

Глава 10

ДВИЖЕНИЕ НА ЧАСТИЦА В ЕДНОМЕРНО ПОТЕНЦИАЛНО ПОЛЕ

- § 10.1. Движение на частица в постоянно потенциално поле
Хамилтониан; стационарно уравнение на Шрьодингер; решение при $E > E_p$ и $E < E_p$; движение на свободна частица; частни и общи решения – собствени и суперпозиционни състояния; физичен смисъл на решенията; интеграл на движение; невъзможна отрицателна енергия за свободна частица. 248
- § 10.2. Безкрайно дълбока потенциална яма
Постановка на задачата; решение; гранични условия; нормиране на вълновата функция; квантуване на енергията; разстояние между нивата; класическа и квантова вероятност; аналогия със струна; изводи. 251
- § 10.3. Правоъгълна потенциална яма с крайна дълбочина
Модел на реални обекти; решение на уравнението; два вида решения – четни и нечетни функции; графично определяне на собствените стойности; ограничен брой свързани състояния; дълбочина и ширина на ямата; стоящи вълни на Дьо Бройл 256
- § 10.4. Потенциален праг и потенциална бариера
Потенциален праг; движение с енергия $E < E_p$; решение; гранични условия и преминаване; коефициенти на отражение и преминаване; потенциална бариера с височина E_p и ширина a ; движение с енергия $E < E_p$; решения; интерпретация; гранични условия и уравнения за амплитудите; прозрачност. 263
- § 10.5. Тунелен ефект и радиоактивно разпадане
Преминаване през бариера; тунелен ефект; реална бариера; α -разпадане; потенциална енергия на α -частицата; константа и

полупериод на разпадане; връзката им с проникваемостта на
барьерата; оценка за урана. 268

ДОПЪЛНИТЕЛНА ЛИТЕРАТУРА

1. Шпольский, Э. В., Атомная физика, т. II, Москва, Наука, 1974, гл. IV.
2. Сивухин, Д. В., Общий курс физики, т. V-2, Атомная и ядерная физика, Москва, Наука, 1989, § 73.
3. Мессиа А., Квантовая механика, том 1, Москва, Наука, 1978, гл. 3 – разд.. I.

§ 10.1. ДВИЖЕНИЕ НА ЧАСТИЦА В ПОСТОЯННО ПОТЕНЦИАЛНО ПОЛЕ

Да разгледаме едномерно движение на частица с маса m_0 в потенциално поле, постоянно по координатата x и независимо от времето:

$$E_p(x) = \text{const} = E_p. \quad (10.1)$$

Хамилтонианът на системата има вида

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + E_p(x) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_p \quad (10.2)$$

и не зависи явно от времето. Следователно уравнението на Шрьодингер (9.6) има стационарно решение

$$\psi(x, t) = \psi(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right) = \psi(x) \exp(-i\omega t), \quad \omega \equiv \frac{E}{\hbar}. \quad (10.3)$$

Заместваме решението в (9.6) и след съкращаване на експоненциалния множител $\exp(-iEt/\hbar)$ получаваме уравнението за $\psi(x)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - E_p) \psi(x) = 0, \quad (10.4)$$

т.е. при постоянно потенциално поле получаваме уравнение от вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0, \quad k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - E_p). \quad (10.5)$$

Решението на уравнението зависи от знака на k^2 :

а) при $k^2 > 0$, т.е. $E > E_p$, решението на уравнение (10.5) е хармонично

$$\psi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx). \quad (10.6)$$

б) при $k^2 < 0$, т.е. $E < E_p$, полагаме $-k^2 = \kappa^2$, при което

$$\kappa^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} (E_p - E) > 0. \quad (10.7)$$

Решението на уравнението е линейна комбинация от експоненциални функции

$$\psi(x) = A \exp(\kappa x) + B \exp(-\kappa x). \quad (10.8)$$

В (10.6) и (10.8) A и B са произволни константи, които се определят от граничните условия. Като използваме решения (10.6) и (10.8), нека се опитаме да анализираме движението на свободна частица. Потенциалната енергия на такава частица е нула, $E_p = 0$.

а) $k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} E = \frac{p_x^2}{\hbar^2} > 0$, т.е. $E > 0$.

Решението (10.6) можем да изразим чрез енергията E или чрез импулса p_x :

$$\psi(x) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m_0 E} x\right) + B \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m_0 E} x\right), \quad (10.9a)$$

$$\psi(x) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_x x\right) + B \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_x x\right). \quad (10.9b)$$

И в трите случая (10.6), (10.9a) и (10.9b) решението е представено като суперпозиция от частните решения $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi_1(x) + \psi_2(x), \\ \psi_1(x) &= A \exp(ikx) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m_0 E} x\right) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_x x\right), \\ \psi_2(x) &= B \exp(-ikx) = B \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \sqrt{2m_0 E} x\right) = B \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_x x\right). \end{aligned} \quad (10.10)$$

Общото решение $\psi(x)$ не е собствена функция на оператора $\hat{p}_x$:

$$\hat{p}_x \psi(x) = \hat{p}_x \psi_1(x) + \hat{p}_x \psi_2(x) = p_x \psi_1(x) - p_x \psi_2(x) \neq p_x \psi(x). \quad (10.11)$$

Частното решение $\psi_1(x)$ е собствена функция на оператора $\hat{p}_x$ със собствена стойност на импулса $\hbar k$:

$$\hat{p}_x \psi_1(x) = \hbar k \psi_1(x) \rightarrow p_x = \hbar k. \quad (10.12)$$

Решението $\psi_2(x)$ е също собствена функция на $\hat{p}_x$, но с друга собствена стойност $-\hbar k$ на импулса

$$\hat{p}_x \psi_2(x) = -\hbar k \psi_2(x) \rightarrow p_x = -\hbar k. \quad (10.13)$$

Решенията $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ са само пространствената част на вълновите функции $\psi_1(x, t)$ и $\psi_2(x, t)$. Добавяйки времевата функция (10.3), получаваме плоски вълни на Дьо Бройл:

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t) &= \psi_1(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) = A \exp[-i(\omega t - kx)], \\ \psi_2(x, t) &= \psi_2(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) = B \exp[-i(\omega t + kx)]. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Първото решение $\psi_1(x)$ съответства на вълна на Дьо Бройл, разпространяваща се в положителната посока на оста X , а второто $\psi_2(x)$ – на вълна на Дьо Бройл, разпространяваща се в отрицателната посока на оста X . На корпускулен език това означава, че $\psi_1(x)$ описва частица с положителен импулс $\hbar k$ (10.12), а $\psi_2(x)$ – частица с отрицателен импулс $-\hbar k$ (10.13).

Ще добавим още, че функциите $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ са собствени функции на оператора на Хамилтон $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Операторите $\hat{p}$ и $\hat{H}$ комутират с $\hat{H}$ и следователно импулсът p_x и енергията E са интегрални на движението.

б) $k^2 < 0$, $E < 0$

В този случай за κ съгласно (10.7) можем да запишем

$$\kappa^2 = -k^2 = \frac{2m_0|E|}{\hbar^2}, \quad (10.15)$$

а за решението на уравнение (10.5) –

$$\psi(x) = A \exp\left(\frac{\sqrt{2m_0|E|}}{\hbar} x\right) + B \exp\left(-\frac{\sqrt{2m_0|E|}}{\hbar} x\right). \quad (10.16)$$

Тази функция $\psi(x)$ съгласно свойствата на вълновата функция е ограничена, включително и при $x \rightarrow \pm\infty$. От условието за ограниченост при $x \rightarrow +\infty$ следва, че $A=0$, а при $x \rightarrow -\infty$ имаме $B=0$. И така при отрицателна енергия ($E < 0$) вълновата функция на свободна частица е $\psi(x)=0$. Но физически $|\psi(x)|^2$ представлява плътността на вероятността $\rho(x)$ в точка с координата x (вж. гл. 6). Очевидно тази плътност е нула за всички възможни стойности на x . Извод: *свободна частица с отрицателна енергия не съществува.*

§ 10.2. БЕЗКРАЙНО ДЪЛБОКА ПОТЕНЦИАЛНА ЯМА

Ще анализираме движението на квантова частица с маса m_0 в безкрайно дълбока потенциална яма, т.е. в област $0 < x < a$, където $E_p(x)=0$. При $x \leq 0$ и $x \geq a$ потенциалът $E_p(x) \rightarrow \infty$. Тъй като и в двете области потенциалното поле е постоянно, хамилтонианът на системата не зависи явно от времето. Следователно вълновата функция $\psi(x)$ удовлетворява стационарното уравнение на Шрьодингер (10.4).

