

Приложение II

БЯГАЩА И СТОЯЩА ВЪЛНА. ФАЗОВА И ГРУПОВА СКОРОСТ

II.1. Бягаща и стояща вълна

Да разгледаме вълна, разпространяваща се по оста X . Такива са напречната вълна на опъната струна, надлъжната вълна в тръба с газ и светлинната вълна. Нейната ъглова честота е ω , а дължината на вълната е λ ($k=2\pi/\lambda$). Видът на вълната на една физична величина се дава с формулата

$$B = A \cos(\omega t - kx), \quad (\text{II.1}),$$

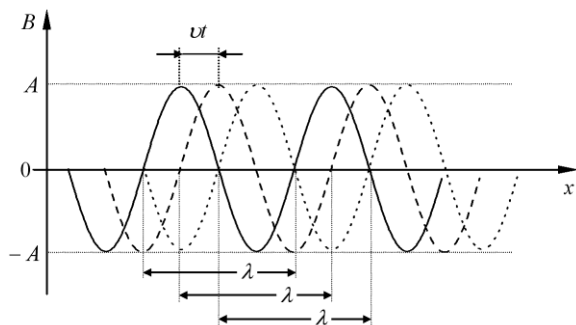
където B е отклонението на величината от равновесното ѝ положение, а A е нейната амплитуда.

В момент от времето $t = 0$ вълната има вида

$$B = A \cos kx, \quad (\text{II.2})$$

който е показан на фиг. II-1 с плътна линия. Изразът (II.2) описва формата на вълната, която се повтаря с период (пространствен), равен на дължината на вълната. Знакът минус в (II.1) означава, че вълната се движи надясно. Нека означим нейната скорост с v . Тогава след време t всеки участък на вълната ще се премести надясно на разстояние vt (в представения случай $t = T/4$ в прил. II T е периодът на трептене). На фиг. II-1 това е показано с пунктирна линия. В този момент t вълната се описва от (II.1). След половин период от време ($t = T/2$) вълната ще се премести на разстояние $\lambda/2$ – това е показано с нахъсана линия на фиг. II-1. От фигурата е ясно, че вълната се движи надясно и с течение на времето всяка точка изменя положението си от A до $-A$. Такава вълна се нарича бягаща.

Преди да разгледаме друг вид вълни – стоящите вълни, ще съберем две вълни с противоположни посоки. Това ще ни покаже как се получават стоящите вълни и ще ни улесни в анализа им.



Фиг. II-1. Бягаща вълна – за време t вълната се премества на разстояние vt .

Нека разгледаме права вълна, разпространяваща се надясно с амплитуда A :

$$B_1 = A \cos(\omega t - kx), \quad (\text{II.3})$$

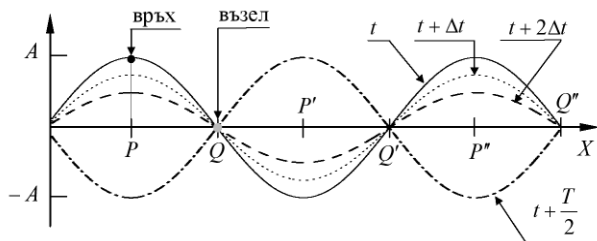
и обратна вълна, разпространяваща се наляво със същата амплитуда:

$$B_2 = A \cos(\omega t + kx). \quad (\text{II.4})$$

Това могат да бъдат вълните в струна, в тръба, запълнена с газ или течност или на светлината. Съгласно принципа на суперпозицията в произволна точка вълните се събират и

$$\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x = 0. \quad (\text{II.5})$$

Виждаме, че всяка точка трепти с честота ω . Но амплитудата на трептене зависи от положението на точките. Новата вълна се нарича стояща вълна. Има точки, които трептят с амплитуда $2A$ (за тях $\cos kx = \pm 1$, т.е. $kx = n\pi$), и такива, които не трептят въобще (за тях $\cos kx = 0$, т.е. $kx = (2n+1)\pi/2$). Стоящата вълна в четири момента от времето (t , $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$ и $t + T/2$) е представена на фиг. II-2. В момент t

