

Глава 1

СПЕЦИАЛНА ТЕОРИЯ НА ОТНОСИТЕЛНОСТТА

- § 1.1. Трансформации на Галилей и тяхната ограниченост
Класическата физика за големи скорости; „Начала“ и законите на движение; I закон на Нютон; определение; абсолютни пространство и време; инерциална отправна система; II закон; трансформации на Галилей; инвариантност; принцип на Галилей; еластичен удар и сферична вълна; група на Галилей; генератори, подгрупи и равноправие на точки и направления. 2
- § 1.2. Опит на Майкелсън и Морли
Ефир; Земя и ефир; разпространение на светлината успоредно и перпендикулярно на скоростта на Земята; интерферометър на Майкелсън и Морли; отместване на интерференционните ивици; резултати от опита на Майкелсън и Морли. 9
- § 1.3. Два принципа на релативистката механика и относителност на едновременността
 $v \sim c$; пет причини за изучаването на $v \sim c$; постоянство на c ; принципи на СТО – първи и втори; формулировка на втория принцип за физичните закони; едновременност в една ОС; относителност на едновременността – пример с две ракети; извод. 14
- § 1.4. Забавяне на времето и съкращаване на дължината
Забавяне на времето – космически кораб с наблюдатели в него и на Земята; времето за единия и другия; собствено време; релативистки фактор; съкращаване на дължината – извод; собствена дължина. 18
- § 1.5. Трансформации на Лоренц
Радиус-вектори на точка в неподвижна и движеща се ОС и I принцип на СТО; трансформации на координатите и времето и линейност; трансформации на Лоренц; обратни трансформации; 4-мерен вектор, интервал, граница при $v \rightarrow 0$. 21

- § 1.6. Време и дължина, и трансформации на Лоренц
Забавяне на времето и трансформации на Лоренц; скъсяване на дължината и трансформации на Лоренц; пример. 27
- § 1.7. Светлинен конус
Мирови линии; такива на светлината; светлинен конус; бъдеще; минало; псевдоедновременно събития; едновременност и едноместност; анимация. 29
- § 1.8. Релативистка маса
Релативистка маса; инертност и релативизъм; скоростите в две инерциални отправни системи; еластичен удар в двете системи; масата като функция на скоростта. 32
- § 1.9. Релативистки импулс и релативистка енергия
Релативистки импулс, Айнщайн – връзка между енергията и масата; пример; енергия на връзката; кинетична енергия; извод на връзката между енергията и импулса. 35

ДОПЪЛНИТЕЛНА ЛИТЕРАТУРА

1. E. F. Taylor and J. Archibald Wheeler, *pacetime Physics: Introduction to Special Relativity*, 2nd ed. W. H. Freeman & Company, 1992.
2. Hall B., *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction*, Springer, 2nd ed., 2015.
3. Nadjafikhah M. and A. Forough, *Galilean geometry of motions*, Applied Sciences, Vol.11, 2009, 91-105.

§ 1.1 ТРАНСФОРМАЦИИ НА ГАЛИЛЕЙ И ТЯХНАТА ОГРАНИЧЕНОСТ

Понятието съвременна физика (в западната литература modern physics) се използва за физиката на XX в. До началото на този век двете главни области на физиката – механиката и електромагнетизмът – се развивали независимо една от друга и изглеждало, че нямат връзка помежду си. Законите на механиката и на електромагнетизма били доказани теоретично и експериментално и физиците били сигурни, че те повече не могат основно да се изменят и подобряват. Но за обща изненада в началото на XX в. те се сблъскали с много нови и фундаментални проблеми. Първият бил, че добре установеният и многократно проверен за тела, движещи се с малки скорости, втори закон на Нютон не дава коректни резултати за тела, движещи се с големи скорости, сравними със скоростта на светлината $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Вторият – оказало се, че приетите дотогава трансформации (преобразувания) от

една отправна система (ОС) в друга не могат да се използват при големи скорости за двама наблюдатели, движещи се относително един спрямо друг. При такива преобразувания законите на механиката и на електромагнетизма не били еднакви за двамата наблюдатели.

