

Глава 6

ВЪЛНОВА ФУНКЦИЯ

- § 6.1. Статистическо тълкуване на вълните на Дьо Бройл
Особености на вълната на Дьо Бройл; тълкуване на Шрьодингер; вълна, образувана от частици; тълкуване на Макс Борн; необходимост от вълнова функция. 158
- § 6.2. Вълнова функция
Вероятност и вълнова функция; вълнова функция на свободна частица; нормиране; плътност на вероятността; вероятност; свойства на вълновата функция; многочастична вълнова функция и вероятност; случай на невзаимодействащи си частици. 160
- § 6.3. Съотношение за неопределеност
Точност на измерването; двойственост и точност на координатите и импулса; физика на неопределеността им, дифракция на електрони от един процеп; оценка за неопределеност; точно неравенство; принцип за неопределеност и точност на една от величините; макротела и неопределеност; граница между микро- и макротела; обобщение. 164
- § 6.4. Състояние и функция на състоянието
Динамични променливи; състояние; класическо състояние; изисквания; принцип за неопределеност и състояние в квантовата механика; функция на състоянието – изисквания; състояние и вероятност; вероятност в класическата и квантовата физика; класически понятия и описание на микрообекти; пълен набор. 169
- § 6.5. Измерване на физичните величини, собствени състояния и собствени стойности
Състояние в двете механики; измерване и възпроизводимост; измерване чрез процеп и поглеждане; собствено състояние,

собствени стойности и собствени функции; несобствено състояние: спектър на физичната величина; израждане. 173

§ 6.6. Принцип на суперпозицията

Суперпозиция при преминаване на електроните през два отвора; принцип на суперпозицията; физичен смисъл на коефициентите C_k . 176

ДОПЪЛНИТЕЛНА ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев, Д. И., Основы квантовой механики, Москва, Высшая школа, 1963, § 8, 12.
2. Greiner W., Quantum Mechanics, An introduction, Springer-Verlag, 1989, § 3.1, 3.2, 3.3.
3. Райчев, П., Елементарно въведение в квантовата физика, София, Техника, 1968, §5.
4. Матвеев, А. Н., Атомная физика, Москва, Высшая школа, 1989, § 16, 21, 22.

§ 6.1. СТАТИСТИЧЕСКО ТЪЛКУВАНЕ НА ВЪЛНИТЕ НА ДЪО БРОЙЛ

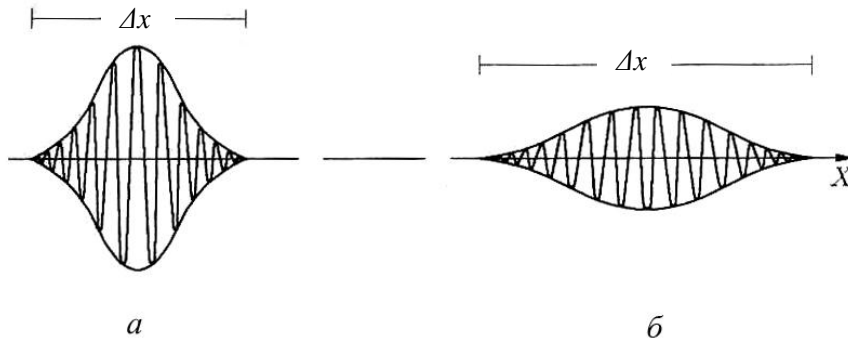
От опитите с два отвора се убедихме, че електронът е свързан с вълнов процес. Вълновите свойства на електрона се проявяват в това, че на неговото движение влияят и двата отвора. В резултат на това наблюдаваме дифракционната картина. Би било невярно обаче да отъждествим електрона с някаква вълна. Ако това беше така, отделният електрон веднага би дал цялата дифракционна картина, макар и бледа.

Но при опита отделният електрон попада в определена (една) точка на фотоплаката като обикновена частица. Разликата между електрон и частица е, че местата на попадане върху фотоплаката се определят от съвсем различни закони (за частици (4.24) и фиг. 4-11, а за електрони (4.25) и (4.26) и фиг. 4-12). Поведението на частицата се проявява и когато е сама, и когато са много частици. Когато електронът е един, той се фиксира като частица, а вълновите му свойства се проявяват само когато има много електрони (включително много пъти по един).

Вълновите свойства на електрона се обясняват напълно с вълната на Дьо Бройл. Но тази вълна не се проявява в експеримента с един-единствен електрон. Тогава как да тълкуваме вълната?

Едно от първите тълкувания принадлежи на Шрьодингер: микрочастицата се състои от група (пакет) вълни, локализирани в пространството. Ако вземем вълни на величината A с различни вълнови числа от $k - \Delta k$ до $k + \Delta k$ и ги сумираме, ще получим вълнов пакет R_k , центърът на който се движи подобно на частица, с груповата скорост на вълните (фиг. 6-1):

$$A = A_0 \cos[\omega(k)t - kx] \Rightarrow R_k = \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} A_0 \cos[\omega(k)t - kx] dk. \quad (6.1)$$



Фиг. 6-1. Вълновият пакет е локализиран в пространството (а), но поради дисперсията след време t той се развива (б).

Но вълните на Дьо Бройл са вълни с дисперсия, т.е. тяхната фазова скорост v_{ph} зависи от вълновото число k . Действително, като използваме израза (4.32) за енергията на микрочастицата и $k = p/\hbar$, можем да определим $v_{ph}(k)$:

$$\omega = \frac{E}{\hbar} = \sqrt{\frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} + \frac{p^2 c^2}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} + k^2 c^2}, \quad (6.2)$$

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2 k^2} + c^2} = v_{ph}(k).$$

В резултат на дисперсията пакетът се разширява (в крайна сметка се развива) и движението на центъра му се различава от движението на частицата. Микрочастиците не са вълнов пакет от вълните на Дьо Бройл. (Затова при даване на представа за неопределеността на координатите и импулса (вж. § 7.3) ние не използваме вълнов пакет, както е направено (математически много коректно) в [3].)

Класическата физика подсказва едно друго тълкуване – не са ли вълните на Дьо Бройл подобни на звуковите вълни във въздуха? Но тогава дифракционната картина би зависела от интензитета на падащия поток от частици. А ние се убедихме в гл. 4, че това не е така – опитът показва, че една и съща картина се получава при малък интензитет, но с увеличена експозиция. Важен е броят на преминалите частици. Водородният атом има един електрон, но и там се проявяват вълновите му свойства. Очевидно е, че вълната на Дьо Бройл не е свързана с частици, образуващи среда (подобно на вълната в езерото).

Анализът на опитите по дифракция на микрочастици довежда Макс Борн до *вероятностно тълкуване на вълните на Дьо Бройл*. Да си спомним експеримента с дифракция на електрони. Не можем да кажем

къде ще попадне един-единствен електрон. Но ако пускаме през двата процепа много пъти по един електрон, тяхното разпределение ще съвпадне с разпределението на интензитета на дифрактиралите вълни на Дьо Бройл. Там, където дифракционната картина има максимум, попадат най-много частици и обратно. От една страна, имаме вероятността за намиране на частиците, а от друга – интензитета на вълната. При това вероятността за намиране на частиците расте, достига своя максимум, намалява и достига своя минимум там, където интензитетът на вълната има същото поведение. Макс Борн прави извод, че интензитетът на вълната на Дьо Бройл, който се определя от квадрата на амплитудата ѝ в произволно място, е пропорционален на вероятността да се открие частицата в това място.

