

## Приложение V

### КОМПЛЕКСНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА ТРЕПТЕНИЯ И ВЪЛНИ

Периодично движение на едномерна система около центъра на устойчиво равновесие, когато отклонението е малко, е хармонично, т.е. извършва се по косинусов или синусов закон. Ще припомним уравнението на осцилатора и неговите решения:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (\text{V.1})$$

$$x = c \cos \omega_0 t + d \sin \omega_0 t, \quad (\text{V.2})$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (\text{V.3})$$

Решението на уравнение (V.1) освен във вида (V.2) и (V.3) може да се представи и в комплексен вид:

$$x = \frac{1}{2} \tilde{A} e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \tilde{B} e^{-i\omega_0 t}. \quad (\text{V.4})$$

Тук и по-надолу знакът „ $\sim$ “ означава комплексни числа. Заместването в (V.1) доказва, че това наистина е решение. Разбира се,  $x$  трябва да бъде реално число. Сумата от две комплексни числа е реална, ако те са комплексно спрегнати. Следователно  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B}$  са комплексно спрегнати. Нека

$$\tilde{A} = c - id, \quad \tilde{B} = \tilde{A}^* = c + id. \quad (\text{V.5})$$

Тук знакът „ $*$ “ (чете се звезда (asterisk)) означава комплексно спрегнат. Като си припомним формулата на Ойлер (Euler)  $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ , от (V.4) и (V.5) получаваме (V.2)

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} (c - id) (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + \frac{1}{2} (c + id) (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) \\ &= c \cos \omega_0 t + d \sin \omega_0 t. \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

Разбира се, от (V.4) може да се премине и към (V.3). Но тогава трябва да представим комплексните константи в полярна форма:

$$\tilde{A} = ae^{i\phi}, \quad \tilde{B} = ae^{-i\phi}. \quad (\text{V.7})$$

Ще отбележим, че  $\tilde{A} = \tilde{B}^*$ . Заместваме в (V.4)

$$x = \frac{1}{2} ae^{i(\omega_0 t + \phi)} + \frac{1}{2} ae^{-i(\omega_0 t + \phi)} \quad (\text{V.8})$$

и използвайки формулата на Ойлер, действително получаваме (V.3), т.е.  $x = a \cos(\omega_0 t + \phi)$ .

И още едно полезно представяне. Сумата на две комплексно спрегнати числа е равна на два пъти реалната част от едното, т.е.

$$x = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} \tilde{A} e^{i\omega_0 t} \right) = \operatorname{Re} \left( \tilde{A} e^{i\omega_0 t} \right). \quad (\text{V.9})$$

Тук  $\tilde{A} = ae^{i\phi}$  се нарича комплексна амплитуда. Често се пише

$$\tilde{x} = \tilde{A} e^{i\omega_0 t}. \quad (\text{V.10})$$

Нещо повече, знакът за комплексно число  $\square$  се изпуска, т.е.

$$x = A e^{i\omega_0 t}, \quad (\text{V.11})$$

като  $x$  и  $A$  са комплексни и се подразбира, че реалната величина е  $x = \operatorname{Re} \left( A e^{i\omega_0 t} \right)$ .

Вълновото уравнение за величината  $B$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{V.12})$$

има решение

$$B = A \cos(\omega t + kx). \quad (\text{V.13})$$

Аналогично на разгледаното за осцилатора можем да представим решението в комплексен вид:

$$B = A \exp(i(\omega t - kx)). \quad (\text{V.14})$$

Величината  $B$  и амплитудата  $A$  са комплексни, но като правило обозначението за комплексност се пропуска. Ще отбележим, че величината  $B$  е реалната част на дясната страна на уравнението –  $\operatorname{Re} B = \operatorname{Re} [A \exp(i(\omega t - kx))]$ .