Тези трудности били преодоляни от Алберт Айнщайн (Albert Einstein), който през 1905 г. разработил за тела или наблюдатели (т.е. за отправни системи), движещи се с произволна равномерна скорост, *специалната теория на относителността* (СТО), а през 1915 г. – за отправни системи, движещи се с ускорение, *общата теория на относителността*.

В своето съчинение „Начала“ в пет кратки фрази Нютон формулира трите закона на движението, а след това, основавайки се на тези закони, формулира и закона за всеобщото привличане, който е демонстрация за съществуващото единство на всичко ставащо на Земята и във Вселената. Навсякъде във Вселената господстват едни и същи закони на механиката.

Първият закон на Нютон въвежда понятието *инерциална отправна система* (ИОС). Затова много специалисти го считат за *определение на ИОС*. Първият закон на Нютон гласи:

Има такава отправна система, в която, ако тялото не си взаимодейства с друго тяло, то запазва състоянието си на покой или на праволинейно равномерно движение. Такава система се нарича инерциална.

Когато Нютон казвал, че ако на тялото в една ИОС не действа друго тяло, то е в покой или се движи равномерно праволинейно, то това означавало, че на това тяло не действа никакво друго тяло от космическото пространство (от Вселената). Но във Вселената няма опорни стълбове или указателни табели. Как тогава да разберем дали тялото е в покой, или се движи равномерно праволинейно? Няма отговор. *Но той бил нужен на Нютон и Нютон го открил.*

Той въвел понятието *универсално абсолютно пространство*, което по определение навсякъде е еднакво и неподвижно. Именно въвеждането на понятието абсолютно пространство позволило да се разсъждава или за покой, или за движение по отношение на това пространство, т.е. по същество говорим за абсолютен покой и абсолютно пространство.

Но все пак как можем да покажем дали праволинейното движение е равномерно? За тази цел можем да отмерим еднакви дължини по правата линия и да видим дали изминаваме тези дължини за равни интервали от време.

За да се измерва времето обаче, са нужни часовници. А как да узнаем дали те са точни? Има ли непогрешими еталони, с които можем да проверим? Нещо повече, има ли такива еталони, с които можем да се уверим, че времето тече еднакво във всички ИОС независимо от тяхната скорост?

Задоволителни отговори на тези въпроси няма. Обаче сами по себе си те подсказват, че в нашето подсъзнание съществува някаква смътна представа за времето като нещо загадъчно и величествено, и в същото време близко и разбираемо за всички ни понятие. Именно по тази

причина Нютон въвежда понятието за *абсолютно време* – или както той сам го нарича – „абсолютно“, истинско време.

Айнщайн показал, че абсолютното пространство и абсолютното време не съществуват, особено при големи скорости на движение. Но за малки скорости на движение, даже и за максималните такива, постижими за съвременната техника, тези твърдения се оказали поразително ефективни.

Опирайки се на тези две понятия, Нютон е успял със своята гениалност да придаде на законите основни космични значимости.

ИОС е свързана със свободно тяло, на което не му действа друго тяло. В общия случай то се движи равномерно без ускорение. До подобен извод пръв е достигнал Галилей (Galileo), като формулирал понятието за „инерция“ (което е и един от най-големите му приноси за развитието на физиката). Концепцията за инерция гласи следното: *всеки обект в състояние на движение притежава „инерция“, която поддържа процеса на движение дотогава, докато върху тялото не въздействат външни сили*. Този извод е станал и крайъгълен камък в закона за движението, формулиран от Нютон. Следователно можем да кажем, че ИОС, т.е. нейното начало, се движи без ускорение. Съществуват безброй много ИОС, които се движат с постоянни скорости една спрямо друга.