Опитът с два процепа доказва, че попадането на един електрон върху фотоплаката има случаен характер – той може съвсем случайно да попадне в една или друга точка на дифракционните ивици. Очевидно е, че поведението на електрона трябва да се характеризира с някаква вероятностна функция. *Но тъй като почерняването на плаката, от една страна, е пропорционално на падащите частици, а от друга – на интензитета на вълните на Дьо Бройл, то е ясно, че тази вероятност може да се изрази чрез свойствата на вълната. За да направим това, трябва да умеем да описваме вълната, т.е. да ѝ съпоставим някаква функция, наречена вълнова функция.*

§ 6.2. ВЪЛНОВА ФУНКЦИЯ

Необходима ни е функция, която да описва вероятностния и вълновия характер на микрообекта. На този микрообект съпоставяме някаква вълна. Тъй като квадратът на амплитудата на това поле, който определя интензитета ѝ, е пропорционален на вероятността да открием микрочастицата в място около точка с координати x, y, z в определен момент, то е ясно, че това е функция на координатите и времето:

$$\psi(x, y, z, t) \equiv \psi(\mathbf{r}, t). \quad (6.3)$$

Тази функция се нарича вълнова функция или ψ -функция. Най-простият случай на свободно движение на микрочастицата се описва с плоска вълна и вълновата функция има вида

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = A \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\right]. \quad (6.4)$$

Тук представихме вълната в комплексен вид (вж. прил. V), което често се използва в класическата физика (причината е, че това води до редица математически улеснения). Класическата вълна е само реалната част от комплексния вид.

В общия случай $\psi(\mathbf{r}, t)$ е сложна функция от координатите и времето и няма нищо общо с функциите, описващи класически вълни. Тя може да бъде и комплексна. *Физичният смисъл на квадрата на ψ - функцията според Макс Борн се състои в следното: Величината $|\psi(x, y, z, t)|^2 dV$ е пропорционална на вероятността микрочастицата в момент от времето t да се намира в елементарен обем dV , разположен около точката x, y, z .*

Да означим тази вероятност с dW . Тогава

$$dW \propto |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV. \quad (6.5)$$

Тази физична интерпретация явно показва, че вълната, описвана с ψ - функцията, съществено се различава от известните в класическата физика вълни. Това особено се проявява във факта, че физичен смисъл има $|\psi|^2$, а не самата ψ - функция. В най-общия случай вълновата функция е комплексна и затова

$$|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = \psi(\mathbf{r}, t)\psi^*(\mathbf{r}, t)dV. \quad (6.6)$$

Тъй като съгласно (6.5) тя определя пространствено-времето разпределение, то очевидно е, че функциите

$$\psi(\mathbf{r}, t) \text{ и } C\psi(\mathbf{r}, t), \quad (C = \text{const}) \quad (6.7)$$

определят едно и също разпределение. Ако интегрираме $|\psi|^2$ по всички възможни координати, получаваме някакво число N

$$\int_V |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = N. \quad (6.8)$$

Съгласно (6.7) можем да намерим нова вълнова функция

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = N^{-1/2}\psi(\mathbf{r}, t), \quad (6.9)$$

която да описва същото вероятностно разпределение, и тогава

$$\int_V |\psi'|^2 dV = 1. \quad (6.10)$$

Такава функция се нарича нормирана, а (6.10) е условието за нормировка.

Пример: Да намерим нормираната вълнова функция на частица с енергия E и импулс p , която има една степен на свобода и се движи в определена област от 0 до a . Вълновата функция е от вида (6.4):

$$\psi(x, t) = A \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right]. \quad (6.11)$$

Съгласно условието за нормировка

$$1 = \int_0^a |\psi(x, t)|^2 dx = \int_0^a \left| A \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right] \right|^2 dx = \int_0^a |A|^2 dx = |A|^2 a \quad (6.12a)$$

или

$$A = \frac{1}{\sqrt{a}}. \quad (6.12b)$$

Вълновата функция за разглеждания пример приема вида

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - px) \right]. \quad (6.13)$$

За нормирана функция (6.5) вече се записва като равенство

$$dW = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t) dV. \quad (6.14a)$$

или

$$dW = \rho(\mathbf{r}, t) dV. \quad (6.14b)$$

Тук ρ е плътността на вероятността. Вероятността да открием частицата в някакъв обем V' е

$$W(V', t) = \int_{V'} dW = \int_{V'} \psi(\mathbf{r}, t) \psi^*(\mathbf{r}, t) dV. \quad (6.15)$$

Ще отбележим, че вълновата функция, нормирана с условие (6.10), е определена с точност до множителя $e^{i\alpha}$, където α е произволна реална функция от координатите и времето $\alpha = \alpha(\mathbf{r}, t)$. Това е така, защото $|e^{i\alpha}| = 1$.

Вълновата функция притежава следните свойства в пространството, в което тя е определена:

- а) *ограниченост* – ψ приема крайни стойности във всички точки на пространството (по-точно казано, ψ е квадратично интегрируема функция, тъй като съгласно нейния физичен смисъл интегралът $\int |\psi|^2 dV$ трябва да е краен);
- б) *еднозначност* – във всяка точка на пространството ψ има единствена стойност;
- в) *непрекъснатост* – ψ е диференцируема във всяка точка и следователно непрекъсната.

Нека имаме система от N частици с радиус-вектори $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$. На такава система ще съпоставим вълновата функция

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) \equiv \psi(\mathbf{r}_j, t). \quad (6.16)$$

С индекс j означаваме цялата съвкупност от координати. При описването на една, две или много частици не би трябвало да има принципна разлика. Тогава интерпретацията на $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}_j, t)$ би трябвало да бъде една и съща, т.е. за нормираната $\psi(\mathbf{r}_j, t)$ -функция величината $|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)|^2 dV_1 dV_2 \dots dV_N$ определя вероятността в момент от времето t първата частица да се намира в обем dV_1 около точката \mathbf{r}_1 , втората – в dV_2 около точката \mathbf{r}_2 и т. н.:

$$dW = \psi(\mathbf{r}_j, t) \psi^*(\mathbf{r}_j, t) dV_1 dV_2 \dots dV_N, \quad (6.17)$$

като условието за нормировка е

$$\int_{V_1} \int_{V_2} \dots \int_{V_N} |\psi(\mathbf{r}_j, t)|^2 dV_1 dV_2 \dots dV_N = 1. \quad (6.18)$$

Ако интегрираме по обема на допустимите области на движение на всички частици с изключение на една от тях, например първата, получаваме

$$dW_1 = dV_1 \int_{V_2} \dots \int_{V_N} |\psi(\mathbf{r}_j, t)|^2 dV_2 \dots dV_N. \quad (6.19)$$

Това представлява вероятността да се намери първата частица в елементарния обем dV_1 при произволно разположение на останалите частици.

Да разгледаме частния случай на система от N невзаимодействащи си частици, всяка от които се описва с вълновите функции $\psi_1(\mathbf{r}_1, t)$, $\psi_2(\mathbf{r}_2, t)$, ..., $\psi_N(\mathbf{r}_N, t)$, а системата – с функцията (6.16). Вероятността да намерим първата частица в обем dV_1 е $dW_1 = |\psi_1(\mathbf{r}_1, t)|^2 dV_1$, втората в dV_2 – $dW_2 = |\psi_2(\mathbf{r}_2, t)|^2 dV_2$, и т. н. Съгласно правилото за умножение на вероятностите вероятността dW за тези N събития едновременно е

$$dW = dW_1 dW_2 \dots dW_N = \\ = |\psi_1(\mathbf{r}_1, t)|^2 dV_1 |\psi_2(\mathbf{r}_2, t)|^2 dV_2 \dots |\psi_N(\mathbf{r}_N, t)|^2 dV_N. \quad (6.20)$$

Изразявайки dW чрез $\psi(\mathbf{r}_j, t)$, получаваме

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = \psi_1(\mathbf{r}_1, t), \psi_2(\mathbf{r}_2, t), \dots, \psi_N(\mathbf{r}_N, t), \quad (6.21)$$

т.е. вълновата функция на система от невзаимодействащи си частици е равна на произведението от вълновите функции на отделните частици.

