

Глава 8

ОПЕРАТОРИ НА ФИЗИЧНИТЕ ВЕЛИЧИНИ

§ 8.1. Оператори на координатите и импулса и техните собствени стойности и собствени функции

Оператори $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{f}(\mathbf{r})$; собствена функция на оператора $\hat{x}$; оператори $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z, \hat{\mathbf{p}}, \hat{p}^2$; собствена функция на оператора $\hat{p}_x$; комутиране на компонентата на импулса и разноименна координата; комутиране на компонентата на импулса и едноименна координата.

210

§ 8.2. Оператори на момента на импулса

Определяне на операторите $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z, \hat{L}^2$; комутиране на компонентите на момента на импулса; комутиране на компонентите с квадрата на момента; декартови компоненти на пълния момент в сферични координати; квадрат на момента в сферични координати.

213

§ 8.3. Собствени функции и собствени стойности на операторите $\hat{L}_z$ и $\hat{L}^2$

Собствени функции и стойности на $\hat{L}_z$; уравнение за собствените функции на $\hat{L}^2$; сферични функции; спектър на момента на импулса; израждане и неговият физичен смисъл.

218

§ 8.4. Векторна интерпретация на момента на импулса

Векторно представяне на момента на импулса; представяне на състояние с $l=2$; буквено означаване на състояния с различно l ; пространствено квантуване и векторни диаграми на момента – диаграми в различни състояния.

220

§ 8.5. Оператори на енергията

Оператор на кинетичната енергия E_k ; оператори на радиалната и на центробежната енергия; оператор на

Хамилтон; хамилтониан на заредена частица в електромагнитно поле; собствени стойности и собствени функции на оператора $\hat{E}_k$ за свободна частица. 223

ДОПЪЛНИТЕЛНА ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев, Л. И., Основы квантовой механики, Москва, Высшая школа, 1963, § 14, 16, 18, 27.
2. Шпольский, Э. В., Атомная физика, т. II, Москва, Наука, 1974, § 6, 21.
3. Dicke, R. H., J. P. Witke, Introduction to Quantum Mechanics, Addison-Wesley Publ. C., Massachusetts, 1973, ch. 6.

§ 8.1. ОПЕРАТОРИ НА КООРДИНАТИТЕ И ИМПУЛСА И ТЕХНИТЕ СОБСТВЕНИ СТОЙНОСТИ И СОБСТВЕНИ ФУНКЦИИ

В § 7.2 доказахме, че операторът на координатата x е самата нейна стойност (7.2). Тъй като със същия успех за това доказателство можем да изберем коя да е от координатите x, y, z , то за съответните оператори записваме

$$\hat{x} = x, \quad \hat{y} = y, \quad \hat{z} = z. \quad (8.1)$$

Преминавайки от проекциите x, y, z към вектор $\mathbf{r}$, за оператора $\hat{\mathbf{r}}$ получаваме

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}. \quad (8.2)$$

И въобще, използвайки доказателството за $\hat{x} = x$ от § 7.2, можем да докажем, че операторът на всяка физична величина f , която е функция само на координатите, т.е. $f = f(x, y, z)$, е самата функция

$$\hat{f} = f(x, y, z). \quad (8.3)$$

За да определим собствената функция на оператора $\hat{x}$, записваме уравнението за собствената функция

$$\hat{x}\psi_{x'}(x) = x'\psi_{x'}(x). \quad (8.4)$$

А сега да си спомним въведената в § 7.6 функция на Дирак. Съгласно свойството (5): $x\delta(x) = 0$, за променливата $x - x'$ можем да запишем

$$(x - x')\delta(x - x') = 0. \quad (8.5)$$

Това уравнение може да се запише и по следния начин:

$$x\delta(x - x') = x'\delta(x - x'). \quad (8.6)$$

След замяната на x с $\hat{x}$ то се редуцира в

$$\hat{x}\delta(x - x') = x'\delta(x - x'). \quad (8.7)$$

От сравняването с (8.4) е очевидно, че собствената функция на оператора $\hat{x} = x$ е делта-функция*:

$$\psi(x) = \delta(x - x'), \quad (8.8)$$

където x' е стойността на координатата x .

За операторите на компонентите на импулса съгласно (7.23) имаме

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}. \quad (8.9)$$

Умножаваме равенствата (8.9) по съответните единични вектори $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0$ и ги събираме. В резултат получаваме оператора на импулса

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \left(\mathbf{x}^0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}^0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}^0 \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \nabla. \quad (8.10)$$

Повдигайки (8.9) на квадрат и сумирайки, получаваме оператора $\hat{p}^2$:

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\hbar^2 \nabla^2 \equiv -\hbar^2 \Delta. \quad (8.11)$$

Тук $\Delta \equiv \nabla^2$ е операторът на Лаплас (Laplace).