Във втория си закон Нютон свързва силата с характеристиките на движението. Той е извел втория закон за скорости, много по-малки от скоростта на светлината. Ако на едно тяло действа сила, то получава ускорение, което е пропорционално на силата:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \Leftrightarrow \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (1.1)$$

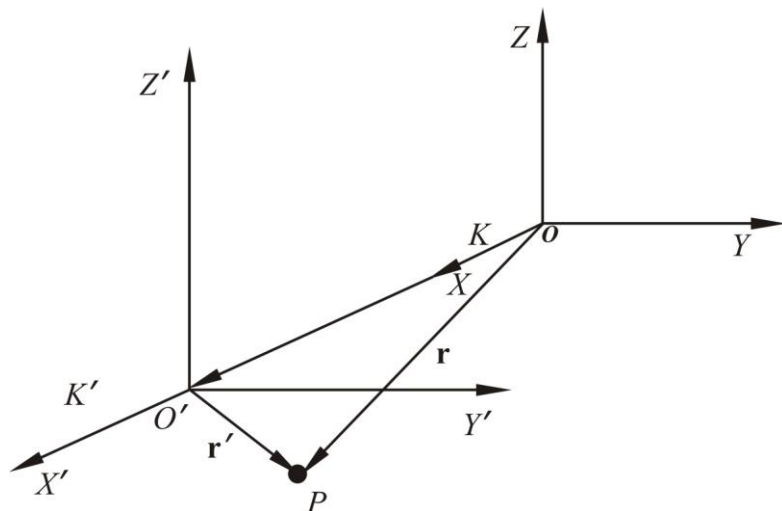
Ще запишем втория закон чрез импулса $\mathbf{p} - \mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Тъй като $\mathbf{a} = d\mathbf{v} / dt$, можем да го запишем като

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d m \mathbf{v}}{dt} \Rightarrow \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (1.2)$$

Във вида (1.2) вторият закон на Нютон (1.1) е валиден за произволни скорости, като се отчита зависимостта на масата от скоростта, както следва от релативистката физика (вж. § 7).

Вторият закон на Нютон се нарича още *уравнение на движението*. Галилеевите трансформации дават връзката между координатите и скоростите в две ИОС. Да разгледаме неподвижната ОС K и ОС K' , която се движи по оста X (фиг. 1-1). Скоростта на системата K' е $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{x}^0$ ($\mathbf{x}^0$ е единичен вектор по оста X). Тогава връзката между радиус-векторите $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ на т. P в двете отправни системи е следната:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 t. \quad (1.3)$$



Фиг. 1-1. ИОС K' се движи по оста X спрямо ИОС K с постоянна скорост v_0 .

В скаларен вид, добавяйки абсолютното време, можем да запишем

$$\begin{aligned} x &= x' + v_0 t, & x' &= x - v_0 t, \\ y &= y', & y' &= y, \\ z &= z', & z' &= z, \\ t &= t', & t' &= t. \end{aligned} \quad \text{или} \quad (1.4)$$

Това са *трансформациите на Галилей за координатите*. Към тях е добавено твърдението за абсолютния характер на времето, т.е. времето е едно и също в двете координатни системи $t = t'$. Такова предположение е допустимо в рамките на класическата механика, където $v \ll c$.

Като диференцираме (1.4) по времето, ще получим *трансформациите на скоростите*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx'}{dt'} + v_0, & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt'}, & \frac{dz}{dt} &= \frac{dz'}{dt'} & \text{или} \\ v_x &= v'_x + v_0, & v_y &= v'_y, & v_z &= v'_z, & \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

При повторно диференциране получаваме *трансформациите на ускорението*

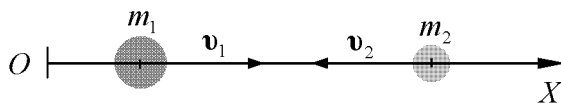
$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x'}{dt'^2}, & \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y'}{dt'^2}, & \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2z'}{dt'^2} & \text{или} \\ a_x &= a'_x, & a_y &= a'_y, & a_z &= a'_z & \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}', \end{aligned} \quad (1.6)$$

т.е. ускорението в двете системи е едно и също.

Величина, която остава постоянна в различни отправни системи, се нарича инвариантна. Съгласно II закон на Нютон, след като ускорението е едно и също в двете ИОС, силата $\mathbf{F}$ също е инвариантна във всички ИОС. Получавайки този резултат, можем да формулираме принципа на относителността на Галилей (понякога го наричат принцип на относителността на Нютон):

Законите на механиката са едни и същи във всички инерциални отправни системи. Често се формулира: законите на Нютон са инвариантни относно трансформациите на Галилей.