§ 6.3. СЪОТНОШЕНИЕ ЗА НЕОПРЕДЕЛЕНОСТ

За да отговорим на въпроса, защо сме принудени да описваме състоянието на микрообектите по коренно различен начин от това на макрообектите (в класическата механика), ще разгледаме качествено принципа на неопределеност (строго той се разглежда в § 7.7).

В класическата механика се приема, че определянето на координатите и импулса на едно макротяло (или на частица) може да стане по принцип с безкрайно голяма точност. Но винаги когато извършваме измерване, резултатът съдържа известна неопределеност или грешка. Например не можем да измерим абсолютно точно дължината на стаята. Даже ако рулетката има милиметрова скала, измерването ще съдържа грешка от порядъка на 1/2 mm. По-точните прибори позволяват да се извършват по-точни измервания, но колкото и да е съвършен измерителният прибор, резултатът от измерването непременно съдържа някаква грешка. В класическата физика с усъвършенстване на измерителните прибори можем да направим грешката колкото искаме малка.

В квантовата механика, която се занимава с движението на микротелата, това не е така. В гл. 4 видяхме, че те имат едновременно свойства на вълни и на частици. Поради това величини като координата и импулс при микрообекта (това може да бъде електрона) невинаги имат смисъл. Например (§ 2.7) при свободното му движение ние си го представяме като вълна и няма въобще смисъл да говорим за координата. И обратно, когато той попада в дадена точка и е локализиран в нея, величината дължина на вълната, а следователно и импулсът (4.30) губят всякакъв смисъл – безпредметно е да се говори за дължина на вълната в дадена точка. Величините координата, импулс и дължина на вълната добиват смисъл само при експериментите по измерването им. Определянето на координатата изкарва на преден план корпускулните свойства на електрона и го локализира в определена пространствена област, а определянето на дължината на вълната изкарва на преден план вълновите му и фиксира неговия импулс. Поради това е логично да поставим въпроса с каква точност могат да

бъдат определени координата и импулсът на електрона и доколко малка е пространствената област, в която той може да бъде локализиран.

Съгласно квантовата механика съществува граница, ограничаваща точността на измервания на определени величини, в частност на координатата и импулса. Тази граница не зависи от степента на усъвършенстване на измерителния прибор, а е присъща на природата на света. Тя е обусловена от два фактора: неизбежното взаимодействие на наблюдаемия обект с регистриращото устройство и корпускулно-вълновия дуализъм.

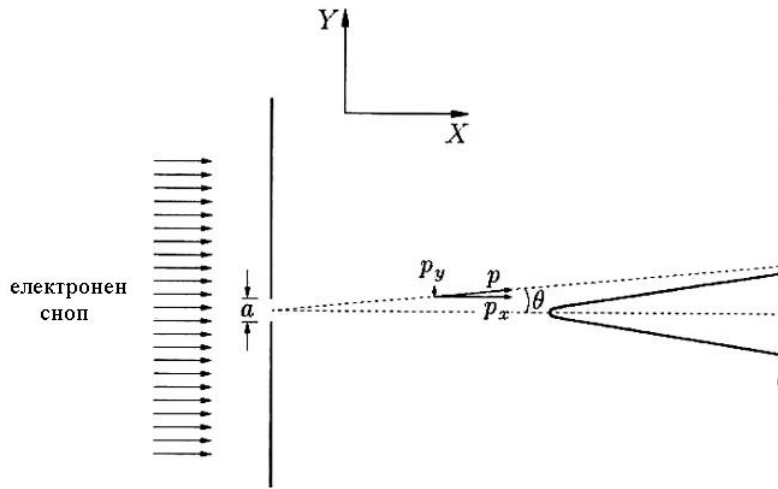
Опитите за определяне на координатите на микрочастица в камери (Уилсънова или искрова [Л1, прил. XVIII]) или върху фотографска плака са основани на нейното взаимодействие с атомите на веществото. Независимо от това дали виждаме микрочастицата в една от камерите или върху фотографската плака, принципът е един и същ – микрообектът йонизира атомите на веществото и около получените йони започват физически и/или химически процеси, които ги правят видими. Ние определяме координатата по видимите следи. Дори и да знаем къде се намира полученият йон, нищо не можем да кажем за това къде точно върху атома е попаднал микрообектът, т.е. не можем да фиксираме с много голяма точност (да не говорим за безкрайна) неговото положение. Впрочем изразът „къде точно върху атома е попаднал микрообектът” предполага, че той е имал определена координата още преди взаимодействието с атома. А това не е така – той се локализира в процеса на взаимодействие с него (на попадане в него). Очевидно, че можем да кажем само, че е локализиран с точност до размерите на атом (те са 10^{-8} cm – § 4.4). А размерите на микрообекта могат да бъдат на много, много порядъци по-малки, така че такава точност съвсем не е голяма и задоволителна.

За да продемонстрираме как корпускулно-вълновият дуализъм влияе на измерването, ще проведем мислен експеримент за измерване на положението на един обект (например електрон) с помощта на фотони. Последните притежават свойствата и на частици, и на вълни. Грубо (за оценка) можем да кажем, че те са хем частици, хем вълни. Точността на наблюдението на какъвто и да е обект не надвишава дължината на вълната на използваното лъчение. Следователно за точното измерване на положението на тялото трябва да изберем къси вълни на фотоните. Но малката дължина съответства на голяма честота и следователно на голяма енергия (ние вече знаем, че $E = h\nu$). Фотоните и измеряемият обект си взаимодействат. Колкото е по-голяма енергията на фотоните, толкова по-голям импулс те могат да предадат на обекта при удара (при наблюдаването) с него. Ако вземем фотони с по-голяма дължина на вълната, съответно с по-малка енергия, то при удара движението на обекта ще изпитва по-малко смущение, но и положението му ще се измери по-малко точно (точността съвпада с дължината на вълната). По такъв начин самото измерване (наблюдение) внася съществена неопределеност или в положението, или в импулса на електрона.

В това се и заключава принципът за неопределеност за координатите и импулса (в общ вид за първи път той е изказан от Хайзенберг през 1927 г.). *Колкото по-точно определяме положението на микрообекта, толкова по-неопределен е неговият импулс и обратно – колкото по-точно определяме импулса на микрообекта, толкова по-неопределено е неговото положение. Това съотношение дава връзката между неопределеностите при измерванията и затова се нарича съотношение за неопределеност. Очевидно е, че колкото по-точно измерваме една величина, толкова по-неопределена се оказва другата и обратно.*

За да илюстрираме съотношението за неопределеност, подробно ще анализираме експеримента дифракция на електрон от процеп (фиг. 6-2). Преди процепа имаме състояние с определен импулс $p_x = p$, $p_y = 0$, $p_z = 0$, което се описва с плоска вълна на Дьо Бройл $\psi(x, t) = A \exp[-i(Et - px) / \hbar]$. Вероятността dW да намерим частицата в елементарния обем dV е

$$dW = |\psi|^2 dV = A^2 dV. \quad (6.22)$$



Фиг. 6-2. Измерването на координатата y на сноп от високоенергетични електрони с помощта на процеп води до разпадането му на конични снопове с различни p_y импулси. Граничният импулс p_y за първия дифракционен максимум се определя от електрона, попадащ в първия минимум, т.е. от $\propto \theta$.

Вероятността за намиране на частицата не зависи от координатите и е еднаква за всички точки на пространството. Частицата с точно определен импулс има напълно неопределено положение. Като имаме предвид (4.30), е ясно, че определен импулс означава определена дължина на вълната – безсмислено е да говорим за точното положение на една вълна. Частицата с точно определено положение има напълно

неопределен импулс – безсмислено е да говорим за точната дължина на вълната на обект в дадена точка.