Да запишем уравнението за собствената функция $\psi_{p_x}(x)$ на оператора $\hat{p}_x$:

$$\begin{aligned} \hat{p}_x \psi_{p_x}(x) &= p_x \psi_{p_x}(x), \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_{p_x}(x) &= p_x \psi_{p_x}(x). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Тук ще отбележим, че в квантовата механика е прието операторите (8.9) и (8.10) да се означават съответно с $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ и $\hat{\mathbf{p}}$. Строго

*Тази собствена функция на оператора $\hat{x}$ е в координатно представяне, т.е. в собствено (вж. § 7.7). Собствената функция на един оператор в собствено представяне е винаги δ -функция.

погледнато, трябва да пишем операторите на $\hat{\mathbf{P}}$ и $\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z$, т.е. операторите на обобщените импулси, канонично спрегнати на координатите $\mathbf{r}$ и x, y, z . Така е прието, тъй като в декартови координати обобщеният импулс $\mathbf{P}$ е равен на механичния $\mathbf{p}$. Тази забележка ще помогне на по-любопытните читатели да не се смущават от вида на оператора на Хамилтон за заредена частица в електромагнитно поле (вж. (8.60)).

Функцията на свободна частица с импулс p_x

$$\psi = \psi_{p_x}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_x x\right) \quad (8.13)$$

удовлетворява уравнението. Това лесно можем да проверим, като заместим (8.13) в (8.12). Следователно тя се явява собствена функция на оператора $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$. При това p_x може да приема произволна стойност от интервала

$$-\infty < p_x < +\infty. \quad (8.14)$$

Тези стойности са собствени стойности на оператора $\hat{p}_x$.

Аналогично се доказва, че *собствената функция на оператора* $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$ е

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}\right). \quad (8.15)$$

Ще определим комутаторите на разгледаните дотук оператори. Две произволни координати, например x и y , комутират помежду си, т.е. комутаторът им $[\hat{x}, \hat{y}]$ е нула. Действително

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{y}] \psi &= \hat{x} \hat{y} \psi - \hat{y} \hat{x} \psi = \hat{x}(\hat{y} \psi) - \hat{y}(\hat{x} \psi) = x y \psi - y x \psi = 0, \\ [\hat{x}, \hat{y}] &= \hat{x} \hat{y} - \hat{y} \hat{x} = 0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Операторите на кои да са две компоненти на импулса комутират, защото са независими и редът на диференцирането може да бъде сменен:

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = \hat{p}_x \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{p}_x = 0. \quad (8.17)$$

Комутират ли операторите на координатите и импулсите? Най-напред да разгледаме комутатора на компонента на импулса с разноименна координата:

$$[\hat{y}, \hat{p}_x]\psi = \hat{y}(\hat{p}_x\psi) - \hat{p}_x(\hat{y}\psi) = y\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(y\psi) = 0, \quad (8.18)$$

$$[\hat{y}, \hat{p}_x] = \hat{y}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{y} = 0.$$

Компонентите на импулса комутират с разноименни координати.

А сега да разгледаме компонентата $\hat{p}_x$ на импулса и съответната ѝ координата x . Действайки с оператора на комутатора $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ върху функцията ψ , получаваме

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi = \hat{x}(\hat{p}_x\psi) - \hat{p}_x(\hat{x}\psi) = -i\hbar x\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) = i\hbar\psi, \quad (8.19a)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar.$$

Същото се отнася за кои да са две едноименни координати и компоненти на импулса:

$$[\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar, \quad (8.19б)$$

$$[\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar.$$

Компонентите на импулса не комутират със съответните си координати.

§ 8.2. ОПЕРАТОРИ НА МОМЕНТА НА ИМПУЛСА

Познаването на операторите на координатите и импулсите е от съществено значение за определянето на оператора на произволна физична величина. Достатъчно е величината да бъде изразена като функция на координатите и на компонентите на импулса и последните се заменят с техните оператори. Тогава за момента на импулса* $\mathbf{L}$ на една частица и за неговите компоненти съгласно (8.9) получаваме следните оператори:

*Много често в литературата на руски и на български величината $\mathbf{L}$ се нарича ъглов момент, което по всяка вероятност произтича от грешния превод на английското angular momentum (ъглов импулс); момент на английски е moment, а момент на импулса moment of a momentum. Сивухин смята, че ъгловият момент се употребява само в квантовата механика (вж. Д. В. Сивухин, Общий курс физики, том V-1, Атомная ядерная физика, ч. I Атомная физика, Москва, Наука, 1986, с. 192). И в квантовата механика употребата на ъглов момент (както и на орбитален ъглов момент и на спинов ъглов момент) е некоректна. В същото време употребата на понятията орбитален момент и спинов момент като съкращения съответно на орбиталния момент на импулса и на спиновия момент на импулса е напълно коректна. Последните две величини са вид моменти на импулса или вид ъглови импулси, но не и вид ъглови моменти.