Като пример можем да разгледаме еластичен удар, при който импулсът и пълната кинетична енергия на телата се запазват (фиг. 1-2). На фигурата са показани две тела с маси m_1 и m_2 , които се движат по оста X и до момента преди удара имат съответно скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. След удара скоростите им са съответно $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$.



Фиг. 1-2. Пряк централен удар между две сфери, които до момента на удара се движат по права линия, която минава през центровете им, със скорости съответно $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. При еластичен удар между двете сфери импулсът и енергията на системата се запазват.

От законите за запазване на импулса и енергията можем да запишем

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Това е в отправната система K . Да видим как изглеждат тези закони в относително движещата се със скорост $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{x}^0$ система K' (вж. фиг. 1-1), където скоростите на телата са съответно $\mathbf{v}'_1$ и $\mathbf{v}'_2$ (до удара) и $\mathbf{u}'_1$ и $\mathbf{u}'_2$ (след удара). Трансформациите на Галилей (1.5) за скоростите в случая изглеждат така: $v_1 = v'_1 + v_0$, $v_2 = v'_2 + v_0$, $u_1 = u'_1 + v_0$ и $u_2 = u'_2 + v_0$. Заместваме в (1.7) скоростите в K :

$$\begin{aligned} m_1(v'_1 + v_0) + m_2(v'_2 + v_0) &= m_1(u'_1 + v_0) + m_2(u'_2 + v_0), \\ \frac{m_1(v'_1 + v_0)^2}{2} + \frac{m_2(v'_2 + v_0)^2}{2} &= \frac{m_1(u'_1 + v_0)^2}{2} + \frac{m_2(u'_2 + v_0)^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

След елементарното опростяване (във второто уравнение използваме вече полученото първо уравнение) имаме:

$$\begin{aligned} m_1 v'_1 + m_2 v'_2 &= m_1 u'_1 + m_2 u'_2, \\ \frac{m_1 v'_1}{2} + \frac{m_2 v'_2}{2} &= \frac{m_1 u'_1}{2} + \frac{m_2 u'_2}{2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравненията (1.9) в системата K' имат същия вид, както уравненията (1.7) в системата K . *Законите за запазване на импулса и на енергията са инвариантни при преобразуванията на Галилей.*

В този пример ние считаме масата за независеща от скоростта. Както ще се убедим, това е така при малки в сравнение със скоростта на светлината скорости, т.е. за скорости на класическата механика.

Сега да видим дали трансформациите на Галилей са добри за ^{законите} на електромагнетизма. За *пример* да вземем сферична електромагнитна вълна, разпространяваща се с постоянна скорост c в ОС K :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (1.10)$$

За да е инвариантно в K' , уравнението е необходимо да има вида

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (1.11)$$

Замествайки x, y, z и t от (1.4) в (1.10), получаваме

$$\text{Error! Objects cannot be created from editing field codes.} \quad (1.12)$$

Това означава, че

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \neq K': x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (1.13)$$

$$K': x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0.$$

При галилеевите трансформации законите на електромагнетизма (в примера законът за разпространение на сферична електромагнитна вълна) не са инвариантни. Физиците в миналото срещали непреодолими трудности при обяснението чрез галилеевите трансформации на аберацията на звездите и на опита на Майкелсън (Michelson) и Морли (Morley). Тук ще разгледаме само опита на Майкелсън и Морли.

Математична форма на преобразуванията на Галилей

Съгласно Х. Вайл (Н. Wejl) първото нещо, което трябва да направим при изследването на една физическа система, е да намерим нейните симетрии; в частност трябва да намерим групата от линейни смени на променливите, запазващи вида на съответните за физическата система закони (Х. Вайл, Симетрия, Наука и изкуство, 1969, София).

За класическата механика тези симетрии са установени от Галилей. Фактически това са преобразуванията на Галилей и след това Нютон формулира и съответните диференциални уравнения.