Да се опитаме да фиксираме координатата y посредством процеп с ширина a . Тогава ще наблюдаваме известната дифракционна картина. Да оценим неопределеността на импулса. Оценката ще направим за областта на първия дифракционен максимум. Границата му се определя от ъгъл θ , в който се получава първият дифракционен минимум. При този ъгъл лъчите от двете половини на процепа (двойка по двойка) се гасят, тъй като оптичните им пътища се различават с $\lambda/2$, т.е.

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}. \quad (6.23)$$

Тъй като y -компонентата на импулса в минимума е $p \sin \theta$, в разглежданата област тя се изменя от $-p \sin \theta$ до $p_y = +p \sin \theta$. Следователно, като отчетем (6.23), за отклонението от средната стойност получаваме

$$\Delta p_y = p \sin \theta = \frac{h}{\lambda} \sin \theta = \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a}. \quad (6.24)$$

Тъй като отклонението на y е $\Delta y = a/2$, можем да запишем

$$\Delta y \Delta p_y = \Delta y p \sin \theta = \frac{a}{2} \frac{h}{a} = \frac{h}{2}. \quad (6.25)$$

Очевидно е, че с намаляването на ширината на процепа и по такъв начин с по-точното фиксиране на координатата y се увеличава неопределеността на p_y . Поради дифракцията по-точното измерване на y води до по-голяма неопределеност на импулса p_y . *По-прецизният анализ* (вж. § 7.6) показвал, че в най-добрия случай неопределеностите Δy и Δp_y удовлетворяват неравенството

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{h}{2.2\pi} = \frac{\hbar}{2}. \quad (6.26)$$

Това е математическата формулировка на съотношението за неопределеност за координатите и импулса. То утвърждава, че не могат да се измерят едновременно с абсолютна точност положението и импулсът на обекта. Колкото по-точно се опитваме да определим положението на обекта, т.е. колкото по-малко е Δy , толкова по-голяма ще бъде неопределеността в импулса Δp_y . Ако се опитаме да измерим импулса, то положението на обекта ще се окаже неопределено. Принципът за неопределеност съвсем не забранява

точно да се измери едно от двете: или положението, или импулсът. Например с много тесен процеп можем да измерим y -координатата на електрона. Но при това неговият импулс p_y вследствие на настъпилата дифракция ще бъде напълно неопределен. Следователно, макар че положението на електрона в даден момент от времето да ни е точно известно, ние въобще не знаем къде ще попадне на екрана, т.е. какъв импулс p_y ще има в следващия момент от време.

Съотношението за неопределеност е в сила и за макротелата. Но за тях то е без всякакво значение. Да вземем един пример, който ще покаже това. Нека координата на топче с маса 1 g е определена с точност $\Delta y = 10^{-4}$ cm (това е равно на точност $\Delta y = 10^{-3}$ mm, която почти не се използва в практиката). Съгласно съотношението за неопределеност неточността за неговата скорост (в CGS системата) е

$$\Delta v_y = \frac{\Delta p_y}{m} \geq \frac{\hbar}{2m\Delta y} \approx \frac{10^{-27}}{1.10^{-4}} = 10^{-23} \text{ cm/s.} \quad (6.27)$$

Тази стойност е толкова малка, че практически не само няма никакво значение, а и не може опитно да бъде определена. Можем да кажем, че съотношението за неопределеност поставя известна граница между макро- и микротелата. Много изследователи отнасят към микрокосмоса телата, за които то е от съществено значение. Във всички случаи съотношението за неопределеност играе основна роля в квантовата механика и е пример за ярката разлика между микро- и макротелата. За илюстрация ще разгледаме два гранични случая (за простота вземаме едномерни случаи, които не нарушават общото). Преди отвора (фиг. 6-2) импулсът на електрона е определен с безкрайно голяма точност $\Delta p_y = 0$. Тогава съгласно съотношението за неопределеност $\Delta y = \infty$. Координатата на частицата е напълно неопределена, т.е. тя се намира навсякъде в пространството. Действително, ако вземем вълновата функция (6.11) на частица с точно определен импулс, за вероятността за откриването ѝ в dy имаме

$$dW = |\psi|^2 dy = |A|^2 dy. \quad (6.28)$$

Виждаме, че тази вероятност в dy не зависи от координатата и е еднаква за всички точки на пространството, т.е. *частицата с точно определен импулс има напълно неопределена координата*.

А сега да разгледаме електрона в отвора (същата фигура), където координатата y е точно определена, т.е. $\Delta y = 0$. От (6.26) получаваме $\Delta p_y = \infty$ и следователно импулсът на електрона е напълно неопределен. Действително фотоплаката на екрана показва това. С други думи, *частицата с точно определена координата има напълно неопределен импулс*.

Нека да повторим, че тези свойства на микрочастиците са предизвикани от техните корпускулни и вълнови свойства, без те да са по своята природа нито корпускули (частици), нито вълни. При описанието на микрообектите понятията координата и вълна не са подходящи, тъй като те не са им вътрешно присъщи. Те са подходящи за описание на поведението на макротелата, но не и за поведението на микротелата. Съотношението за неопределеност изразява именно тази ограничена приложимост на споменатите класически понятия в атомния и субатомния свят. В този свят то ограничава валидността на класическите понятия и закони. Ясно е, че микрообектите не могат да се описват с нютоновата механика, защото тя използва за поведението им координатите и импулса им. Но в микросвета тяхното едновременно определяне е невъзможно поради съществуването на съотношението за неопределеност. То изменя и класическия смисъл на движението и неговата нагледност. Частиците не могат да имат едновременно определени координати и скорости и понятието траектория губи смисъл. Поради това нагледното движение по траектория трябва да бъде изоставено. След като не можем да използваме принципите и методите на класическата механика за описване на поведението на атомния свят, се пита как правим това. Отговорът на този въпрос се съдържа в следващата глава. При това там се отговаря на въпроса ‘как’, а не – ‘защо’. Много често в историята на физиката не е отговаряно на този въпрос и се оказва, че поставянето му в началната теория на описанието на дадено явление невинаги е полезно. Красноречив в това отношение е примерът с всеобщия закон за привличането (за него вж. гл. 2). В него през XVII в. Нютон отговаря *как* си взаимодействат две тела (за него това е било достатъчно и той е знаел, че не може да отговори на въпроса ‘защо’, а дипломатично е казал ‘Хипотези не правя’). (Едва два века и половина след Нютон Айнщайн създава общата теория на относителността, която съдържа в себе си като частен случай нютоновата теория и дава отговор на въпроса ‘защо’, т.е. обяснява напълно този закон.) Така че нашата задача в гл. 7 ще бъде намиране на основните общи принципи, които управляват поведението на микросвета, за да можем да го опишем по подходящ начин.

§ 6.4. СЪСТОЯНИЕ И ФУНКЦИЯ НА СЪСТОЯНИЕТО

Поведението на една система от физични обекти се определя с помощта на известен брой физични величини. В класическата механика се срещаме с величини като координата, импулс, момент на импулса, кинетична и потенциална енергия. Те характеризират движението на частиците на системата или на системата като цяло и, изобщо казано, се менят в процеса на движението, т.е. с течение на времето. Тези величини и съставените от тях функции се наричат *динамични променливи* или *наблюдаеми*.

Механически да опишем една система означава, първо, да опишем динамичните ѝ променливи в даден фиксиран момент от време и, второ, да опишем изменението им във времето, т.е. движението. Законите на класическата механика позволяват да се пресметнат стойностите на всички динамични променливи в даден момент, стига да са известни стойностите на обобщените координати и импулси на частиците на системата в този момент, в частност на декартовите координати и скоростите. Когато знаем координатите и скоростите на частиците, всъщност знаем всичко за системата в даден момент от времето. Затова се казва, че *съвкупността от координатите и скоростите на всички частици определя състоянието на системата. Като правило тази съвкупност се отъждествява с понятието "състояние на системата"*.