При $x \leq 0$ и $x \geq a$ то може да бъде записано в следния вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E\psi(x) - \infty\psi(x)) = 0. \quad (10.17)$$

Единственият начин да се удовлетвори това уравнение, е да се положи $\psi(x)=0$ в посочената област. Оттук получаваме и условията

$$\psi(0)=0, \quad \psi(a)=0, \quad (10.18)$$

които се явяват гранични условия на вълновото уравнение в областта $x \in (0, a)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0, \quad k^2 \equiv \frac{2m_0}{\hbar^2} E. \quad (10.19)$$

Решението на това уравнение е

$$\psi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx). \quad (10.20)$$

От граничното условие при $x=0$ получаваме

$$B = -A. \quad (10.21)$$

Като заместим (10.21) в (10.20), можем да запишем последното така:

$$\psi(x) = A[\exp(ikx) - \exp(-ikx)]. \quad (10.22)$$

Умножаваме и делим на $2i$ и след това прилагаме формулата на Ойлер. В резултат получаваме

$$\psi(x) = A' \sin kx, \quad A' \equiv 2iA. \quad (10.23)$$

От граничното условие при $x = a$ имаме

$$A' \sin ka = 0, \quad (10.24a)$$

или

$$k_n a = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.24b)$$

Ще отбележим, че $n = 0$ е решение на уравнение (10.19). При това $\psi(x) = 0$, което физически означава, че няма частица. Това решение не отговаря на физическото условие на задачата и затова е отхвърлено в (10.24b).

Окончателно за решението на (10.19) получаваме

$$\psi_n(x) = A' \sin \frac{n\pi}{a} x. \quad (10.25)$$

Константата A' определяме от условието за нормировка:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^a |\psi|^2 dx = \int_0^a |A'|^2 \sin^2 \frac{n\pi}{a} x dx = |A'|^2 \int_0^a \frac{1 - \cos 2k_n x}{2} dx = \\ &= |A'|^2 \frac{a}{2} \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{2}{a}}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Окончателно за вълновата функция на частица в безкрайно дълбока потенциална яма получаваме

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x. \quad (10.27)$$

Отчитайки стойностите на k_n от (10.24b) в $k^2 = 2m_0 E / \hbar^2$ (вж. (10.19)), за енергията получаваме

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} n^2, \quad n=1,2,3... \quad (10.28)$$

Енергията на квантова частица в безкрайно дълбока потенциална яма се квантува. Числото n се нарича квантово число.

Спектърът на енергията на квантовата частица е дискретен, докато на класическата е непрекъснат. Енергетичните нива са нееквидистантни – разстоянието между тях расте с увеличаване на енергията, т.е. с увеличаване на квантовото число n :

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} (2n+1). \quad (10.29)$$

Стойностите на енергията се отнасят, както квадратите на целите числа:

$$E_1 : E_2 : E_3 : \dots : E_n = 1 : 4 : 9 : \dots : n^2. \quad (10.30)$$

Тук ще отбележим, че както стойността на енергията (10.28), така и разстоянието между енергетичните нива (10.29) са значителни, ако масата на частицата m_0 и/или ширината на ямата a са достатъчно малки величини. Например за електрона ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg) в яма с ширина $a = 10^{-10}$ m (тук $a = 2a_0$, където a_0 е радиусът на Бор) се получава $E_n = n^2 \cdot 0,34 \text{ eV}$ и $\Delta E_n = (2n+1) \cdot 0,34 \text{ eV} \sim 1 \text{ eV}$. При такива малки стойности на масата m_e и ширината a дискретният характер на енергията е ярко изразен. Но ако този електрон е в яма с ширина $a = 10^{-2}$ m (макроразмер), то $E_n = n^2 \cdot 0,34 \cdot 10^{-16} \text{ eV}$ и $\Delta E_n = (2n+1) \cdot 0,34 \cdot 10^{-16} \text{ eV}$. Стойностите на енергията и разстоянията между енергетичните нива са толкова незначителни, че практически можем да смятаме енергията за непрекъсната величина. Физичният смисъл на решението (10.27) става очевиден, като изразим функцията $\psi(x)$ чрез експоненциални функции съгласно формулата на Ойлер:

$$\psi(x) = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{a}} \left[\exp\left(\frac{\sqrt{2m_0|E|}}{\hbar} x\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt{2m_0|E|}}{\hbar} x\right) \right]. \quad (10.31)$$

Общото решение е суперпозиция на две вълни на Дьо Бройл с дължина на вълната $\lambda = 2\pi/k = 2\pi a/n\pi = 2a/n$: едната с вълнова функция $\psi^+(x) = \text{const} \exp(in\pi x/a)$, разпространяваща се по оста X , а другата с вълнова функция $\psi^-(x) = \text{const} \exp(-in\pi x/a)$,

разпространяваща се в обратна посока. В резултат на суперпозицията се получава стоящата вълна (10.22) на Дьо Бройл.

Ще разгледаме подробно първите три състояния. *Състоянието с минимална енергия се нарича основно*. Основното състояние е с квантово число $n=1$ и има вълнова функция и енергия

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi}{a} x, \quad E_{\min} = E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2}. \quad (10.32)$$

За сравнение ще припомним, че в класическата механика минималната енергия на частица в яма е нула $E_{\min}^{cl} = 0$, т.е. частицата може да се намира в покой.

Плътността на вероятността в основното състояние е следната:

$$\rho_1 = \frac{dW_1(x)}{dx} = |\psi(x)|^2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{\pi}{a} x. \quad (10.33)$$

Да определим класическата плътност на вероятността. Елементарната вероятност $dW^{cl}(x)$ да открием частицата в интервала dx е пропорционална на интервала от време dt , през който тя се намира там: $dW^{cl}(x) \propto dt$, Преминвайки към равенство и замествайки $dt = dx/v$, получаваме

$$dW^{cl}(x) = \frac{C}{v} dx = \text{const } dx, \quad (10.34)$$

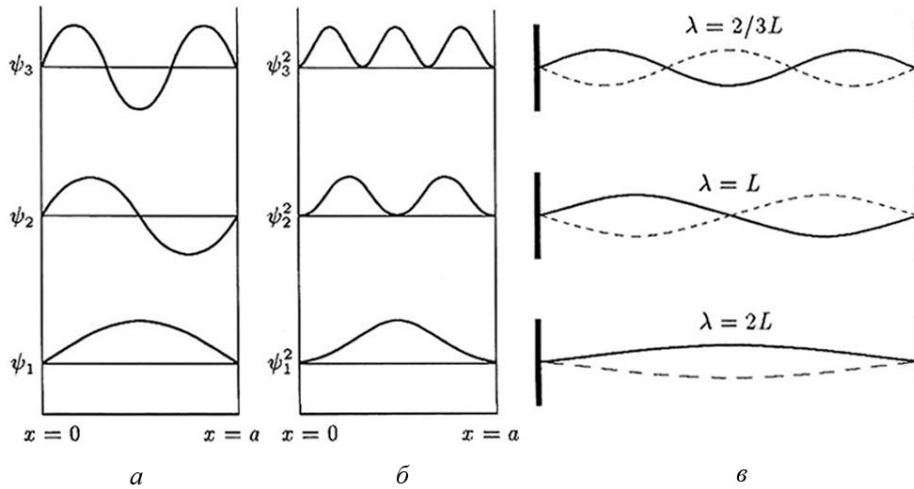
където C е константа, а v е скоростта на класическата частица. Оттук определяме $\rho^{cl}(x)$:

$$\rho^{cl}(x) = \frac{dW^{cl}(x)}{dx} = \frac{C}{v} = \text{const}. \quad (10.35)$$

Вероятността за класическата частица е еднаква във всички точки на ямата и не зависи от енергията, докато $E \neq 0$. Когато $E=0$ и частицата се намира в покой в точка x_0 (начално положение), тогава $\rho(x) = \delta(x - x_0)$.