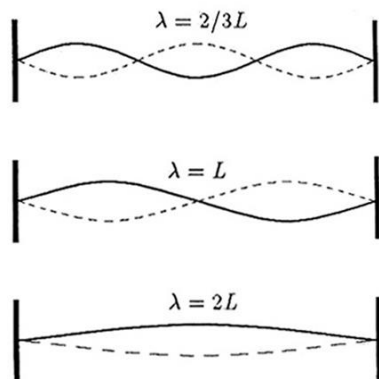


Фиг. II-2. Стояща вълна в четири последователни момента от време

вълната е представена с пълтна линия, в следващия момент $t + \Delta t$ – с пунктирана линия, а в следващия $t + 2\Delta t$ – с накъсана линия.

След половин период, т.е. в момент $t + T/2$, вълната има вида, представен с щрих-пунктираната крива. В положения P , P' и P'' вълновата величина трепти с максимална амплитуда $2A$. В точките P , P' и P'' вълната има връх. В положения Q , Q' и Q'' вълновата величина не се променя. В точките Q , Q' и Q'' вълната има възел. Разстоянието между два съседни върха и разстоянието между два съседни възела са еднакви и равни на $\lambda/2$. Сравнението на фиг. II-1 и фиг. II-2 ни помага да разберем разликата между бягаща и стояща вълна. При бягащата вълна всяка точка трепти с еднаква амплитуда. Разстоянието между два максимума е λ .

Да разгледаме струна, закрепена на двата края (такива са например струните на китарата и цигулката). Когато опънем струната, в нея се възбуждат две вълни с еднаква честота, едната от които се разпространява надясно, а другата – наляво. Двете вълни интерферират и се получава стояща вълна. На границата, в точките на закрепване, отклонението на струната е нула. При това условие на дължината на струната L могат да се поместят цяло число полуълни – една, две, три и т.н. – фиг. II-3. Названията на съответните вълни са дошли от музика



Фиг. II-3. Стоящи вълни в струна – отдолу нагоре: основен тон, първи обертон, втори обертон.

та. Те се наричат: основен тон, или първа хармоника при $\lambda = 2L$; първи обертон или втора хармоника при $\lambda = L$; втори обертон или трета хармоника при $\lambda = 2/3L$ и т.н.

II.2. Фазова и групова скорост

Скорост на вълната v се нарича скоростта, с която се премества гребенът на вълната. (Скоростта на вълната е различна от скоростта на частиците на средата. Например: скоростта на вълната на струната е насочена по дължината ѝ, а скоростта на частиците ѝ е насочена перпендикулярно на самата струна; скоростта на морската вълна е насочена по повърхността на морето, а скоростта на частиците

(приблизително) е по вертикала нагоре–надолу.) Тъй като за период T вълната (гребенът) изминава разстояние λ , то

$$v = \lambda/T. \quad (\text{II.6})$$

Съществуват среди, в които вълни с различна дължина на вълната (респективно с различни честоти) се разпространяват с една и съща скорост. Такива среди се наричат недиспергиращи среди. Във вакуума и в атмосферата електромагнитните вълни с различна λ имат една и съща скорост – за електромагнитните вълни тези среди са недиспергиращи. В такива среди често наричат вълните недисперсни. Но ако различни дължини на вълните (съответно вълни с различни честоти) имат различни скорости, средата е диспергираща, а вълната дисперсна. Стъклото е диспергираща среда за светлината, а вълната в него – дисперсна.