Класически състоянието се описва с $2s$ -мерен вектор Γ във фазовото пространство (това пространство, по осите на което се нанасят обобщените координати и обобщените импулси). (Тук s е броят на степените на свобода – накратко въпросът е изложен например в [2, § 27,], а подробно в Голдстейн, Х., Класическая механика, изд. II, Москва, Наука, 1975. Goldstein, H., Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing Co., 3rd ed., 2002). При това познаването на състоянието $\Gamma(t_0)$ в един начален момент от времето t_0 позволява да бъдат пресметнати всички физични величини, характеризиращи системата, и с помощта на законите на механиката да се определи нейното състояние $\Gamma(t)$ в произволен момент от времето t . В декартова отправна система имаме координати и импулси (чрез тях можем да определим всички останали величини) и уравненията на Нютон, които дават възможност да ги определим във всеки момент от времето, т.е. да определим състоянието във всеки момент от времето; в началния момент координатите и импулсите лесно могат да бъдат определени опитно – съгласно класическата механика това може да стане (поне по принцип) с безкрайно голяма точност. Нека да сумираме изискванията за състоянието на класическа система:

1. Щом е известно състоянието ѝ, можем да пресметнем стойностите на всичките ѝ динамични променливи.
2. Когато е известно състоянието $\Gamma(t_0)$ ѝ в един начален момент t_0 , законите на механиката позволяват да бъде определено нейното състояние $\Gamma(t)$ във всеки следващ момент t (принцип за причинност).
3. Състоянието ѝ в началния момент може да бъде определено опитно.

Поради съотношението за неопределеност (6.26), от което е ясно, че когато положение е точно, то импулсът е неопределен (и обратно), състоянието на микрообектите не може да се опише със същия вектор $\Gamma(t)$. Поради това съотношение принципно язната и проста схема на класическата механика е непригодна за описване на процесите в микрообектите. В § 6.2 видяхме, че тяхното поведение се описва с вълновата функция. По-нататък ще стане ясно, че тази функция носи в

себе си не само информация за характера на движението на системата, но и за стойностите на физичните величини, които го определят. С това тя удовлетворява изискване (1) за състоянието. Състоянието на една квантова система в произволен момент от времето t се описва с *вълновата функция* $\psi(\mathbf{r}, t)$, която се нарича още *функция на състоянието*.

В гл. 8 ще видим че вълновата функция $\psi(\mathbf{r}, t)$ удовлетворява линейно диференциално уравнение от първи ред по времето (уравнението на Шрьодингер). Поради това вълновата функция $\psi(\mathbf{r}, t)$ може да се определи еднозначно, ако е известна вълновата функция $\psi(\mathbf{r}, t_0)$ в един начален момент от времето t_0 . В това отношение вълновата функция е близка до изискване (2) за състоянието в класическата механика – и тя, и класическото състояние се определят еднозначно във всеки следващ момент, стига те да са известни в един начален момент. За да бъдат изцяло задоволени изискванията за понятието състояние, т.е. за да можем да твърдим, че $\psi(\mathbf{r}, t)$ действително описва състоянието на системата, трябва да отговорим на следните два въпроса:

- Как да пресметнем стойностите на динамичните променливи, характеризиращи движението \dot{y} (изменението \dot{y}). ако е известно че тя се намира в състояние $\psi(\mathbf{r}, t)$?
- Как може опитно да се определи началното \dot{y} състояние $\psi(\mathbf{r}, t_0)$?

Отговорът на тези въпроси е в гл. 8.

Спомняме си физичната интерпретация на вълновата функция от § 6.2. Квадратът на нейния модул описва вероятност. Логично е да предположим, че *в дадено състояние величините могат да имат вероятностен характер* (подробният и точен анализ показва, че вероятностният характер на наблюдаемите е обоснован от принципа за неопределеност на координатите и импулса). Следователно предсказването на резултатите от опита в квантовата механика не е категорично точно като в класическата механика. Докато в нея известните начални положения и начални скорости позволяват със сигурност да предскажем координатите и скоростта на всяка частица във всеки следващ момент, при микрообектите това не е така. Да си припомним дифракционната картина при преминаване на фотоните (фиг. 4.12) (или електроните – опит на Фабрикант, изложен в § 4.6) през отвор. За обяснението им трябваше да допуснем, че тези частици притежават двойствена природа и при движението се подчиняват на законите на разпространение на вълна. В резултат на това допускане мястото на попадането им на екрана може да се предскаже само вероятно. Видяхме, че физичната величина „координата“ не е определена еднозначно, а има множество стойности и получаването на всяка от тях се характеризира с известна вероятност. По-нататък ще видим, че поради

двойствения характер на микрообектите и други физични величини могат да се предскажат само вероятно.

Ще подчертаем, че *тълкуването на вероятностите в квантовата и в класическата механика е принципно различно.*

В класическата кинетична теория на газа се счита, че всяка молекула във всеки момент притежава определени, но неизвестни за нас стойности на координатата и импулса. Поради това там се задава вероятността примерно на енергията при дадена стойност на температурата. В квантовата механика положението е съвсем различно – когато системата се намира в състояние $\psi(\mathbf{r}_j, t)$, тя може едновременно да притежава множество различни стойности на дадена величина (като че ли едновременно тя се намира в множество различни състояния) и в момента на опита ще се реализира само една от тези възможни стойности. Използването на вероятностите се налага не от нашето незнание на детайлите на явлението, а от обективните, присъщи на микросвета закономерности.

Основата на вероятността в квантовата механика се дължи на това, че величините като координати, импулси и др., с които се опитваме да опишем поведението на микрообектите и които измерваме с макроприбори (винаги!), не са подходящи за тази цел. Видяхме, че съотношението за неопределеност показва невъзможността координатата и импулсът на една микрочастица да бъдат измерени едновременно. Логично е да се предположи, че те не са вътрешно присъщи на микрообектите и навярно за тяхното описание трябва да се използват коренно различни некласически понятия. Но ние използваме класическите понятия. Малко е да се каже, че ние сме принудени – просто нямаме възможност да си служим с други величини освен с класическите. Всичката информация за микрообектите черпим от измерителните прибори, а по-точно казано – от тяхното изменение на макроскопичното им състояние при взаимодействието с микрообектите. А това изменение на макросъстоянието на приборите може да бъде описано само и единствено с класически понятия. И може би тази реалност, че, от една страна, класическите понятия са неподходящи за описание на микрообектите, а от друга, че употребата им е неизбежна, налага използването на вероятностите.

За дадена квантова система съществува ограничение на броя на независимите физични величини, за които е възможно едновременно възпроизводимо измерване. Максималният брой зависи от самата система. *Най-големият брой независими физични величини, за които е възможно едновременно възпроизводимо измерване, образуват пълен набор от физични величини.* Този брой е равен на степените на свобода на дадена квантова система. Например за една частица са възможни следните пълни набори (без спина): а) x, y, z ; б) p_x, p_y, p_z ; в) E, p_z, L_z . *Всяко състояние на квантовомеханичната система се характеризира*

с онзи пълен набор от динамични променливи (независими!), чието едновременно измерване в това състояние е възпроизводимо.

Ще дадем няколко примера, че поради същественото различие на състоянието в квантовата механика от класическото и задачите в квантовата механика са коренно различни от класическите:

1. Да се определят възможните пълни набори за дадена система.
2. Да се намери вълновата функция за даден пълен набор.
3. Какви са възможните стойности на дадена динамична променлива?

Такива задачи ще бъдат разгледани в гл. 10 и след нея.