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x &= y\hat{p}_z - z\hat{p}_y = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \\
\hat{\mathbf{L}} &= \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla, \quad \hat{L}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\
\hat{L}_z &= x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).
\end{aligned} \tag{8.20}$$

Тогава за квадрата на момента на импулса получаваме

$$\begin{aligned}
\hat{L}^2 &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \\
&= -\hbar^2 \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \hbar^2 \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 - \hbar^2 \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)^2.
\end{aligned} \tag{8.21}$$

Да видим какви са комутиращите свойства на получените оператори. Да вземем операторите на две от компонентите, например $\hat{L}_y$ и $\hat{L}_x$. За техния комутатор съгласно (8.20) получаваме

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_y, \hat{L}_x] &= (z\hat{p}_x - x\hat{p}_z)(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) - (x\hat{p}_y - y\hat{p}_x)(z\hat{p}_x - x\hat{p}_z) = \\
&= z\hat{p}_y(\hat{p}_x x - x\hat{p}_x) + y\hat{p}_z(x\hat{p}_x - \hat{p}_x x) = \\
&= z\hat{p}_y(-i\hbar) + y\hat{p}_z(-i\hbar) = i\hbar(-z\hat{p}_y + y\hat{p}_z) = i\hbar\hat{L}_x.
\end{aligned} \tag{8.22}$$

Тук използвахме комутатора (8.19a) $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$. По аналогичен начин получаваме и комутатори на другите компоненти на момента

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i\hbar\hat{L}_x, \\
[\hat{L}_z, \hat{L}_x] &= i\hbar\hat{L}_y, \\
[\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i\hbar\hat{L}_z.
\end{aligned} \tag{8.23}$$

Употребата на ъглов импулс се дължи на аналогията между постъпателното и въртливото движение (вж. табл. 5.1 в Иванов С. Т., Л. Трайков, Обща физика, том I, София, Херон прес, 2010, § 5). Както имаме скорост – ъглова скорост, ускорение – ъглово ускорение, линейна честота – ъглова честота, така по аналогия имаме импулс – ъглов импулс, тъй като моментът на импулса $\mathbf{L}$ във въртливото движение играе същата роля, както импулсът $\mathbf{p}$ в постъпателното (сравни основните закони на постъпателното движение $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ и на въртливото $\mathbf{N} = d\mathbf{L}/dt$).

В съчетанието „ъглов момент“ няма никаква информация. В квантовата механика придобилото гражданственост понятие „ъглов момент“ не е ъгловата част на момента на импулса, а целият импулс. Момент на импулса има само тогава, когато между радиус-вектора и импулса на тялото съществува ъгъл – $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. В този смисъл моментът на импулса (винаги) има ъглов характер. Така че понятието „ъглов момент“ е грешно не само езиково, но и логически.

Операторите на компонентите на момента на импулса не комутират. Трите комутаторни релации могат да бъдат представени във векторен вид

$$i\hbar\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}}, \quad (8.24a)$$

или в матрична форма

$$i\hbar(\mathbf{x}^0\hat{L}_x + \mathbf{y}^0\hat{L}_y + \mathbf{z}^0\hat{L}_z) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}^0 & \mathbf{y}^0 & \mathbf{z}^0 \\ \hat{L}_x & \hat{L}_y & \hat{L}_z \\ \hat{L}_x & \hat{L}_y & \hat{L}_z \end{vmatrix}. \quad (8.24b)$$

За определяне на комутаторите $[\hat{L}_i, \hat{L}^2]$ ($i=x, y, z$) ще използваме (8.23).

Умножаваме последното равенство отляво и отляво с оператора $\hat{L}_y$:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x\hat{L}_y^2 &= \hat{L}_y\hat{L}_x\hat{L}_y + i\hbar\hat{L}_z\hat{L}_y, \\ \hat{L}_y^2\hat{L}_x &= \hat{L}_y\hat{L}_x\hat{L}_y - i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_z. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Изваждаме ги почленно и получаваме

$$\hat{L}_x\hat{L}_y^2 - \hat{L}_y^2\hat{L}_x = i\hbar(\hat{L}_z\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_z). \quad (8.26)$$

Аналогично от втория комутатор на (8.23) след умножаване по $\hat{L}_x$ получаваме

$$\hat{L}_x\hat{L}_z^2 - \hat{L}_z^2\hat{L}_x = -i\hbar(\hat{L}_z\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_z). \quad (8.27)$$

Събираме (8.26) и (8.27) и отчитаме, че $\hat{L}_x\hat{L}_x^2 - \hat{L}_x^2\hat{L}_x = 0$:

$$\hat{L}_x\hat{L}^2 - \hat{L}^2\hat{L}_x = 0. \quad (8.28)$$

Избирайки другите два комутатора от (8.23), получаваме аналогични изрази за $\hat{L}_y$ и $\hat{L}_z$:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}^2] = 0, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}^2] = 0, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}^2] = 0. \quad (8.29)$$

Операторите на компонентите на момента на импулса комутират с оператора на квадрата на момента.

Моментът на импулса като интеграл на движението заема важно място в задачите с централни сили. Оттук и неговото значение при анализа на атомите и атомните системи, в които действат именно

такива сили. Много често са необходими операторите $\hat{L}_y$, $\hat{L}_x$ и $\hat{L}_z$, както и квадратът на момента на импулса $\hat{L}^2$ в сферични координати.