Вълновата функция $\psi_1(x)$ (10.32) и плътността на вероятността $\rho_1(x)$ (10.33) са показани на фиг. 10-1. Тези две функции освен за основното състояние са показани и за първите две възбудени състояния. На същата фигура за сравнение е показана стоящата вълна на струна, закрепена в двата края.

По аналогичен начин за състоянията с $n=2$ и $n=3$ получаваме



Фиг. 10-1. Вълнови функции $\psi_n(x)$ (а) и плътност на вероятността $\rho_n(x) = |\psi_n|^2$ (б) на първите три състояния на частица в безкрайно дълбока потенциална яма с дължина a и стоящи вълни на струна, закрепена в двата края (в).

$$\begin{aligned} \text{за } n=2: \quad E_2 &= \frac{2^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} = 4E_1, \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi}{a} x, \quad \rho_2 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{2\pi}{a} x, \\ \text{за } n=3: \quad E_2 &= \frac{3^2 \pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} = 9E_1, \quad \psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{3\pi}{a} x, \quad \rho_3 = \frac{2}{a} \sin^2 \frac{3\pi}{a} x. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Тези състояния също са показани на фиг. 10-1.

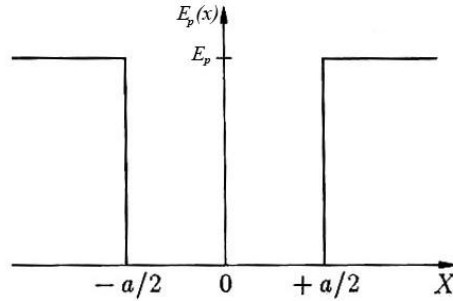
Точките, в които $\psi_n(x) = 0$, се наричат възли на вълновата функция. При $0 < x < a$ функцията $\psi_1(x)$ няма възли, $\psi_2(x)$ има 1 възел, $\psi_3(x)$ има 2 и т.н., $\psi_n(x)$ има $(n-1)$ възела. Забелязваме, че колкото повече възли има функцията на състоянието, толкова по-голяма е енергията му.

Да обобщим резултатите от анализа на движението на частица в безкрайно дълбока потенциална яма:

1. Енергията на частицата има дискретен характер.
2. Енергията $E_n = (\pi^2 \hbar^2 / 2m_0 a^2) n^2$ се определя от квантовото число n , което приема стойности $n = 1, 2, 3, \dots$.
3. Енергетичните нива са нееквидистантни, $\Delta E_n = (\pi^2 \hbar^2 / 2m_0 a^2) (2n+1)$.
4. Минималната възможна енергия е различна от нула, $E_{\min} = E_1 \neq 0$.
5. В основно състояние ($E = E_{\min} = E_1$) вероятността да открием частицата е различна от нула във всички точки на ямата.
6. Квантуването на енергията се проявява при достатъчно малка маса и/или ширина на ямата.

§ 10.3. ПРАВОЪГЪЛНА ПОТЕНЦИАЛНА ЯМА С КРАЙНА ДЪЛБОЧИНА

Ще разгледаме задачата за правоъгълна потенциална яма с ширина a и дълбочина E_p (фиг. 10-2), в която се движи частица с енергия $E < E_p$



Фиг. 10-2. Правоъгълна потенциална яма с крайна дълбочина.

и вътре в ямата потенциалът е равен на нула:

$$E_p(x) = \begin{cases} E_p, & x \leq -a/2, \text{ или } x \geq +a/2 \\ 0, & -a/2 < x < +a/2. \end{cases} \quad (10.37)$$

Тук изборът на различаващо се от безкрайно дълбоката яма начало на координатната ос (в средата на ямата) се определя единствено от съображение за математически по-лесно и нагледно решение. Както ще видим по-долу, уравнението за яма с краен потенциал може да бъде решено само графично (или числено).

Такава яма често се използва в квантовата механика като модел на потенциални сили с ограничен радиус на действие, неокзващи въздействие извън този радиус. Извън областта на действие на силите потенциалът може да се смята за постоянен. Макар че при такъв опростен потенциал се губят някои детайли на движението, то съществените характеристики на свързаните състояния, дължащи се на сили с известна стойност и известна област на действие, се запазват. Например движението на неутрона в ядрото успешно се описва посредством такава яма с дълбочина 50 MeV и ширина $\sim 10^{-14}$ m.

На основание на това, което бе казано при разискването на безкрайно дълбока яма, можем да положим, че тук вълновата функция ще описва стояща вълна на Дьо Бройл с цяло число полуълни вътре в ямата и експоненциално затихваща вълна вън от нея.

Решенията на уравнението на Шрьодингер (10.4) с $E_p(x)$, зададено от (10.37) можем да запишем в следния вид:

$$\psi^1(x) = A \sin kx + B \cos kx, \quad -a/2 < x < a/2, \quad (10.38a)$$

$$\psi^2(x) = C \exp(\kappa x) + D \exp(-\kappa x), \quad x < -a/2, \quad (10.38б)$$

$$\psi^3(x) = F \exp(\kappa x) + G \exp(-\kappa x), \quad x > a/2. \quad (10.38в)$$

Тук $k = \sqrt{2m_0 E / \hbar^2}$ и $\kappa = \sqrt{2m_0 (E_p - E) / \hbar^2}$.

Най-напред ще наложим изискването вълновата функция да остане ограничена при всяко x . Очевидно е, че при $x \rightarrow \pm\infty$ то води до

$$D = 0, \quad F = 0. \quad (10.39)$$

Условието за непрекъснатост на вълновата функция и нейната производна при $x = -a/2$ и $x = a/2$ дават граничните условия от вида

$$\begin{aligned} \psi^1(-a/2) &= \psi^2(-a/2), & \psi^1(a/2) &= \psi^2(a/2), \\ \frac{\partial}{\partial x} \psi^1(-a/2) &= \frac{\partial}{\partial x} \psi^2(-a/2), & \frac{\partial}{\partial x} \psi^1(a/2) &= \frac{\partial}{\partial x} \psi^2(a/2), \end{aligned} \quad (10.40)$$

В явен вид това са четири уравнения за константите A, B, C и G :

$$-A \sin(ka/2) + B \cos(ka/2) = C \exp(-\kappa a/2), \quad (10.41a)$$

$$Ak \cos(ka/2) + Bk \sin(ka/2) = C\kappa \exp(-\kappa a/2), \quad (10.41б)$$

$$A \sin(ka/2) + B \cos(ka/2) = G \exp(-\kappa a/2), \quad (10.41в)$$

$$Ak \cos(ka/2) - Bk \sin(ka/2) = -G\kappa \exp(-\kappa a/2). \quad (10.41г)$$

Последователно от (10.41в) изваждаме и добавяме към него почленно (10.41а) и получаваме

$$2A \sin(ka/2) = (G - C) \exp(-\kappa a/2), \quad (10.42a)$$

$$2B \cos(ka/2) = (G + C) \exp(-\kappa a/2). \quad (10.42б)$$

Аналогичните действия с уравнения (10.41г) и (10.41б) водят до

$$2Bk \sin(ka/2) = (G + C) \exp(-\kappa a/2). \quad (10.43a)$$

$$2Ak \cos(ka/2) = -(G - C) \exp(-\kappa a/2). \quad (10.43б)$$

Разделяме (10.43а) на (10.42б) и (10.43б) на (10.42а) и получаваме

$$k \operatorname{tg}(ka/2) = \kappa, \quad (10.44a)$$

$$k \operatorname{ctg}(ka/2) = -\kappa. \quad (10.44б)$$

Лесно може да се види, че двете уравнения (10.44) не могат да бъдат удовлетворени едновременно. Ако те можеха, то уравнението, получено от събирането им

$$k \operatorname{tg} \frac{ka}{2} + k \operatorname{ctg} \frac{ka}{2} = 0, \quad (10.45)$$

би било валидно. Да умножим това уравнение по $\operatorname{tg}(ka/2)$:

$$k \operatorname{tg}^2 \frac{ka}{2} + k = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{ka}{2} = -1. \quad (10.46)$$