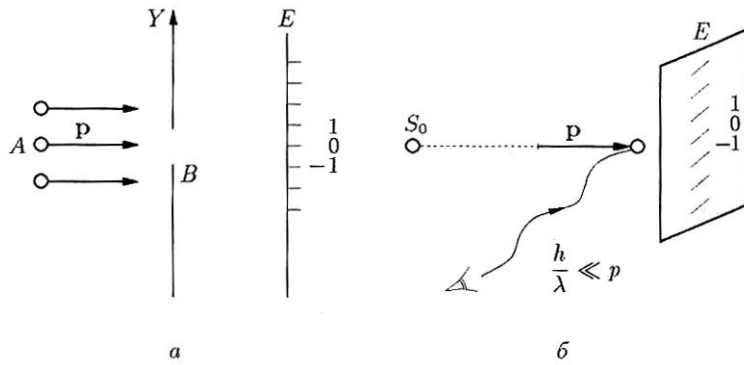
§ 6.5. ИЗМЕРВАНЕ НА ФИЗИЧНИТЕ ВЕЛИЧИНИ, СОБСТВЕНИ СЪСТОЯНИЯ И СОБСТВЕНИ СТОЙНОСТИ

В класическата механика за определяне на началното състояние е необходимо да измерим координатите и импулсите на частиците. Те принципно могат да бъдат измерени едновременно с желана висока точност и техните стойности могат да се получат независимо от реда на измерването. Установяването на състоянието в класическата механика в известен смисъл е тривиално.

Не така стоят нещата в квантовата механика. Определянето на състоянието за разлика от класическата механика е основен въпрос, надхвърлящ по важност динамичните проблеми. Измерването на квантовомеханичните величини съществено се различава от това на класическите. *В квантовата механика под измерване се разбира всяко взаимодействие на микрообекти с класически уреди.* Тъй като всеки уред се състои от микрообекти, в които биха могли да се проявят техните специфични свойства, класически е онзи уред, чиито квантови свойства в провеждания експеримент са несъществени.

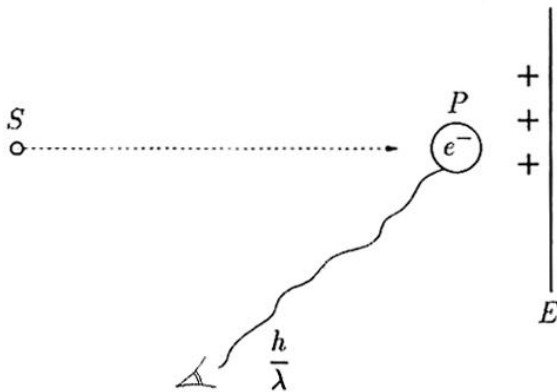
В класическата физика всяко измерване е възпроизводимо, т.е. резултатите от последователни (повторни) измервания съвпадат. Например нека измерваме положението на класическа частица, която тръгва от т. $A(x_0, y)$ с импулс \mathbf{p} (фиг. 6-3a), с процеп в т. $B(x_1, y)$ и с разграфен екран E при $x = x_1$ (частицата оставя следа върху него). Всеки път, когато импулсът на частицата в т. A е \mathbf{p} , ще измерим ординатата y и с процепа, и с екрана ($x = x_1$).

Измерването на физичните величини на квантови обекти невинаги е възпроизводимо. Докато в експеримента с преминаване на електрони през един процеп (отвор) определянето на координатата y чрез процепа е възпроизводимо, то измерването на положението на екрана след преминаването на електроните е невъзпроизводимо – дава различни резултати (вж. описания в § 4.4 опит на Фабрикант и фиг. 2-13). Всяко измерване изменя състоянието на електрона и това изменение принципно не може да се направи колкото искаме малко, тъй като енергията на взаимодействие е равна на $E = \hbar\omega$. Преди процепа елек



Фиг. 6-3. Измерване на координатата на класическа частица, движеща се успоредно на оста X с импулс p . Измерванията са възпроизводими: а) чрез процеп; б) чрез „поглеждане“ – импулсът на фотона е значително по-малък от импулса на частицата.

тронът е в състояние с фиксиран импулс p_x ($p_y = 0$), а след процепа той може да има различни стойности на напречната компонента p_y , в резултат на което попада в различни точки на дифракционната картина. Взаимодействието между електрона и класическия уред процеп (отвор) изменя импулса с $\sim h/\lambda$. В класически мащаб h/λ е пренебрежимо малка величина, но за микросвета това изменение е сравнимо с импулса на частицата. А не може ли вместо с процеп да определим положението на електрона, без да правим нещо с него, а само да го „погледнем“? Така можем да измерим и положението на хоризонтално движеща се класическа частица (фиг. 6-3б). Достатъчно е да погледнем поставената зад траекторията скала на фиг. 6-4.



Фиг. 6-4. Определяне на положението на електрона в т. P чрез „поглеждане“. За да „видим“ електрона, той трябва да бъде „осветен“. Разсеянният от такова осветяване фотон с импулс $p = h/\lambda$ изменя непредсказуемо импулса на електрона – измерването е невъзпроизводимо и електронът попада в различни точки на екрана E .

За да „видим“ електрона, е необходимо да го „осветим“, т.е. най-малко един фотон трябва да попадне върху него. Но фотонът има импулс h/λ , сравним с импулса на електрона. В резултат на разсейването му електронът ще получи допълнителен импулс (вж. ефект на Комптън в § 6). При

последователни опити електронът попада на различни места върху екрана E . Мястото върху екрана E е непредсказуемо (предсказуема е обаче вероятността за попадане). Измерването на импулса p_y с екрана E е невъзпроизводимо. Същността на проблема е, че ние не разполагаме с достатъчно „деликатни и нежни“ агенти за наблюдаване на микрообекта. При това принципно не можем да разполагаме с такива. При измерване на положението на макроскопично тяло (фиг. 6-3) импулсът на фотона е пренебрежимо малък в сравнение с импулса на тялото $h/\lambda \ll p$.

Характерът на измерването в квантовата механика зависи от състоянието на системата. В едно състояние то може да бъде възпроизводимо, а в друго – невъзпроизводимо (пример: измерването преди и след процепа на фиг. 2-12a). Оказва се, че измерването на някои двойки физични величини може да бъде едновременно възпроизводимо. Но има и такива двойки физични величини, които в нито едно състояние не са едновременно възпроизводимо измерими (например x и p_x , както видяхме от принципа за неопределеност). Наричат се съвместими и несъвместими или съизмерими и несъизмерими.

Когато измерването на една величина е възпроизводимо, казваме, че тя е определена, а когато не е възпроизводимо – неопределена. Ако към пълния набор от величини в състояние, в което измерването им е възпроизводимо, добавим: а) независима величина, тя е неопределена; б) зависима величина, тя е определена.

Нека наречем собствено състоянието, в което измерването на физичната величина f е възпроизводимо, т.е. тя е определена. Стойността f_i , която се получава при това, се нарича собствена стойност, а вълновата функция ψ_i , описваща собственото състояние – собствена функция:

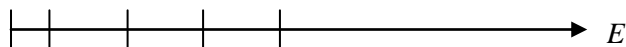
състояние	$1^{-\text{во}}$	$2^{-\text{по}}$	$3^{-\text{то}}$...	$N^{-\text{то}}$	собствени състояния;
стойности на f	f_1	f_2	f_3	...	f_N	собствени стойности;
вълнова функция	ψ_1	ψ_2	ψ_3	...	ψ_N	собствени функции.

Състояние, в което измерването на една физична величина е невъзпроизводимо, се нарича несобствено. Опитът показва, че при измерване на физичната величина в несобствено състояние получаваме различни стойности, но винаги една от собствените. Физичната величина не може да има други стойности.