За получаване на тези оператори най-напред изразяваме връзката на декартовите със сферичните (вж. (3.55) и фиг. 3-6) и на сферичните с декартовите координати:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta, \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, & \cos \theta &= \frac{z}{r}, & \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

С помощта на тези релации лесно можем да изразим производните на сферичните координати по декартовите:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \sin \theta \cos \varphi, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \theta \sin \varphi, & \frac{\partial r}{\partial z} &= \cos \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\cos \varphi \cos \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\sin \varphi \cos \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sin \theta}{r}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= +\frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Сега вече лесно можем да получим операторите $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \\ &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \varphi \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Заместваме в изразите за операторите на компонентите на момента на импулса (8.20) и получаваме техния вид в сферични координати:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

По аналогичен начин, замествайки (8.33) в (8.21), бихме могли да получим и оператора $\hat{L}^2$. Ние ще го получим по друг начин, като използваме два *помощни оператора* $\hat{L}_+$ и $\hat{L}_-$:

$$\begin{aligned}\hat{L}_+ &\equiv \hat{L}_x + i\hat{L}_y = \hbar e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \hat{L}_- &\equiv \hat{L}_x - i\hat{L}_y = \hbar e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).\end{aligned}\tag{8.34}$$

Лесно получаваме произведението на двата оператора:

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- = (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)(\hat{L}_x - i\hat{L}_y) = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - i[\hat{L}_x, \hat{L}_y].\tag{8.35}$$

Изразяваме оператора $\hat{L}^2$ чрез оператора $\hat{L}_+ \hat{L}_-$ (и чрез $\hat{L}_z$):

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z.\tag{8.36}$$

А сега получаваме произведението $\hat{L}_+ \hat{L}_-$ на помощните оператори в явен вид. За целта използваме (8.36) и внимателно диференцираме, като точно спазваме реда на операторите в произведенията:

$$\begin{aligned}\hat{L}_+ \hat{L}_- &= \hbar^2 e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) = \\ &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).\end{aligned}\tag{8.37}$$

Заместваме $\hat{L}_z$ от (8.33) и (8.37) в (8.36) и получаваме оператора на момента на импулса в сферични координати:

$$\begin{aligned}\hat{L}^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) = \\ &= -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}.\end{aligned}\tag{8.38}$$

Операторът

$$\hat{\Lambda} = -\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}\tag{8.39}$$

се нарича оператор на Лъожандър (Legendre). Често вместо $\hat{\Lambda}$ се използва операторът $\Delta_{\theta, \varphi} \equiv \nabla_{\theta, \varphi}^2 = -\hat{\Lambda}$, наречен лапласиан върху сфера или ъглов лапласиан:

$$\hat{L}^2 = \hbar^2 \hat{\Lambda} = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}. \quad (8.40)$$

Операторът $\Delta_{\theta, \varphi}$ е ъгловата част на оператора на Лаплас Δ в сферична координатна система:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} = \Delta_r + \frac{\Delta_{\theta, \varphi}}{r^2}. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Операторът Δ_r се нарича радиален лапласиан.

§ 8.3. СОБСТВЕНИ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕНИ СТОЙНОСТИ НА ОПЕРАТОРИТЕ $\hat{L}_z$ И $\hat{L}^2$

Ще започнем с компонентата L_z на момента на импулса. Уравнението за собствените функции на оператора $\hat{L}_z$ в сферични координати има следния вид:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = L_z \psi. \quad (8.42)$$

Решението му е

$$\psi(\varphi) = A \exp \left(\frac{iL_z}{\hbar} \varphi \right). \quad (8.43)$$

От условието за еднозначност (вж. § 6.2) $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$ получаваме

$$A \exp \left(\frac{iL_z}{\hbar} \varphi \right) = A \exp \left[\frac{iL_z}{\hbar} (\varphi + 2\pi) \right], \quad (8.44a)$$

или

$$\exp \left(\frac{iL_z}{\hbar} 2\pi \right) = 1. \quad (8.44b)$$

Стойностите, при които се удовлетворява това условие, са *собствените стойности на компонентата L_z на момента на импулса*:

$$L_z = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.45)$$

Компонентата на момента на импулса върху оста Z се квантува и може да приема само дискретни стойности, равни на цяло число $\hbar$. Числото m се нарича магнитно квантово число. Отчитайки тези стойности в (8.42), за собствената функция имаме

$$\psi(\varphi) = A \exp(im\varphi). \quad (8.46)$$

За окончателното решение на задачата остана да определим константата A от условието за нормировка:

$$\int_0^{2\pi} |\psi(\varphi)|^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} A^2 |e^{im\varphi}|^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi A^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (8.47)$$

Нормираните собствени функции на оператора $\hat{L}_z$ приемат вида

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi). \quad (8.48)$$

За собствените функции на оператора на квадрата на момента на импулса $\hat{L}^2$, като отчетем (8.40), получаваме уравнението

$$\hat{L} \psi = \frac{L^2}{\hbar^2} \psi. \quad (8.49)$$

Явният вид на това уравнение е следният:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{L^2}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (8.50)$$