Ще се запознаем с две важни физични величини – фазова и групова скорост. Фазовата скорост на вълната се определя от пътя, изминат за единица време от нея. Тъй като за един период T вълната изминава път една дължина на вълната, очевидно е, че скоростта е λ/T . Лесно се доказва, че тази скорост е равна на ω/k :

$$v_{\text{ph}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu = \frac{\lambda}{2\pi} 2\pi\nu = \frac{\omega}{k}. \quad (\text{II.7})$$

С тази скорост се разпространяват максимумът на вълната, нейният минимум, нулевото отклонение от равновесието и въобще произволна фаза. Затова тя се нарича фазова скорост и се бележи с v_{ph} . Разглеждаме две вълни с честоти ω_1 и ω_2 , разпространяващи се в недиспергираща среда. Техните фазови скорости съвпадат, т.е. $v_{\text{ph1}} = v_{\text{ph2}} = v_{\text{ph}}$. Нека вълните изминават разстояние l за време t (фиг. II-3). Фазовата скорост е

$$v_{\text{ph}} = l/t. \quad (\text{II.8})$$

Скоростта на максимума v_{max} на сбора на двете вълни, както се вижда от фиг. II-3, е същата:

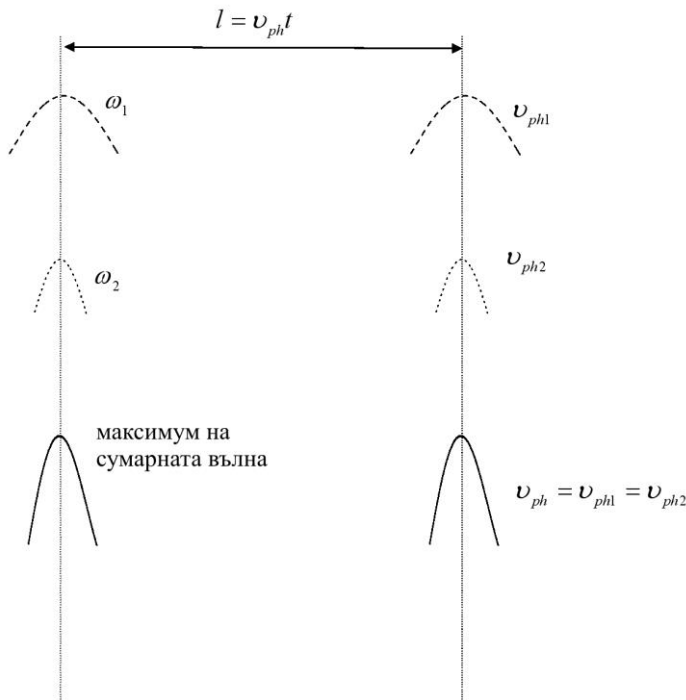
$$v_{\text{max}} = l/t. \quad (\text{II.9})$$

Като отчетем (II.8), лесно записваме за произволна честота ω и вълново число k :

$$v_{\text{max}} = v_{\text{ph}} = \omega/k. \quad (\text{II.10})$$

Да погледнем аналитично на въпроса. Имаме две вълни с различни честоти и вълнови числа съответно ω_1 , k_1 и ω_2 , k_2 :

$$\begin{aligned} B_1 &= A \cos(\omega_1 t - k_1 x), \\ B_2 &= A \cos(\omega_2 t - k_2 x). \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$



Фиг. II-4. Разпространение на две вълни в недиспергираща среда.

В произволна точка вълните се сумират и се получава

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right). \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Означаваме

$$\omega_1 - \omega_2 = d\omega, \quad k_1 - k_2 = dk, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega, \quad \frac{k_1 + k_2}{2} = k. \quad (\text{II.13})$$