Съвкупността от собствени стойности на физичната величина се нарича спектър. Спектрите биват:

а) Д и с к р е т н и : например енергията на квантовия осцилатор (гл. 11)
 $E = (n + 1/2)h\nu$, ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

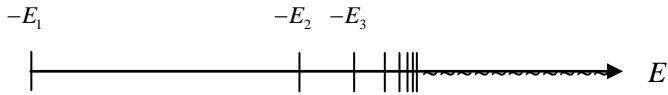
$$0 \quad h\nu/2 \quad 3h\nu/2 \quad 5h\nu/2 \quad 7h\nu/2$$



- б) Непрекъснати : например импулсът на свободно движещ се електрон – в интервала между две фиксирани стойности са възможни всички стойности на импулса.



- в) Смесени : например енергията на електрона в атома – в свързано състояние тя е дискретна, а в йонизирано е непрекъсната.



Обикновено при измерване на физична величина f в различни собствени състояния, описвани със собствени функции ψ_{f_i} , получаваме различни собствени стойности:

$$\psi_{f_1} \neq \psi_{f_2} \rightarrow f_1 \neq f_2. \quad (6.29)$$

Такива състояния се наричат *неизродени състояния* и съответно *собствените стойности – неизродени*. Ако при измерването на величината f в различни собствени състояния се получат еднакви собствени стойности, например f_0 , т.е.

$$\psi_{f_0}^{(1)} \neq \psi_{f_0}^{(2)}, \text{ но } f_0^{(1)} = f_0^{(2)}, \quad (6.30)$$

те се наричат *изродени състояния* и *изродени собствени стойности*. Ако на една собствена стойност f_i принадлежат N различни собствени функции $\psi_{f_i}^{(1)}, \psi_{f_i}^{(2)}, \dots, \psi_{f_i}^{(N)}$, тази собствена стойност е N -кратно изродена.

§ 6.6. ПРИНЦИП НА СУПЕРПОЗИЦИЯТА

Суперпозиция означава наслагване и явлението е добре познато от класическата физика.

В квантовата механика ще го илюстрираме с познатия опит за дифракция на микрообекти от два отвора (фиг. 4-12). Преди отворите частиците (фотони или електрони) могат да се намират в различни състояния, които се различават по големина и направление на импулса. Осъществява се едно от тези състояния с импулс \mathbf{p} , на което съответства една вълна на Дьо Бройл. Състоянието му се описва с вълнова функция $\psi_p(\mathbf{r}, t)$.

След преминаване през един от двата отвора паралелният сноп от микрочастици се разбива на конични снопове с различни импулси. Във всеки тесен конус, където можем да разглеждаме импулса на частиците

като точно определен, те са получили допълнителен напречен импулс – различен за различните конуси. Благодарение на тази добавка получаваме съвкупност от конични снопове с импулси $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ (един-единствен от тях не можем да получим). Състоянията на частиците в коничните снопове, в които те имат еднакви импулси, се описва с вълни на Дьо Бройл с точно определени дължини $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, т.е. с точни $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ или с $\psi_{p_1}(\mathbf{r}, t), \psi_{p_2}(\mathbf{r}, t), \dots, \psi_{p_n}(\mathbf{r}, t)$. В това можем да се убедим, като с отвор в екрана отделим един от коничните снопове с импулс p_i и го насочим към два отвора – в резултат получаваме отново дифракционна картина. От друга страна, цялата тази съвкупност е единно вълново поле и се изобразява с една вълнова функция $\psi(\mathbf{r}, t)$. Очевиден е изводът: *състоянието, възникнало при дифракция на два отвора, е суперпозиция (наслаждане) на състоянията на свободно движещи се частици, описвани с вълни на Дьо Бройл:*

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_i C(p_i) \psi_{p_i}(\mathbf{r}). \quad (6.31)$$

Новото състояние (дифракционната картина) е суперпозиция от състояния със строго фиксирани импулси.

Суперпозицията се проявява и при преминаване на микрочастиците през двата отвора (фиг. 4-11б). Когато вторият е затворен, състоянието се описва с вълновата функция $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ и плътността на вероятността да открием частицата в точката \mathbf{r} на екрана е

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = |\psi_1(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (6.31)$$

Когато първият е затворен, състоянието се описва с $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ и плътността на вероятността е аналогична:

$$\rho_2(\mathbf{r}, t) = |\psi_2(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (6.32)$$

Ние знаем добре резултата, когато са отворени и двата отвора – възниква ново състояние. И макар че микросветът се подчинява на вероятностни закони, в новото състояние не се сумират плътностите на вероятностите ρ_1 и ρ_2 , а амплитудите на състоянията или според Дирак амплитудите на вероятността:

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(\mathbf{r}, t) &= C_1 \psi_1(\mathbf{r}, t) + C_2 \psi_2(\mathbf{r}, t), \\ \rho_{1,2}(\mathbf{r}, t) &= |\psi_{1,2}(\mathbf{r}, t)|^2 \neq \rho_1(\mathbf{r}, t) + \rho_2(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Разгледаните примери с дифракция са частни случаи от принципа на суперпозицията: *ако една система може да се намира в състояние с вълнови функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, то тя може да се намира и в състояние с вълнова функция ψ , която е линейна комбинация от функциите ψ_i :*

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_i C_i \psi_i. \quad (6.35)$$

Коефициентите C_i могат да бъдат произволни, но трябва да се подчиняват на условието за нормировка на вълновата функция:

$$\int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = \int \left| \sum_i C_i \psi_i \right|^2 dV = 1. \quad (6.36)$$

В класическата физика суперпозицията е следствие от линейността на системата. Линейните трептения на такава система се описват със система от линейни диференциални уравнения и нейното общо решение е линейна комбинация от частните решения. А това е математическият израз на суперпозицията. От тези разсъждения можем да очакваме, че вълновата функция ще удовлетворява линейно диференциално уравнение.

Да погледнем по-широко на принципа на суперпозицията от гледна точка на линейната алгебра. В гл. 7 се доказва, че (собствените на един оператор) вълновите функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ образуват базис в хилбертовото пространство (това е линейно векторно пространство). Те образуват пълна система от функции и всяка друга функция може да се представи като линейна комбинация от тях.

$$\psi = \sum_i C_i \psi_i. \quad (6.37)$$

Да разкрием физическия смисъл на коефициентите C_k (строго този въпрос се разглежда в гл. 7). За целта да разгледаме състояние с вълнова функция $\psi(\mathbf{r})$, в което измерваме физичната величина f . Ако състоянието не съвпада с едно от собствените състояния ($\psi(\mathbf{r}) \neq \psi_{f_i}(\mathbf{r})$, $i=1, 2, \dots, n$), ще измерваме собствените стойности f_i със съответните вероятности W_i :

$$\begin{array}{ll} \text{измервана стойност} & f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \\ \text{вероятност} & W_1, W_2, W_3, \dots, W_n. \end{array}$$

Ако $\psi(\mathbf{r}) = \psi_{f_k}(\mathbf{r})$, т.е. ако измерването се извършва в едно от собствените състояния ψ_{f_k} , то $W_k = 1$, а $W_i = 0$ ($i \neq k$).

От гледна точка на принципа на суперпозицията за този случай можем да запишем

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= 0.\psi_{f_1} + 0.\psi_{f_2} + \dots + 1.\psi_{f_k} + \dots + 0.\psi_{f_n}, \\ C_k &= 1, \quad C_i = 0, \quad i \neq k. \end{aligned} \quad (6.38)$$

А сега да разгледаме несобственото състояние $\psi(\mathbf{r})$, което е суперпозиция от две състояния ψ_{f_1} и ψ_{f_2} :

$$\psi(\mathbf{r}) = C_1\psi_{f_1}(\mathbf{r}) + C_2\psi_{f_2}(\mathbf{r}). \quad (6.39)$$

От условието за нормировка на коефициентите (вж. § 7.1) имаме

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1. \quad (6.40)$$

При измерването в това състояние получаваме f_1 или f_2 съответно с вероятности f_1 и W_2 . Вероятността да получим f_n (при $n \neq 1, 2$) е нула, т.е. $W_n = 0$, следователно

$$W_1 + W_2 = 1. \quad (6.41)$$

Сравняването на (6.40) и (6.41) ни подсказва предположението $W_k = |C_k|^2$, което се потвърждава от експеримента.