Това уравнение има решение, удовлетворяващо свойството за ограниченост на една вълнова функция (вж. § 6.2) само при определени стойности на $L/\hbar$, именно:

$$\frac{L^2}{\hbar^2} = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.51)$$

а решенията му са т. нар. сферични функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ (вж. например [Л1, прил. XV]:

$$\psi_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8.52)$$

Сферичните функции са собствени функции на оператора $\hat{L}^2$, а условието (8.51) определя собствените му стойности:

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (8.53)$$

Числото l се нарича орбитално квантово число. Спектърът на квадрата на момента L^2 , както и този на проекцията му L_z , е дискретен. Операторите $\hat{L}_z$ и $\hat{L}^2$ комутират (8.29) и имат общи собствени функции, т.е.

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8.54)$$

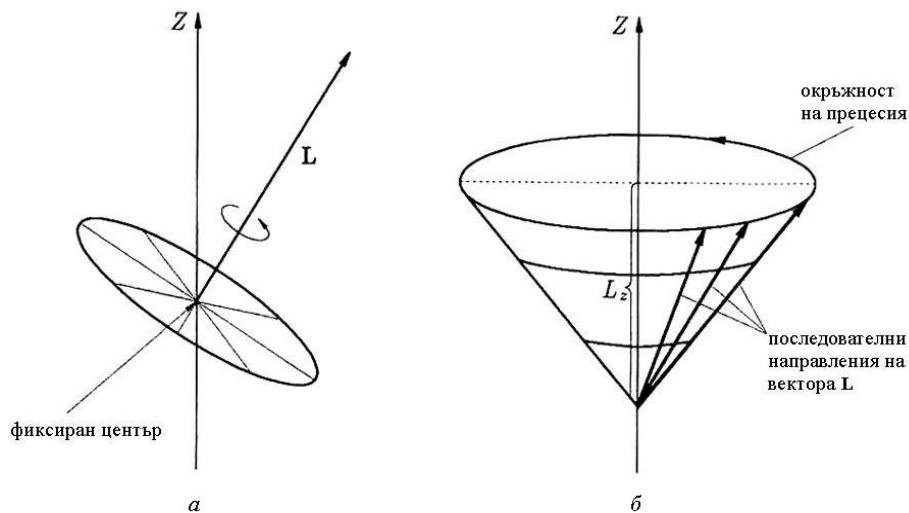
Ако фиксираме квадрата на момента $L^2 = l(l+1)\hbar^2$, т.е. числото l , компонентата L_z може да приеме $2l+1$ стойности:

$$L_z = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (8.55)$$

Числото m се нарича магнитно или азимутално квантово число. На състояние с фиксиран момент на импулса отговарят $2l+1$ стойности на проекцията му и съответно $2l+1$ вълнови функции, различаващи се по m . Спектърът на оператора $\hat{L}^2$ е $(2l+1)$ -кратно изроден. Физически това означава, че векторът на момента с фиксирана стойност, т.е. с фиксирано число l , може да има $2l+1$ ориентации в пространството.

§ 8.4. ВЕКТОРНА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НА МОМЕНТА НА ИМПУЛСА

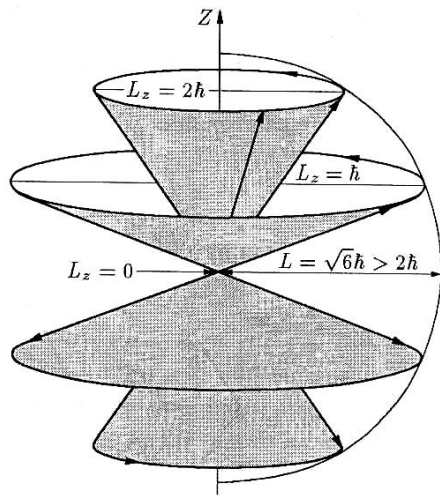
Моментът на импулса е вектор. Дължината на този вектор се определя чрез L^2 . Имайки експериментално измерената стойност на L^2 , можем да измерим коя да е от декартовите компоненти на $\mathbf{L}$. Да допуснем, че разглеждаме състояние с определени стойности на L^2 и L_z (съответните на тези величини оператори комутират, вж. (8.29)). Стойностите на другите компоненти на момента L_x и L_y обаче са неопределени. Съответните им оператори не комутират (8.23). С други думи, при едновременни експериментални измервания получаваме фиксирани стойности за L^2 и L_z и различни стойности за L_x и L_y . Такава ситуация, разбира се, е коренно различна от тази в класическата механика – например моментът на импулса на въртящо се в една равнина колело с неподвижен център (фиг. 8-1а) има стойности както на самия вектор, така и на трите декартови компоненти. Може ли класическият модел да ни послужи за представяне на квантовомеханичния момент с фиксирани L^2 и L_z и неопределени L_x и L_y ? Ако колелото, а заедно с него и векторът $\mathbf{L}$ прецесират около оста Z , стойностите на L^2 и L_z ще са постоянни, но не и тези на L_x и L_y .