Това не може да бъде, тъй като според условието на задачата k и a са реални числа. По такъв начин остава само възможността или (10.44а) да има решение, а (10.44б) да няма, или обратно – (10.44б) да има, а (10.44а) да няма. Така че собствените функции на правоъгълна яма с крайна дълбочина образуват два класа функции. За първия клас имаме

$$k \operatorname{tg}(ka/2) = \kappa, \quad A=0, \quad G-C=0. \quad (10.47)$$

Като отчетем това, (10.41в) се редуцира до

$$B \cos(ka/2) = G \exp(-ka/2) \Rightarrow G = B \cos(ka/2) \exp(ka/2) = C \quad (10.48)$$

а вълновите функции са

$$\begin{aligned} \psi_1^1(x) &= B \cos(kx), \quad -a/2 < x < a/2, \\ \psi_1^2(x) &= [B \cos(ka/2) \exp(\kappa a/2)] \exp(\kappa x), \quad x < -a/2, \\ \psi_1^3(x) &= [B \cos(ka/2) \exp(\kappa a/2)] \exp(-\kappa x), \quad x > a/2. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Вътре в ямата вълновата функция е четна ($\cos(kx) = \cos(-kx)$).

За втория клас имаме

$$k \operatorname{ctg} \frac{ka}{2} = -\kappa, \quad B=0, \quad G+C=0. \quad (10.50)$$

В този случай (10.41в) се редуцира до

$$A \sin \frac{ka}{2} = G \exp\left(-\frac{\kappa a}{2}\right) \Rightarrow G = A \sin \frac{ka}{2} \exp\left(\frac{\kappa a}{2}\right) = -C \quad (10.51)$$

и вълновите функции са

$$\begin{aligned} \psi_2^1(x) &= A \sin(kx), \quad -a/2 < x < a/2, \\ \psi_2^2(x) &= [-A \sin(ka/2) \exp(\kappa a/2)] \exp(\kappa x), \quad x < -a/2, \\ \psi_2^3(x) &= [A \sin(ka/2) \exp(\kappa a/2)] \exp(-\kappa x), \quad x > a/2. \end{aligned} \quad (10.52)$$

Вътре в ямата вълновата функция е нечетна* ($\sin(kx) = -\sin(-kx)$).

Да определим собствените стойности на енергията. Ще разгледаме

*При решаване на задачата за безкрайно дълбока яма не получихме два класа решения и не възникна въпрос за четността на вълновите функции. Това се дължи на избора на началото на оста X – там то съвпада със стената на ямата, а тук е в средата ѝ така че потенциалът на ямата $E_p(x)$ е нечетна функция от координатата x (читателят би могъл да намери подробности в R. Eisberg and R. Resnik, Quantum Physics, John Wiley, N. Y., 1974, § 6.8 и в [1], § 48). Разбира се, задачата за яма с краен потенциал може да се реши подобно на безкрайно дълбока яма, като се приеме $x=0$ да съвпада със стената (вж. например Р. Пейн, Физика колебаний и волн, Москва, Мир, 1979, гл. 12).

най-напред уравнение (10.47). Записвайки k и κ в явен вид и умножавайки по $a/2$, получаваме

$$\sqrt{\frac{m_0 E a^2}{2\hbar^2}} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{m_0 E a^2}{2\hbar^2}} = \sqrt{\frac{m_0 (E_p - E) a^2}{2\hbar^2}}. \quad (10.53)$$

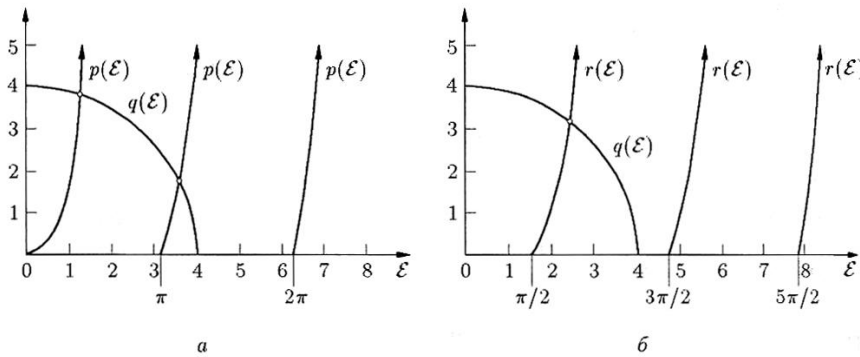
За частица с маса m_0 и потенциална яма с дълбочина E_p и ширина a единствената неизвестна величина в уравнението е E . Решенията му определят възможните стойности на енергията – собствените стойности за собствените функции (10.49) от първия клас. Решенията на трансцендентното уравнение могат да бъдат намерени числено или графично. Ще използваме прост графичен метод, позволяващ да се илюстрират най-важните особености на уравнението. След полаганията

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m_0 E a^2}{2\hbar^2}}, \quad p(\varepsilon) = \varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon, \quad q(\varepsilon) = \sqrt{\frac{m_0 E_p a^2}{2\hbar^2} - \varepsilon^2} \quad (10.54)$$

уравнение (10.53) се записва в следния вид:

$$p(\varepsilon) = \sqrt{\frac{m_0 E_p a^2}{2\hbar^2} - \varepsilon^2} \quad \text{или} \quad p(\varepsilon) = q(\varepsilon). \quad (10.55)$$

Пресечните точки на функциите $p(\varepsilon)$ и $q(\varepsilon)$ определят стойностите на ε , които са решения на (10.55). Графичното им решение е показано на фиг. 10-3а. Функцията $p(\varepsilon)$ има нули при $\varepsilon = 0, \pi, 2\pi, \dots$ и асимптоти при $\varepsilon = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$. Като запишем 3-то уравнение от (10.54) във вид $q^2(\varepsilon) + \varepsilon^2 = m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2$, е очевидно, че $q(\varepsilon)$ е четвърт



Фиг. 10-3. Графично решаване на уравнението за собствените стойности на енергията на частица в потенциална яма с крайна дълбочина: а) $p(\varepsilon) = q(\varepsilon)$ (четни вълнови функции $\psi_1(x)$); б) $r(\varepsilon) = q(\varepsilon)$ (нечетни вълнови функции $\psi_2(x)$).

окръжност с радиус $\sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2}$. От фигурата се вижда, че броят на решенията на (10.55) зависи от радиуса. Всяко решение дава една собствена стойност за E при $E < E_p$: една собствена стойност, ако $\sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2} < \pi$, две стойности, ако $\pi \leq \sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2} < 2\pi$, три стойности, ако $2\pi \leq \sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2} < 3\pi$ и т.н. На фиг. 10-3а $\sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2} = 4$. Тогава решенията са две: $\varepsilon \approx 1,25$ и $\varepsilon \approx 3,60$. За тях от (10.54) за собствените стойности на енергията получаваме

$$E = \varepsilon^2 \frac{2\hbar^2}{m_0 a^2} = \varepsilon^2 \frac{2\hbar^2}{m_0 E_p a^2} E_p \approx \left(\frac{1,25}{4}\right)^2 E_p \approx 0,098 E_p,$$

$$E = \varepsilon^2 \frac{2\hbar^2}{m_0 E_p a^2} E_p \approx \left(\frac{3,60}{4}\right)^2 E_p \approx 0,808 E_p. \quad (10.56)$$

За втория клас решения (нечетни функции в ямата) собствените стойности ще получим като решение на първото уравнение от (10.50). Полагайки $r(\varepsilon) = -\varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon$, можем да го запишем в следния вид:

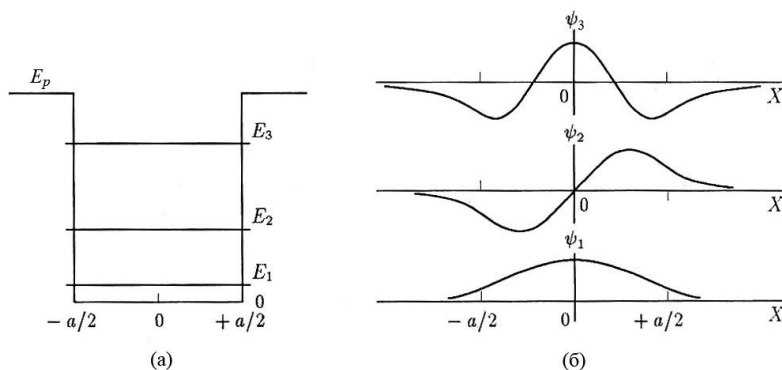
$$\varepsilon \operatorname{ctg} \varepsilon = \sqrt{\frac{m_0 E a^2}{2\hbar^2}} - \varepsilon^2 \quad \text{или} \quad r(\varepsilon) = q(\varepsilon). \quad (10.57)$$

Решаването е аналогично на това на (10.55). Графичното решение на (10.57) е показано на фиг. 10-3б. Очевидно е, че за $E < E_p$ при условието $\sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2} < \pi/2$ няма собствени стойности, съответстващи на нечетните собствени функции; ако $\pi/2 \leq \sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2} < 3\pi/2$, има една; ако $3\pi/2 \leq \sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2} < 5\pi/2$, има две, и т.н. Фигура 10-3б илюстрира случая, когато $\sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2} = 4$. Единственото решение е при $\varepsilon \approx 2,47$ и съответстващата собствена стойност на енергията е при

$$E = E_2 = \varepsilon^2 \frac{2\hbar^2}{m_0 E_p a^2} E_p \approx \left(\frac{2,47}{4}\right)^2 \approx 0,383 E_p. \quad (10.58)$$

Собствените стойности и собствените функции на разгледания случай с три възможни свързани състояния са показани на фиг. 10-4.

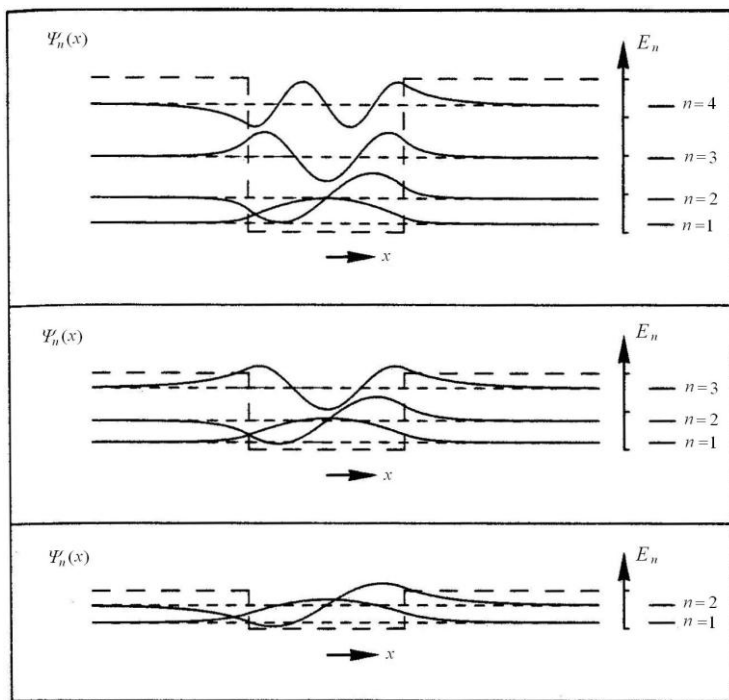
В крайната потенциална яма броят на позволените стойности на енергия на частицата при $E < E_p$ е ограничен. Това са собствени стойности на свързаните състояния. От друга страна, при $E > E_p$ са възможни всички стойности за E – те образуват безкрайно множество



Фиг. 10-4. Собствените стойности (а) и собствените функции (б) на три свързани състояния на частица в потенциална яма с крайна дълбочина при $\sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2} = 4$ и $E < E_p$.

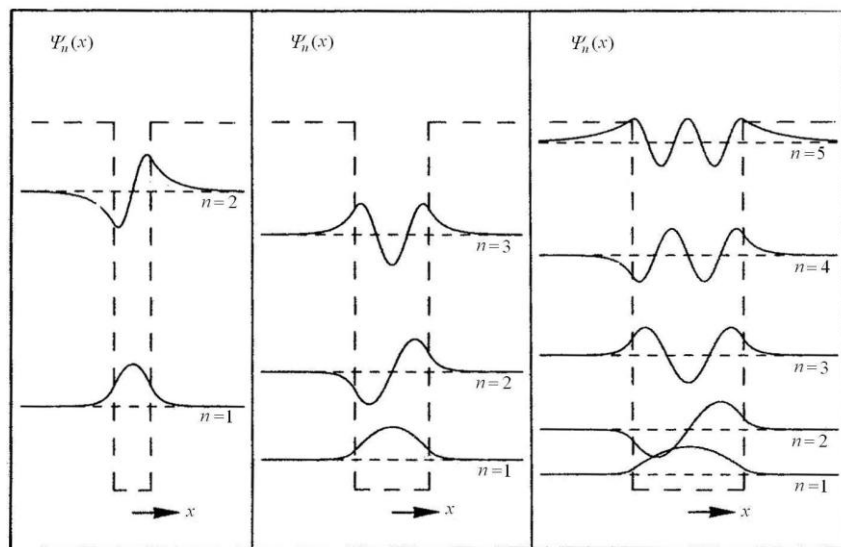
от собствените стойности. Когато потенциалната яма е много плитка или тясна ($\sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2} < \pi/2$), само едно състояние (с четна вълнова функция) е свързано. С нарастването на величината $\sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2}$ броят на свързаните състояния расте, като най-напред се появява състояние с нечетна функция, след това с четна и т.н.

На фиг. 10-5 е показано увеличаването на състоянията при нарастване на дълбочината на ямата, т.е. на E_p .



Фиг. 10-5. Увеличаване на броя на състоянията в ямата с нарастване на дълбочина ѝ E_p .

Броят на състоянията се увеличава и при нарастване на ширината на ямата, т.е. на a . Това е показано на фиг. 10-6.



Фиг. 10-6. Увеличаване на броя на състоянията в ямата с нарастване на нейната ширина a .

Както се вижда от фиг. 10-4, фиг. 10-5 и фиг. 10-6, частица в яма с крайна дълбочина има две качествени разлики:

1. Броят на енергетичните нива е ограничен и той нараства: а) с дълбочината на ямата; б) с нарастване ширината на ямата.
2. Частицата прониква в класически забранената област $x^2 > a^2/4$.

Както се вижда от аналитичните изрази (10.49) и (10.52) и от фиг. 10-4б, решенията на уравнения на Шрьодингер в този случай са стоящи вълни на Дьо Бройл. Но тук аналогията със струната не е толкова пълна, както при безкрайно дълбока яма (вж. фиг. 10-1а и б). Нека най-напред разгледаме особеностите на стоящите вълни вътре в ямата. Колкото по-висока е собствената стойност на енергията, толкова повече осцилации има вълновата функция и толкова по-голямо е вълновото число k . Това е така, тъй като вътре в ямата вълновото число k е пропорционално на $E^{1/2}$. Частицата в потенциалната яма, показана на фиг. 10-4, няма 4-то собствено свързано състояние, тъй като необходимата стойност на k , а следователно и тази на $E^{1/2}$ е толкова голяма, че нарушава условието $E < E_p$. На най-ниското енергетично ниво вълновата функция $\psi_1(x)$ няма нито един възел, на второто $\psi_2(x)$ има един възел, а на третото – два и т.н. Възлите нямат обаче същата позиция по оста X , както в безкрайно дълбоката потенциална яма.

Да разгледаме онези части на вълновите функции, които проникват извън областта на ямата. В класическата механика частицата никога не

може да проникне в тази област, тъй като нейната кинетична енергия $p^2 / 2m_0 = E - E_p$ е отрицателна, когато $E < E_p$. Проникването на квантовата частица в класически забранената област нараства с увеличаването на енергията ѝ. Действително експоненциалният спад на вълновата функция извън ямата се определя от κ , пропорционален на $(E_p - E)^{1/2}$. С увеличаване на E параметърът κ намалява и функцията прониква все по-навътре в класически забранената област.