Да обобщим: за несобствено състояние, което е суперпозиция от собствени състояния имаме, че

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_i C_i \psi_{f_i}(\mathbf{r}). \quad (6.42)$$

При измерване получаваме една от собствените стойности f_1, f_2, \dots, f_n съответно с вероятност W_1, W_2, \dots, W_n . Тези вероятности се определят от квадрата на модула на съответния суперпозиционен коефициент:

$$W_k \equiv W(f = f_k) = |C_k|^2, \quad \sum_k W_k = \sum_k |C_k|^2 = 1. \quad (6.43)$$

В това се състои и физическият смисъл на коефициентите C_k – квадратът $|C_k|^2$ определя вероятността да измерим в несобствено състояние k -тата собствена стойност.

РЕЗЮМЕ

Вълните на Дьо Бройл са „особени вълни“. При тях нищо не се „вълнува“. Вълновата функция на вълните на Дьо Бройл няма физичен смисъл. Материалните вълните имат статистически, вероятностен характер – квадратът на модула на вълновата функция в дадено място определя вероятността да намерим частицата в това място. Вълните на Дьо Бройл са вълни на вероятността. Във връзка с физическия смисъл на вълновата функция в квантовата механика се използват нормирани ψ -функции:

$$\int_V |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = 1.$$

Свободното движение на частица се описва с вълновата функция на плоска вълна

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \text{const} \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] = \text{const} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\right].$$

Вълновата функция е ограничена, еднозначна и непрекъсната.

Вълновата функция на система от невзаимодействащи си частици е равна на произведението от вълновите функции на отделните частици.

Съотношението за неопределеност на координатите и импулса свързва неопределеностите на двете величини. То утвърждава, че не могат да се измерят едновременно с абсолютна точност положението и импулсът на обекта. Колкото по-точно се опитваме да определим положението на обекта, т.е. колкото по-малко е Δy , толкова по-голяма ще бъде неопределеността в импулса Δp_y ; ако се опитаме да измерим импулса, то положението на обекта ще се окаже неопределено:

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2.$$

Съотношението за неопределеност съвсем не забранява да се измери една от двете величини – само едната може да бъде измерена точно.

В класическата механика състоянието напълно се определя от стойностите на обобщените координати и импулси в даден момент, в частност от декартовите координати и импулсите. Щом е известно състоянието, можем да пресметнем стойностите на всички физични величини; при известно състояние в един начален момент законите на механиката позволяват да бъде определено нейното състояние във всеки следващ момент; в началния момент състоянието ѝ може да бъде определено опитно.

Поради съотношението за неопределеност в квантовата физика – когато положение е точно, то импулсът е неопределен (и обратно) състоянието на микрообектите не може да се опише така както в класическата физика. В § 6.2 видяхме, че тяхното поведение се описва с вълновата функция $\psi(\mathbf{r}_j, t)$. Подчертахме, че по-нататък ще стане ясно, че тази функция носи в себе си не само информация за характера на движението на системата, но и за стойностите на физичните величини, които го определят. Затова състоянието на една квантова система в произволен момент от времето t се описва с вълновата функция $\psi(\mathbf{r}_j, t)$, която се нарича още функция на състоянието.

Тълкуването на вероятностите в квантовата и класическата механика е принципно различно. Всяко състояние на квантовомеханичната система се характеризира с онзи пълен набор от величини (независими!), чието едновременно измерване в това състояние е възпроизводимо.

Измерването на квантовомеханични величини може да бъде възпроизводимо и невъзпроизводимо. В първия случай имаме собствени състояния и за дадена величина при измерването се получава една стойност – собствена. Собственото състояние се характеризира с пълен набор от физични величини и се описва със собствена ψ -функция.

Принципът на суперпозицията гласи, че ако за системата са възможни състояния с вълнови функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, тя може да се намира и в състояние с вълнова функция, която е линейна комбинация от тях:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_i C_i \psi_i.$$

Квадратът на модула на коефициентите $|C_i|^2$ определя вероятността, с която се измерва величината f в това несобствено състояние. Всички собствени функции на една физична система образуват ортонормирана система:

ВЪПРОСИ

1. Защо тълкуването на Шрьодингер се оказва некоректно?
2. Защо вълната на Дьо Бройл не може да бъде интерпретирана като вълна от микрочастици подобно на звуковата вълна?
3. Физически на какво е пропорционален интензитетът на вълната на микрочастици, преминали през два отвора?
4. Има ли физичен смисъл вълновата функция?
5. Защо е необходимо да се нормира вълновата функция?
6. Как се нормира вълновата функция на свободна частица?
7. Какви свойства притежава вълновата функция?
8. Каква е връзката между вълновата функция на система от невзаимодействащи си частици и функциите на частиците?
9. На какво се дължи неопределеността при измерването на микрообекти?
10. Каква е връзката между неопределеностите на две несъвместими физични величини – x и p_x ?
11. Как ще обясните физически съотношението на Хайзенберг за импулса и координатите на една частица?
12. Може ли да измерим точно величините на положението и на импулсите на квантова система? А едната от тях?
13. Как описваме състоянието в една класическа система?
14. Как описваме състоянието в една квантова система?
15. Коя е функцията на състоянието и защо?
16. Защо от гледна точка на функцията, с която описваме състоянието, то има вероятностен характер?
17. По какво се различават тълкуванията на вероятността в класическата и в квантовата физика?
18. Какво е пълен набор от физични величини?

19. По какво принципно се различават измерванията в класическата и в квантовата механика?
20. Какво разбираме под собствено състояние и собствени стойности на физичните величини?
21. Кое състояние е изродено?
22. Какво значи, че една собствена стойност е N -кратно изродена?
23. Какви стойности получаваме при измерване на физичните величини в несобствено състояние?
24. В какво се състои суперпозицията в опитите с дифракция на електрони от един и от два отвора?
25. Какво разбирате под ортонормирани вълнови функции?
26. Какъв е физичният смисъл на коефициентите C_i в израза

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_i C_i \psi_i(\mathbf{r}, t)?$$

ЗАДАЧИ

1. Докажете, че $\psi^*(x, t)\psi(x, t)$ е винаги реално число – положително или нула.
2. Състоянието на частица се описва с ψ -функцията $\psi = Ae^{i\omega t} e^{-(x^2/2a)}$, където ъгловата честота ω и „дължината“ a са известни константи. Намерете нормираната вълнова функция.
3. Нормирайте вълновата функция $\psi(x) = A \sin(2\pi x/L)$ в областта $0 < x < L$.
4. Собствените състояния на частица с маса m в едномерна потенциална яма се описват с вълновите функции $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L}$, $n = 1, 2, \dots$, на които съответстват енергиите E_n (където $n = 1, 2, \dots$). Частицата е в състояние с вълнова функция $\psi(x) = (3\psi_2 + \psi_9)/5$. Нормирана ли е тази функция? Какви стойности на енергията ще бъдат измерени в това състояние? Каква е вероятността да бъдат измерени тези стойности?
5. Могат ли функциите $\sin \varphi$ и $\operatorname{tg} \varphi$ да бъдат вълнови функции?
6. Какво ограничение трябва да наложим на функцията $\exp(im\varphi)$, за да бъде тя вълнова функция?
7. Интересуваме се от физичната величина f и при еднократно измерване сме получили $f = f_k$. Можем ли да направим извод, че до измерването частицата се е намирала в състояние, в което $f = f_k$?