Фиг. 8-1. Векторно представяне на момента на импулса: а) момент на импулса $\mathbf{L}$ на колело, въртящо се в равнина около неподвижен център; б) класическо векторно представяне на квантовомеханичен момент на импулса – векторът $\mathbf{L}$ прецесира около оста Z .

Моделът на момента на импулса като вектор с постоянна величина, прецесиращ около оста Z и имащ постоянна L_z -компонента и неопределени L_x - и L_y -компоненти (фиг. 8-1б), е добра нагледна представа за квантовомеханичния момент на импулса. Обаче става дума за представа, а не за действителна прецесия на вектора $\mathbf{L}$. Той лежи върху конуса на прецесия и една друга полезна представа е, че е размазан върху него.

Векторно представяне на състояние с $l = 2$ е показано на фиг. 8-2. Ще отбележим, че сме принудени да приемем и прецесията на вектора с нулева Z -проекция по причини, аналогични на другите ориентации на $\mathbf{L}$.



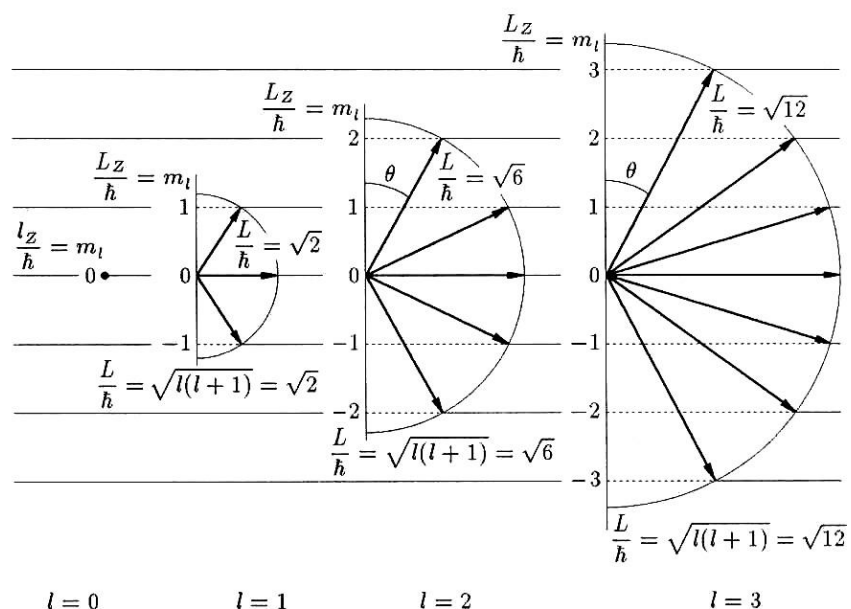
Фиг. 8-2. Векторно представяне на момента на импулса в състояние с $l = 2$. При всички възможни ориентации, включително и тази с нулева L_z -компонента, векторът $\mathbf{L}$ прецесира около оста Z .

В § 8.3 установихме, че стойността на L се определя от орбитално квантово число l . В квантовата механика състоянията на една частица с определен момент на импулса, т.е. с фиксирано l , се означават освен числено и буквено. Състоянията с орбитални моменти, техните буквени означения и възможните проекции са дадени на табл. 8-1.

Таблица 8-1.

Стойности на орбиталното квантово число l	0	1	2	3	4
Буквено означение	s	p	d	f	g
Стойности на $L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$	0	$\hbar\sqrt{2}$	$\hbar\sqrt{6}$	$\hbar\sqrt{12}$	$\hbar\sqrt{20}$
Стойности на магнитното квантово число m	0	$0, \pm 1$	$0, \pm 1, \pm 2$	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$
Стойности на $L_z = m\hbar$	0	$0, \pm \hbar$	$0, \pm \hbar, \pm 2\hbar$	$0, \pm \hbar, \pm 2\hbar, \pm 3\hbar$	$0, \pm \hbar, \pm 2\hbar, \pm 3\hbar, \pm 4\hbar$
Кратност на израждането	0	3	5	7	9

При фиксирано число l , т.е. при фиксирана стойност на вектора на орбиталния момент, той може да има само $2l+1$ ориентации в пространството. В този случай се говори за *пространствено квантуване*. Нагледно ориентациите се представят чрез векторни диаграми. За s -, p -, d - и f -състоянията на частица тези диаграми са показани на фиг. 8-3. За

Фиг. 8-3. Векторни диаграми на момента на импулса в s -, p -, d - и f -състояния.

построяването на векторната диаграма например на p -състоянието от началото O на оста Z описваме полуокръжност с радиус, равен на $L = \hbar\sqrt{l(l+1)} = \hbar\sqrt{2}$, и построяваме трите ориентации на вектора $\mathbf{L}$, така че проекциите му върху оста Z да са съответно $-\hbar$, 0 и $\hbar$. Напълно аналогично са построени и диаграмите на останалите състояния.