При нарастване на потенциалната енергия до много големи стойности ($E_p \rightarrow \infty$) експоненциалният параметър $\kappa = \sqrt{2m_0(E_p - E)} / \hbar^2$ става голям и вълновата функция бързо спада до нула. В граничния случай ($E_p \rightarrow \infty$) вълновата функция $\psi(x)$ става нула за всички $x < -a/2$ и $x > a/2$, а вътре в ямата има формата, показана на фиг. 10-1а.

И накрая нека сумираме резултатите за частица в потенциална яма с крайна дълбочина:

1. Енергията на частицата при $E < E_p$ има дискретен характер.
2. Енергетичните нива са нееквидистантни.
3. Броят на свързаните състояния зависи от дълбочината E_p и ширината a на ямата – при $\sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2} < \pi/2$ има само едно свързано състояние и с увеличаване на параметъра $\sqrt{m_0 E_p a^2 / 2\hbar^2}$ броят им нараства.
4. Минимално възможната енергия е различна от нула: $E_{\min} = E_1 \neq 0$.
5. Вероятността да открием частицата в основното състояние ($E = E_{\min} = E_1$) е различна от нула в коя да е точка на ямата.
6. Вероятността да открием частицата в класически забранената област е различна от нула.

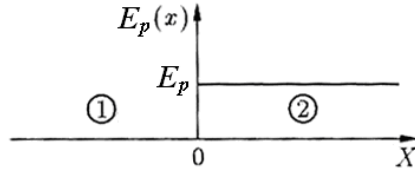
§ 10.4. ПОТЕНЦИАЛЕН ПРАГ И ПОТЕНЦИАЛНА БАРИЕРА

Тук ще решим друга проста задача с едномерен потенциал. Както и при безкрайно дълбока яма, тя е интересна с илюстрирането на нов квантов ефект, който няма аналог в класическата механика. В този случай това е проникване на частицата в област с потенциал, по-голям от нейната енергия.

Ще разгледаме потенциал със следната форма (фиг. 10-7):

$$\begin{aligned} E_p(x) &= 0, & x < 0, \\ E_p(x) &= E_p, & x \geq 0. \end{aligned} \quad (10.59)$$

Областта $x < 0$ означаваме с 1, а областта $x > 0$ – с 2.



Фиг. 10-7. Потенциален праг.

Хамилтонианът на системата

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + E_p \quad (10.60)$$

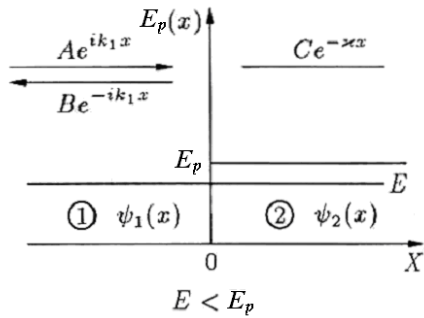
не зависи от времето и вълновата функция $\psi(x)$ удовлетворява стационарното уравнение на Шрьодингер (вж. 10.4):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - E_p(x)) \psi(x) = 0. \quad (10.61)$$

За случая $E < E_p$ решението на уравнението в двете области е:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A \exp(ikx) + B \exp(-ikx), \quad k = \sqrt{2m_0 E / \hbar^2}, \quad x < 0, \\ \psi_2(x) &= C \exp(-\kappa x) + D \exp(\kappa x), \quad \kappa = \sqrt{2m_0 (E_p - E) / \hbar^2}, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (10.62)$$

Тъй като членът $D \exp(\kappa x)$ заедно със зависещия от времето множител $\exp(-ikEt / \hbar) \equiv \exp(-i\omega_2 t)$, т.е. $D \exp[-i(k_2 x + \omega_2 t)]$, представлява затихваща вълна, идваща отлясно (от $x = +\infty$ на фиг. 10-7), а такава вълна няма, следва, че $D = 0$ (още една причина за $D = 0$ – при $x > 0$ $\psi_2(x)$ трябва да е ограничена). Интерпретацията на останалите членове с амплитуди A , B и C е дадена на фиг. 10-8.



Фиг. 10-8. Интерпретация на решенията на задачата с потенциален праг: $A \exp(ik_1 x)$ – падаща вълна на Дьо Бройл, $B \exp(-ik_1 x)$ – отразена вълна, $C \exp(-\kappa x)$ – затихваща вълна.

Решенията $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ са вълновата функция на системата в областите 1 и 2. Условието за непрекъснатост на вълновата функция изисква:

$$\begin{aligned}\psi_1(0) &= \psi_2(0), \\ \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(0) &= \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(0).\end{aligned}\quad (10.63)$$

Тези гранични условия дават съотношенията

$$\begin{aligned}A + B &= C, \\ A - B &= \kappa / k C,\end{aligned}\quad (10.64)$$

от които определяме B и C чрез A :

$$B = \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} A, \quad C = \frac{2k}{k + i\kappa} A. \quad (10.65)$$

Плътността на вероятността на частиците в област 2 е

$$\rho(x) = |\psi_2(x)|^2 = \frac{4k_1^2}{k_1^2 + \kappa^2} |A|^2 \exp(-2\kappa x). \quad (10.66)$$

В класическата физика областта 2 е забранена зона. В квантовата механика обаче частиците могат да проникват в забранената област. Ефектът е чисто квантов и няма аналог в класическата физика. Величината

$$j = v |\psi(x)|^2 = \frac{p}{m_0} |\psi(x)|^2 = m_0 v |\psi(x)|^2 \quad (10.67)$$

определя плътността на потока частици (N частици със скорост v имат поток Nv). Потоците на падащата, отразената и преминалата вълна са съответно:

$$j_{\text{in}} = \frac{\hbar k}{m_0} |A|^2, \quad j_r = \frac{\hbar k}{m_0} |B|^2, \quad j_{\text{tr}} = 0, \quad (10.68)$$

Отношението $j_r/j_{\text{in}} = R$ се нарича коефициент на отражение, а $j_{\text{tr}}/j_{\text{in}} = T$ е коефициент на преминаване или прозрачност на прага. За тези коефициенти от (10.65) и (10.68) получаваме

$$\begin{aligned}R &= \frac{j_r}{j_{\text{in}}} = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \frac{(k - \kappa)^2}{(k + \kappa)^2} \\ T &= \frac{j_{\text{tr}}}{j_{\text{in}}} = \frac{\kappa}{k} \left| \frac{C}{A} \right|^2 = \frac{\kappa}{k} \frac{4k^2}{(k + \kappa)^2} = \frac{4\kappa k}{(k + \kappa)^2}.\end{aligned}\quad (10.69)$$

Очевидно $R+T=1$, което изразява физическото условие за запазване на броя на частиците – разсеяният плюс преминалия поток са равни на падащия:

$$j_{\text{in}} = \frac{\hbar k}{m_0} |A|^2 = \frac{\hbar k}{m_0} |B|^2. \quad (10.70)$$

Стойностите на B и C (10.65) ни позволяват с помощта на (10.69) да определим коефициентите на отражение и преминаване:

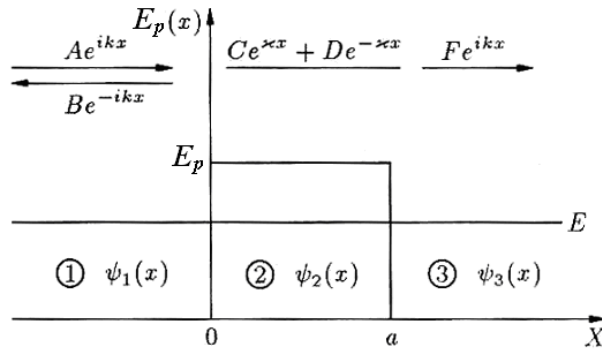
$$R = \left| \frac{B}{A} \right| = 1, \quad T = 0. \quad (10.71)$$

Вълната изцяло се отразява и затова коефициентът на преминаване е нула. Частиците проникват в областта до известно разстояние и се отразяват. Вероятността да ги открием в областта 2 е различна от нула (вж. (10.66)), но потокът е нула.

Преминаваме към потенциална бариера с правоъгълна форма (фиг. 10-9), чийто потенциал е

$$\begin{aligned} E_p(x) &= 0, & x < 0 \\ E_p(x) &= E_p, & 0 \leq x \leq a \\ E_p(x) &= 0, & x > a. \end{aligned} \quad (10.72)$$

Частица с маса m и енергия $E < E_p$ се движи по направление на оста X .