Група на Галилей наричаме 10-мерна група от смени на променливите $(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v_{0x} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_{0y} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v_{0z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Тук: x, y, z са координатите, а t е времето в ОС K в евклидово пространство; x', y', z' са координатите, а t' е времето в ОС K' в такова пространство; $\mathbf{v}_0 = (\nu_{0x}, \nu_{0y}, \nu_{0z})$ е скоростта, с която O', x', y', z' се движи спрямо O, x, y, z (на фиг. 1-1 движението на K' е едномерно по оста X); x_0, y_0, z_0 са произволни константни транскации на пространствените координати, а t_0 е транскация на времето.

Матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in SO(3) = \{(3 \times 3) \text{ ортогонални матрици с} \\ \text{детерминанта } 1\} = \{A_{3 \times 3}: A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det A = 1\} \quad (1.15)$$

задава (еднократно) завъртане на ОС O, x, y, z около началото O . Размерността на групата $SO(3)$ от ротации около нулата в 3-мерното пространство е 3 и образуващи (генератори) са

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{въртене на} \\ \angle \varphi \text{ около ,} \\ \text{оста } Z \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{въртене на} \\ \angle \varphi \text{ около ,} \\ \text{оста } Y \end{array} \right. \quad (1.16)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{въртене на} \\ \angle \varphi \text{ около ,} \\ \text{оста } X \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{транскация} \\ \text{в простран-} \\ \text{ството} \\ \text{и времето} \end{array} \right. .$$

Под генератори на група разбираме множество от елементи на въпросната група, които генерират цялата група: всеки елемент от групата се представя като произведение от краен брой генератори. Например групата $SO(3)$ от въртения около нулата в 3-мерното пространство може да се представи като въртения около оста X , оста Y и оста Z , т.е. въртенията около X, Y, Z генерират цялата $SO(3)$.

Свързаната компонента $SGal(3)$ на групата на Галилей може да бъде представена в полудиректно произведение по следния начин

$$SGal(3) = SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}^4. \quad (1.17)$$

Тук $SO(3)$ са ротации $\|A\|$, $\mathbb{R}^3$ е тримерна скорост $\mathbf{v}$ и $\mathbb{R}^4$ са транскациите $(x_0, y_0, z_0, t_0)^T$, а знакът $\rtimes$ означава полудиректно произведение (Google, semidirect product).

Групата от транскации $\mathbb{R}^4$ прави групата на Галилей афинна: тази група не е подгрупа на общата линейна група $GL(\mathbb{R}^4)$, но върху разликата на два вектора $(x, y, z, t)^T - (x_*, y_*, z_*, t_*)^T$ в $\mathbb{R}^4$ действа линейно:

$$\begin{pmatrix} x' - x'_* \\ y' - y'_* \\ z' - z'_* \\ t' - t'_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v_{0x} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v_{0y} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v_{0z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_* \\ y - y_* \\ z - z_* \\ t - t_* \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Ако отдясно беше $(x_0, y_0, z_0, t_0)^T$, щеше да е афинно преобразувана

Съществуването на 4-мерната добавена група от симетрии – трансляциите $(x_0, y_0, z_0, t_0)^T$, която е подгрупа на 10-мерната група на Галилей, е равносилно на това да кажем, че *всички точки (x, y, z) от евклидовото пространство, както и времето t , са равноправни.*

Фактът, че тримерната подгрупа $SO(3)$ от въртене около нулата е част от групата на Галилей е следствие от факта, че *всички направления* в $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ са *равноправни*.

Тримерната подгрупа от интервала $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ съществува като следствие от относителността на понятията „движение“ и „покой“. Ако се намираме в изолирано помещение (вагон), то не можем да установим с никакъв физически експеримент дали вагонът се движи или е в покой.