Тогава за резултантната вълна имаме

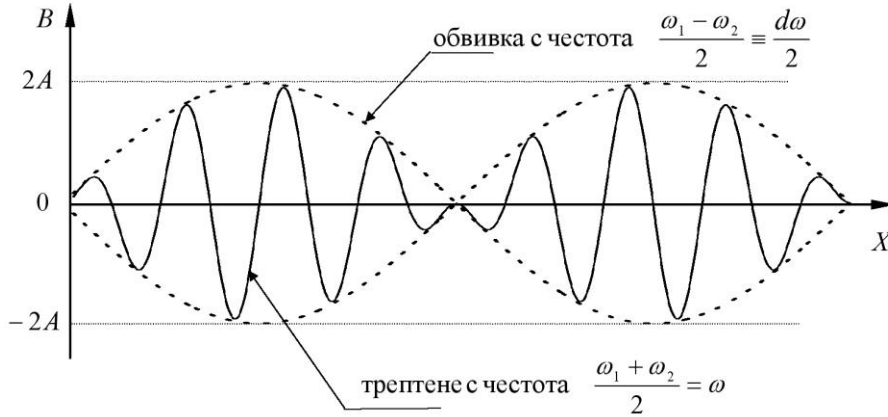
$$B = 2A \cos\left(\frac{d\omega}{2} t - \frac{dk}{2} x\right) \cos(\omega t - kx). \quad (\text{II.14})$$

Членът $\cos(\omega t - kx)$ представлява една вълна с честота ω , разпространяваща се с вълново число k , а членът

$\cos[(d\omega/2)t - (dk/2)x]$ – нейната обвивка. Обвивката също се изменя хармонично (по косинусов закон), но много бавно. Да подчертаем, че $d\omega \ll \omega$ и $dk \ll k$ (това много добре се вижда, ако честотите на двете вълни са близки $\omega_1 \approx \omega_2$). Графиката на (II.14) е показана на фиг. II-5.

Скоростта на максимума на сумарната вълна се определя от $\cos((d\omega/2)t - (dk/2)x) = 1$, т.е.

$$\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x = 0. \quad (\text{II.15})$$



Фиг. II-5. Картина на резултантната вълна на сумата от две вълни с различни честоти, съответно ω_1 и ω_2 .

Или като преобразуваме последното уравнение, получаваме

$$v_{\max} \equiv \frac{x}{t} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (\text{II.16})$$

Тази скорост се нарича групова още скорост (скоростта на максимума на групна вълна (в случая те са две):

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (\text{II.17})$$

Тъй като $\omega = kv_{\text{ph}}$, да заместим ω в (II.17) и да диференцираме:

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_{\text{ph}}) = v_{\text{ph}} + k \frac{dv_{\text{ph}}}{dk}. \quad (\text{II.18})$$

Но средата е недиспергираща, т.е. фазовата скорост не зависи от честотата или все едно от дължината на вълната λ , т.е. от вълновото

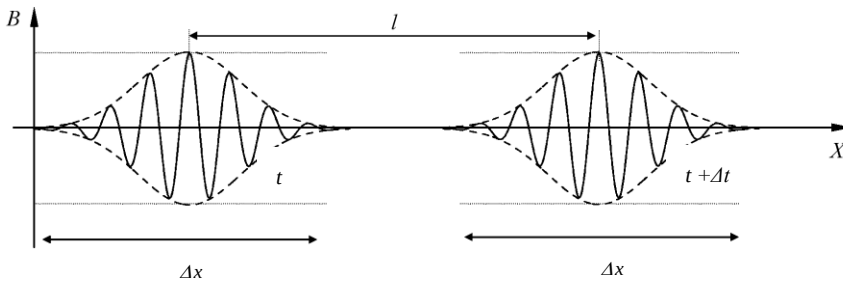
число $k = 2\pi/\lambda$. Следователно $d\nu_{ph}/dk = 0$ и вторият член в (II.18) е нула. С други думи, максимумът на сумарната вълна (на обвивката) има еднаква скорост с фазовата:

$$\nu_{gr} \equiv \nu_{max} = \nu_{ph} = \frac{\omega}{k}. \quad (II.19)$$

Ние това го показахме качествено на фиг. II-4.

Как вълната пренася енергия? Енергията на осцилатора е $E = m\omega^2 A^2/2$. Можем да разгледаме среда с маса m като съвкупност от много осцилатори с маса Δm ($\Delta m \ll m$). Всеки един от тях има енергия $E = \Delta m\omega^2 A^2/2$. С други думи, $E \propto A^2$. В нашия случай максимумът на сумарната вълна (на обвивката) има най-голяма амплитуда $A_y = 2A$. Следователно енергията на вълната е съсредоточена в точките с тази (максимална) амплитуда на фиг. II-5.

