1)^{\mathrm{T}}$, $f^* = 27$.

10.4. $\mathbf{x}^* = (1, 3)^{\mathrm{T}}$, $f^* = \dfrac{17}{4}$.