Ъгълът, който включва векторът $\mathbf{L}$ с оста Z , се определя от квантовите числа l и m :

$$\cos\theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m\hbar}{\hbar\sqrt{l(l+1)}} = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}. \quad (8.56)$$

За дадена стойност на L , т.е. на l , максималната стойност на m е l . Но $m = l < \sqrt{l(l+1)}$. Следователно векторът на момента на импулса никога не може да бъде ориентиран по оста Z .

§ 8.5. ОПЕРАТОРИ НА ЕНЕРГИЯТА

Най-напред да определим оператора на кинетичната енергия на частица с маса m_0 . Заменяйки в класическия израз за кинетичната енергия E_k компонентите на импулса с техните оператори, получаваме

$$\hat{E}_k = \frac{1}{2m_0}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2. \quad (8.57a)$$

Или чрез оператора на Лаплас операторът $\hat{E}_k$ се изразява така:

$$\hat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta. \quad (8.57b)$$

В сферични координати, като вземем предвид (8.41), операторът на кинетичната енергия получава следния вид:

$$\hat{E}_k = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} = \hat{E}_{k_r} + \frac{\hat{L}^2}{2m_0r^2}, \quad (8.58)$$

т.е. представя се чрез оператора на радиалната кинетична енергия и оператора на квадрата на момента на импулса. Разделянето на кинетичната енергия в квантовата механика на радиална E_{k_r} и центробежна $L^2/2m_0r^2$ напълно съответства на двете части на

кинетичната енергия в класическата механика. В квантовата механика е прието центробежната енергия $L^2 / 2m_0 r^2$ да се нарича *ротационна*.

Операторът на пълната енергия е сума от оператора $\hat{E}_k$ и оператора на потенциалната енергия E_p . Тъй като E_p зависи само от координатите, операторът ѝ е самата функция E_p . Следователно операторът на Хамилтон $\hat{H}$ (на пълната енергия) в декартови и сферични координати придобива съответно вида

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{E}_k + E_p(x, y, z) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{r^2} \Delta + E_p(x, y, z), \\ \hat{H} &= \hat{E}_{k_r} + \frac{\hat{L}^2}{2m_0 r^2} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} + E_p(r).\end{aligned}\quad (8.59)$$

Важно място в квантовата механика заема операторът на пълната енергия на заредена частица в електромагнитно поле. Ще го получим от класическия ѝ хамилтониан $H = (\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 / 2m_0 + e\Phi$, като заменим физичните величини със съответните им оператори. Спомняйки си коментара за $\hat{\mathbf{p}}$ и $\hat{\mathbf{P}}$ в § 8.1, за оператора $\hat{\mathbf{P}}$ съгласно (8.10) записваме $\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$. Векторният потенциал $\mathbf{A}$ е функция на координатите и следователно $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$. За оператора на Хамилтон $\hat{H}$ можем да запишем

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_0} (\hat{\mathbf{P}} - e\mathbf{A})^2 + e\Phi = \frac{1}{2m_0} (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A})^2 + e\Phi. \quad (8.60)$$

Ще определим собствените функции и стойности на оператора на кинетичната енергия на свободна частица при едномерно движение:

$$\hat{E}_k \psi = E_k \phi \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p_x^2}{2m_0} \psi. \quad (8.61)$$

Решението е функцията $\psi_{p_x}(x)$ (8.13) и собствените стойности на кинетичната енергията $p_x^2 / 2m$ образуват непрекъснат спектър от $-\infty$ до $+\infty$.

При свободно движение в пространството операторът $\hat{E}_k$ има вида (8.57) и уравнението за собствените функции

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi = \frac{p^2}{2m_0} \psi. \quad (8.62)$$

има решението $\psi_p(\mathbf{r})$ (8.15) и собствените стойности на енергията образуват непрекъснат спектър от $-\infty$ до $+\infty$.

За интервал от време Δt енергията е неопределена и в този случай принципът за неопределеност има следния вид (Иванов С. Т., Обща физика, том II, Квантова физика, § 83, Херон прес, 2010, София):

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar / 2. \quad (8.63)$$

Тази форма на принципа за неопределеност е еквивалентна на твърдението, че енергията на обекта е неопределена с големина ΔE в течение на интервал от време Δt .

РЕЗЮМЕ

Състоянието на една система в квантовата механика се описва с вълнова функция, а всяка физична величина – с оператор (табл. 8-2). Стойностите на величината, които се измерват в експеримента, са собствени стойности на нейния оператор, а вълновите функции на състоянията са собствени функции на оператора или линейна комбинация от тях. В собствено състояние при измерване получаваме определена собствена стойност на величината, а в несобствено – различни стойности, но винаги една от собствените стойности. Две величини са съвместими, т.е. едновременно измерими, ако техните оператори комутират.