Ако сумираме не две, а много вълни с различни честоти $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_k$, сумарната вълна се нарича вълнов пакет. Вълновият пакет е локализиран в пространството. Всеки е виждал (и чувствал) вихрушка – тя е вълнов пакет. В недиспергираща среда вълновият пакет не се променя (фиг. II-6) във времето.



Фиг. II-6. Вълнов пакет в недиспергираща среда.

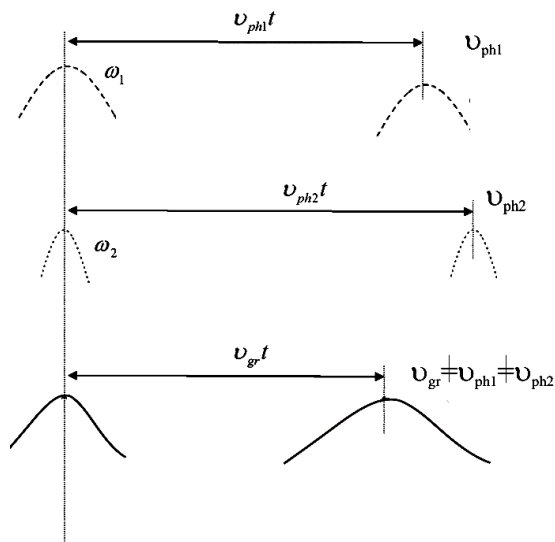
А сега да разгледаме диспергираща среда. В нея две вълни с честоти ω_1 и ω_2 имат различни фазови скорости – $\nu_{ph1} \neq \nu_{ph2}$. Качествената картина е показана на фиг. II-7.

Скоростта на максимума ν_{max} ($\nu_{max} \equiv \nu_{gr}$) е различна от ν_{ph1} и ν_{ph2} . Показахме ((II.16) и (II.17)), че $\nu_{max} = \nu_{gr} = d\omega/dk$. Като използваме (II.18) (за диспергираща среда $d\nu_{ph}/dk \neq 0$), виждаме, че

$$\nu_{gr} = \nu_{ph} + k \frac{d\nu_{ph}}{dk} \Rightarrow \nu_{gr} \neq \nu_{ph}. \quad (II.20)$$

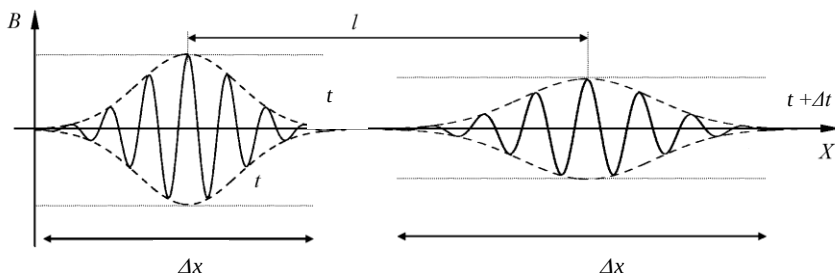
Тъй като вълните с различна честота, от които се състои вълновият пакет, в диспергираща на среда имат различни фазови скорости, то след време Δt вълновият пакет се размива (фиг. II-8).

Нека накрая накратко обобщим.



Фиг. II-7. Разпространение на две вълни в диспергираща среда.

Груповата скорост $v_{gr} = d\omega/dk$ е скоростта на максимума на вълните. Тъй като в максимума е съсредоточена енергията на вълната, тя е скоростта на разпространение на енергията. Фазовата скорост е скоростта на фиксирана фаза. В недиспергираща среда груповата и фазовата скорост са еднакви – $v_{gr} = v_{ph}$, а в диспергираща се различават – $v_{gr} \neq v_{ph}$.



Фиг. II-8. Вълнов пакет в диспергираща среда.

В диспергираща среда вълновият пакет се размива, т.е. неговият максимум намалява.