Фиг. 10-9. Потенциална бариера с височина E_p и ширина a : област (1) с $E_p(x)=0$, $x < 0$; област (2) с $E_p(x)=E_p$, $x \leq 0 \leq a$; област (3) с $E_p(x)=0$, $x > a$.

Стационарното уравнение на Шрьодингер (10.4) при $E < U$ има следните решения в съответните области:

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= A \exp(ikx) + B \exp(-ikx), & x < 0, \\ \psi_2(x) &= C \exp(\kappa x) + D \exp(-\kappa x), & 0 \leq x \leq a, \\ \psi_3(x) &= F \exp(ikx), & x > a.\end{aligned}\quad (10.73)$$

Интерпретацията на решенията (фиг. 10-9) е аналогична с тази на задачата с потенциален праг. Част от падащата вълна на Дьо Бройл $A \exp(ikx)$, достигайки до бариерата, се отразява: $B \exp(-ikx)$, а друга част преминава в област 3: $F \exp(ikx)$. Вълновата функция $\psi_2(x)$ описва проникването на квантовата частица в класически забранената област 2.

Изискванията за непрекъснатост на вълновата функция при $x = a$ и $x = 0$ водят до следните гранични условия:

$$\begin{aligned}\psi_1(0) &= \psi_2(0), & \psi_2(a) &= \psi_3(a), \\ \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(0) &= \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(0), & \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(a) &= \frac{\partial}{\partial x} \psi_3(a).\end{aligned}\quad (10.74)$$

Тези условия съвместно с решенията (10.74) водят до система от алгебрични уравнения за коефициентите A, B, C, D и F . Решението на системата може да бъде намерено например в (Л2, § 62).

Амплитудата F на преминалата вълна се изразява чрез амплитудата A на падащата върху бариерата вълна:

$$F = \frac{4i\kappa k \exp(-ika)}{(\kappa + ik)^2 \exp(-\kappa a) - (\kappa - i\kappa)^2 \exp(\kappa a)} A. \quad (10.75)$$

В повечето физични задачи, които се интерпретират с потенциал от вида (10.72), се оказва, че $\kappa a \gg 1$. При това условие (10.75) се редуцира до

$$F = \frac{4i\kappa k \exp(-ika)}{(\kappa + ik)^2 \exp(-\kappa a) - (\kappa - i\kappa)^2 \exp(\kappa a)} A. \quad (10.76)$$

Коефициентът T на преминаване или проницаемостта на бариерата има следния вид:

$$T = \frac{j_{tr}}{j_{in}} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{16k^2 \kappa^2}{(k^2 + \kappa^2)^2} \exp(-2\kappa a) = T_0 \exp(-2\kappa a). \quad (10.77)$$

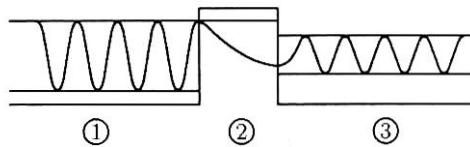
Физическото тълкуване ще направим в следващия параграф. Тук само ще отбележим, че квантовата частица прониква в област 2 и

преминава през нея в област 3, което е недостижимо за една класическа частица.

Тук ще обърнем внимание на едно важно явление в квантовата механика – разсейването. В класическата механика, ако енергията на частицата е по-малка от енергията E_p на нееднородността, тя ще се отрази; ако $E > E_p$, тя ще премине. Убедихме се, че квантовата частица се отразява от всякаква нееднородност и преминава през нея дори ако $E < E_p$ – това е така поради нейните вълнови свойства. С други думи, тя се разсейва от такава нееднородност. Премахвайки от правоъгълна яма и бариера към сферична геометрия, квантовата механика описва моделно разсейването на реална частица от друга частица.

§ 10.5. ТУНЕЛЕН ЕФЕКТ И РАДИОАКТИВНО РАЗПАДАНЕ

В задачата за потенциална бариера с височина E_p а при енергия на квантовата частица $E < E_p$ наблюдаваме ефект, непознат в класическата физика – проникване на частицата през бариерата (фиг. 10-10).



Фиг. 10-10. Тунелен ефект – проникване на квантова частица с енергия E през бариера E_p ($E_p > E$) в област 3, недостъпна за класическа частица.

В повечето практически случаи коефициентът на пропускане $T = |\psi_3|^2 / |\psi_1|^2$ се оказва от вида (10.77):

$$T = T_0 \exp(-2\kappa a) = T_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_0(E_p - E)} a\right), \quad (10.78)$$

където T_0 е величина от порядъка на единица.

Областта $0 < x < a$ на фиг. 10-10 е забранена за класическа частица. Според (10.78) квантова частица с маса m и енергия E , падаща върху потенциална бариера с височина E_p и ширина a , има известна вероятност да проникне в бариерата и да се появи от другата ѝ страна. Частицата като че ли минава през нея по тунел. Премаването на квантовата частица през потенциална бариера с височина, по-голяма от нейната пълна енергия, т.е. през класически забранена област, се нарича тунелен ефект (на фиг. 10-10 е нарисувана реалната част на вълновата функция).

Правоъгълната бариера е идеализация. При реална бариера, например като на фиг. 10-11, постъпваме по следния начин. Кривата на бариерата пресича хоризонталната права на енергията в две точки x_1 и x_2 – $E_p(x_1) = 0$ и $E_p(x_2) = 0$.



Фиг. 10-11. Апроксимация на реална потенциална бариера чрез серия от правоъгълни потенциални бариери.

Апроксимираме бариерата между x_1 и x_2 със серия от правоъгълни бариери с ширина dx и височина $E_p(x)$. Коефициентът на пропускане на правоъгълна бариера с височина $E_p(x)$ и ширина dx е

$$T_i = T_{0_i} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_0(E_{p_i} - E)} dx\right). \quad (10.85)$$

Коефициентът на пропускане на цялата бариера получаваме, като умножим изразите от този вид за всичките участъци dx от x_1 до x_2 . При това степенните показатели се събират и се получава

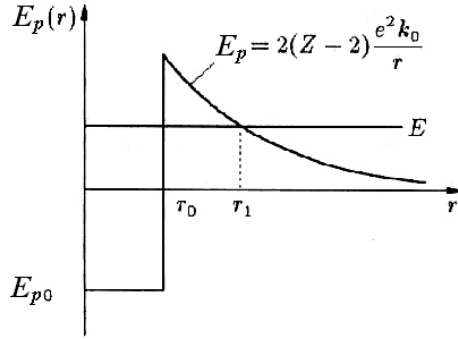
$$T = T_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m_0[E_p(x) - E]} dx\right). \quad (10.86)$$

Ще разгледаме радиоактивно α -разпадане като пример за тунелен ефект. Ако предположим, че една α -частица съществува в майчиното ядро (в действителност тя се образува при разпадането на ядрото), то нейната потенциална енергия може да се представи (фиг. 10-12) в следния вид:

$$E_p(r) = \begin{cases} E_{p_0} = \text{const}, & r < r_0, \\ \frac{2(Z-2)e^2k_0}{r}, & r \geq r_0, \end{cases} \quad (10.87)$$

където Z и r_0 са броят на протоните и радиусът на майчиното ядро, а $k_0 = 1/4\pi\epsilon_0$. Потенциалът $E_p(r)$ при $r < r_0$ се дължи на ядрените сили, а при $r > r_0$ – на електростатичните сили на отблъскване.

Експерименталното изследване на това явление показва, че то е обусловено от вътрешните свойства на ядрото и броят на ядрата, които



Фиг. 10-12. Модел на потенциала на α -частица за процеса на α -разпадане – частицата се намира в потенциалната яма на майчиното ядро, дължаща се на ядрените сили, и при разпадане трябва да преодолее бариерата, образувана от действието на електростатичните сили на отблъскване между нея и дъщерното ядро.