Таблица 8-2. Основни оператори в квантовата механика и техните собствени функции и собствени стойности

Физична величина	Оператор	Собствена функция	Собствена стойност
Координата x	x	$\psi(x) = \delta(x - x')$	$-\infty < x < \infty$
Радиус-вектор $\mathbf{r}$	$\mathbf{r}$	$\psi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$	$0 < \mathbf{r} < \infty$
x -компонента на импулса p_x	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$	$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_x x\right)$	$-\infty < p_x < \infty$
Импулс $\mathbf{p}$	$-i\hbar \nabla$	$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{r}\right)$	$0 < \mathbf{p} < \infty$
z -компонента на момента на импулса L_z	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$	$\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi)$	$L_z = m\hbar$
Квадрат на момента на импулса L^2	$\hbar^2 \hat{\Lambda} = -\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}$	$\psi(\theta, \varphi) = Y_{l,m}(\theta, \varphi)$	$L^2 = \hbar^2 l(l+1)$
Кинетична енергия E_k	$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta$	$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{r}\right)$	$0 < \frac{p^2}{2m_0} < \infty$
Пълна енергия $E = H$	$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + E_p(r)$	ψ и E зависят от вида на $E_p(r)$	

Тази таблица сумира резултатите от всички параграфи на главата за операторите, собствените им функции и собствените им стойности. Резюме на останалите въпроси ще изложим по-долу.

Операторите на кои да са две компоненти на импулса комутират:

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = \hat{p}_x \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{p}_x = 0.$$

Компонентите на импулса комутират с разноименни координати:

$$[x, \hat{p}_z] = [y, \hat{p}_x] = [z, \hat{p}_y] = 0.$$

Компонентите на импулса не комутират със съответните си координати;

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar.$$

Операторите на компонентите на момента на импулса не комутират

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{L}} = i\hbar \hat{\mathbf{L}} \quad \Rightarrow \quad & [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x, \\ & [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y, \\ & [\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z. \end{aligned}$$

Операторите на компонентите на момента на импулса комутират с оператора на квадрата на момента:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}^2] = 0, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}^2] = 0, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}^2] = 0.$$

Стойността на момента на импулса се определя от числото l , което се нарича орбитално квантово число. Числото m , което определя големината на проекцията L_z на момента $\mathbf{L}$, се нарича азимутално или магнитно квантово число. В квантовата механика състоянията на една частица с определен момент на импулса, т.е. с фиксирано l , се означават освен числено и буквено: $l=0 \Rightarrow s$, $l=1 \Rightarrow p$, $l=2 \Rightarrow d$, $l=3 \Rightarrow f$, $l=4 \Rightarrow g$ и др.

При фиксирано число l , т.е. при фиксирана стойност на вектора на орбиталния момент, той може да има $2l+1$ ориентации в пространството. В този случай се говори за пространствено квантуване.

За енергията и времето принципът за неопределеност има следния вид:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2.$$

Това е еквивалентно на твърдението, че енергията на обекта е неопределена с големина ΔE в течение на интервал от време Δt . В

малки интервали неопределеността на енергията е голяма, но намалява с увеличаване на интервала от време,

ВЪПРОСИ

1. Какво представлява комутаторът на два оператора?
2. Комутират ли операторите: а) x и $\hat{p}_x$; б) z и $\hat{p}_y$; в) x и y ; г) $\hat{p}_x$ и $\hat{p}_y$?
3. Кои са собствените функции на оператора $\hat{x}$?
4. Кои са собствените функции на оператора $\hat{p}_x$?
5. Как се получават операторите на компонентите на момента на импулса?
6. Защо трябва да използваме сферичните координати, а не работим с „лесните“ декартови координати?
7. Защо не можем класически да представим квантов момент на импулса?
8. Как си представяме квантов момент на импулса?
9. Комутират ли операторите на:
 - а) компонентите на момента на импулса?
 - б) компонентите на момента с оператора на квадрата на момента?
10. Кои са собствените функции на оператора $\hat{L}_z$?
11. Кои са собствените функции на оператора $\hat{L}^2$?
12. Колко проекции има един момент на импулса?
13. Кое квантова число е орбитално и какво изразява то?
14. Кое квантова число е магнитно и какво изразява то?
15. Какво означава буквеното означение на проекцията L_z ?
16. Какво е пространствено квантуване?
17. Как се построява векторна диаграма?
18. При фиксирана стойност на квадрата на момента на импулса L^2 (фиксирано l) компонентата L_z има $2l + 1$ стойности. Какво означава това физически?
19. Как се получават операторите на енергията на: а) свободна частица; б) заредена частица в електромагнитно поле?
20. Определена ли е енергията за даден времеви интервал?

ЗАДАЧИ

1. Докажете, че операторът на компонентата L_y на момента на импулса комутира с оператора на квадрата L^2 на момента на импулса: $\hat{L}_y \hat{L}^2 - \hat{L}^2 \hat{L}_y = 0$.

2. Като знаете връзката между декартовите и сферичните координати $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, докажете, че

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

3. Като знаете връзката между декартовите и сферичните координати

(8.30), докажете, че $\hat{L}_x = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$

$$\hat{L}_y = -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

4. Като знаете $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ и $\hat{L}_z$ в сферични координати (8.33), докажете,

без да използвате помощните оператори $\hat{L}_+$ и $\hat{L}_-$, че

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}.$$