се разпаднат за време dt , е пропорционален на броя на ядрата в момент t и на интервала dt :

$$dN = -\lambda_0 N dt. \quad (10.88)$$

Тук λ_0 е константата на радиоактивното разпадане. След интегриране лесно получаваме закона на Кюри за радиоактивното разпадане:

$$N = N_0 \exp(-\lambda_0 t). \quad (10.89)$$

Константата λ_0 може да се свърже с периода $\tau_{1/2}$ на полуразпадането. По определение той е времето, за което изходното количество се разпада наполовина, т.е. под $\tau_{1/2}$ разбираме времето, за което броят на ядрата намалява два пъти, т.е.

$$N_0 \exp(-\lambda_0 \tau_{1/2}) = \frac{1}{2} N_0 = N_0 \exp(-\ln 2). \quad (10.90)$$

Връзката между λ_0 и $\tau_{1/2}$ е очевидна:

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_0} = \frac{0,693}{\lambda_0}. \quad (10.91)$$

Ще свържем λ_0 и $\tau_{1/2}$ с проникемостта на бариерата. Ако предположим, че за 1 s до бариерата (до точка r_0 на фиг. 10-12) достига n -та част от α -частиците, то от ядрото ще излетят nT -част, където прозрачността T е определена от (10.86). От N ядра за време dt ще се разпаднат Ndt :

$$dN = -nTNdt. \quad (10.92)$$

От сравнението между (10.88) и (10.92) следва

$$\lambda_0 = nT, \quad (10.93)$$

или съгласно (10.86)

$$\lambda_0 = n \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{2m_0(E_p - E)} dr \right) \quad (10.94)$$

(за r_1 вж. фиг. 10-14). За окончателното определяне на λ_0 е необходимо да знаем n . Намирането на n е трудна задача. Но тази величина може да бъде оценена от класически съображения. За 1 s до началото на бариерата ще достигнат $\sim \nu/r_0$ част от α -частиците. И тъй като съгласно релацията на Хайзенберг $m_0 \nu r_0 \approx \hbar$, то

$$n \equiv \frac{\nu}{r_0} = \frac{\hbar}{m_0 r_0^2}. \quad (10.95)$$

Окончателно за константата на радиоактивното α -разпадане получаваме

$$\lambda_0 = \frac{\hbar}{m r_0^2} \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{2m_0(E_p - E)} dr \right). \quad (10.96)$$

Радиоактивното разпадане на урана



има период на полуразпадане $\tau_{1/2} = 0,45 \cdot 10^{10}$ години. Оценката по формула (10.92) за $r_0 = 10^{-14}$ m и височина на бариерата $2(Z-2)e^2 k_0 / r_0 = 26 \text{ MeV}$ дава $\tau_{1/2} = 2,9 \cdot 10^{10}$ години, което, като се има предвид оценъчният характер на (10.91), много добре илюстрира възможностите на теорията.

РЕЗЮМЕ

Вълновата функция на състоянието на квантова частица с маса m в постоянно едномерно потенциално поле $E_p(x) = \text{const} = E_p$ удовлетворява стационарното уравнение на Шрьодингер

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - E_p) \psi(x) = 0.$$

Видът на решението зависи от съотношението между енергията E на частицата и от потенциала E_p на полето. Когато $E > E_p$, решението е суперпозиция от две хармонични функции:

$$\psi_1(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx), \quad k^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - E_p) > 0.$$

Когато $E < E_p$, решението на уравнението е линейна комбинация от експоненциални функции:

$$\psi(x) = A \exp(\kappa x) + B \exp(-\kappa x), \quad \kappa^2 = \frac{2m_0}{\hbar^2} (E_p - E) > 0.$$

Енергията на квантова частица в свободно състояние може да бъде само положителна.

Решенията на уравнението на Шрьодингер за безкрайно дълбока потенциална яма

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

са стоящи вълни на Дьо Бройл.

В сравнение с класическа частица квантовата частица проявява принципно нови качества – енергията ѝ се квантува и минималната ѝ енергия е различна от нула. Квантуването на енергията се проявява при достатъчно малки маси и/или ширина на ямата. Енергетичните нива се определят от квантовото число n :

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Когато квантовата частица пада върху потенциален праг с височина E_p и нейната енергия E е по-малка от E_p , тя прониква в класически забранената област $E < E_p$. Ефектът е чисто квантов и няма класически аналог.

Когато частицата се намира в потенциална яма с крайна дълбочина, към характерните за безкрайно дълбока яма свойства се добавят нови квантови свойства:

- броят на свързаните ѝ състояния зависи от дълбочината E_p и ширината a на ямата, като с увеличаване на E_p и/или a броят им нараства;

- частицата прониква в класически забранената област – вероятността да я открием в тази област е различна от нула.

Когато частицата с енергия E пада върху потенциална бариера с височина E_p и ширина a и $E < E_p$, наблюдаваме ефект, непознат в класическата физика – проникване на частицата през бариерата. Преминването на квантовата частица през потенциална бариера с височина, по-голяма от нейната пълна енергия, т.е. през класически забранена област, се нарича тунелен ефект. С тунелния ефект се обясняват много явления, пред които класическата физика е безсилна – например радиоактивното α -разпадане и т.н.

Системите с едномерен постоянен (в дадена област) потенциал са най-простите модели на реални физични системи, в които се проявяват квантовите свойства на микросвета.

ВЪПРОСИ

1. Как зависи решението на стационарното уравнение на Шрьодингер за частица в постоянно еднородно поле от нейната енергия?
2. Какъв е видът на решението при $E < E_p$ и при $E > E_p$?
3. Защо свободната частица не може да има отрицателна енергия?
4. Какъв е спектърът на енергията на частица в безкрайно дълбока потенциална яма?
5. По какво се различават плътностите на вероятността на квантова и на класическа частица в потенциална яма?
6. Как зависи разстоянието между енергетичните нива от квантовото число n ?
7. Зависи ли дискретният характер на енергията на частицата от нейната маса и от ширината на ямата?
8. По какво се различават броя на състоянията в безкрайно дълбока и крайна яма?
9. По какво се различават плътностите на вероятностите в безкрайно дълбока и крайна яма?
10. Какво се изменя, ако ширината на ямата се намали?
11. Какво се изменя, ако дълбочината на ямата се увеличи?
12. Какво е поведението на квантова и на класическа частица при потенциален праг E_p , ако $E < E_p$?
13. Коефициентите на отражение на квантова и на класическа частица при потенциален праг E_p , ако $E < E_p$ са еднакви, но все пак има разлика – каква е тя?
14. Сравнете поведението на класическа и на квантова частица при преминаване през потенциална бариера.
15. Защо квантова частица преминава през потенциална бариера в случая $E < E_p$?
16. Какво е тунелен ефект?

17. Какво е радиоактивно α -разпадане?
18. Какво е период на полуразпадане?

ЗАДАЧИ

1. Състоянията на частица с маса m в безкрайно дълбока потенциална яма се описват със стоящи вълни на Дьо Бройл, които имат цяло число полувълни по ширината a на ямата. Отчитайки този факт и връзката между дължината λ на вълната и импулса p на частицата, докажете квантуването на енергията ϵ .
2. Две от възможните състояния на частица, чието движение е свободно, но строго ограничено в област с ширина a , се описват със собствените вълнови функции ψ_2 и ψ_3 , показани на фиг. 10-1а. Когато частицата е в състояние ψ_2 , тя има енергия 4 eV. Каква е нейната енергия в състояние ψ_3 ? Каква е най-ниската възможна енергия на частицата в тази система?
3. За електрон в едномерна безкрайно дълбока потенциална яма с ширина 1 Å определете: енергията E на основното състояние, разликата между енергиите $E_2 - E_1$ и дължината на вълната на фотона с енергия $E_2 - E_1$.
4. За частица с маса m в едномерна безкрайно дълбока потенциална яма с ширина a намерете средните стойности на координатата x , на x^2 , на импулса p и на p^2 .
5. Електрони в сноп с линейна плътност 10^{15} електрона/ m^2 , след като се ускорят от потенциална разлика 100 V, падат върху потенциален праг с височина $E_p = 50$ V. Определете падащия, отразения и преминалия ток.
6. Поток от електрони с енергия 2 eV се движи към потенциален праг с височина 20 eV. На какво разстояние от началото на прага плътността на потока на електроните ще намалее e пъти?