Уравненията на Нютон

$$m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = F[(x, y, z) - (x', y', z')] \quad (1.19)$$

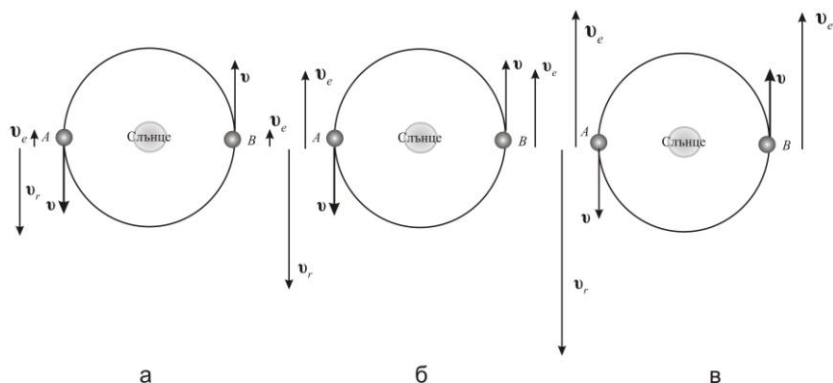
са инвариантни относно групата на Галилей.

§ 1.2. ОПИТ НА МАЙКЕЛСЪН И МОРЛИ

В XIX в. и началото на XX в. до публикуването на теорията на относителността от Алберт Айнщайн господствала *представата за ефира (етера)*. Считало се, че светлината се разпространява в тази хипотетична среда, наречена ефир, както звуковите вълни – във въздуха. Ако тази среда съществува, то тя се движи с някаква скорост v_e и само в намиращата се в покой по отношение на нея отправна система скоростта на светлината би била равна на c (една от хипотезите била, че именно тази среда (етерът) е абсолютната отправна система). Когато наблюдателят се движи със скорост v спрямо ефира, скоростта на светлина

та би била $c + v$, ако наблюдателят се движи към източника на светлината.

Привържениците на теорията на ефира твърдели, че тъй като Земята се движи около Слънцето със скорост $|\mathbf{v}| = v = 30 \text{ km/s}$, през годината трябва да има периоди, когато Земята и ефирът се движат един спрямо друг със скорост не по-малка от $v = 30 \text{ km/s}$. Фигура 1-3а ни убеждава в това. На орбитата винаги можем да намерим две точки, в които $\mathbf{v}$ е

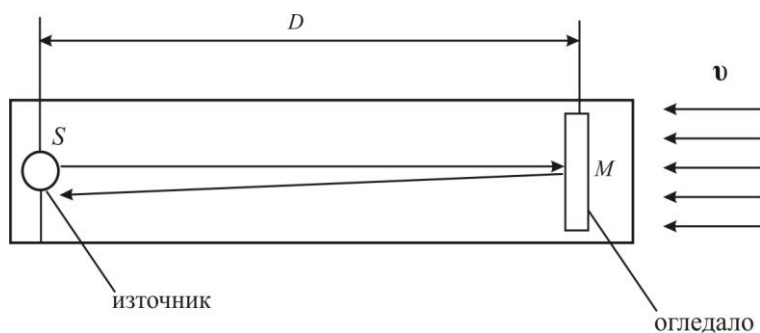


Фиг. 1-3. Движение на Земята около Слънцето със скорост $\mathbf{v}$. Относителната скорост на Земята $\mathbf{v}_r$ спрямо ефира, чиято скорост е $\mathbf{v}_e$, е $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e$. а) Ако в т. А $\mathbf{v}_e = \epsilon$ ($|\epsilon|$ е пренебрежимо малка величина, то $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \epsilon \approx \mathbf{v}$ ($v_r = v + \epsilon \approx v$). б) Ако в т. А ефирът има скорост $\mathbf{v}_e = -\mathbf{v}$, то $\mathbf{v}_r = 2\mathbf{v}$. в) Ако в т. А $v_e > v$, то ще получим $v_r = v + v_e > 2v$.

успоредна на $\mathbf{v}_e$. Нека те да бъдат А и В. Ако в т. А скоростта v_e е пренебрежимо малка величина ϵ , то относителната скорост на Земята v_r би била $v_r = v + \epsilon \approx v$. Ако в т. А скоростта на ефира е равна по големина и противоположна на посоката на скоростта на Земята, т.е. $|\mathbf{v}_e| = v = 30 \text{ km/s}$, то относителната скорост би била $v_r = 2v = 60 \text{ km/s}$. (Тогава в т. В Земята би била в покой спрямо ефира.) Ако в т. А скоростта на ефира е равна на скоростта на Земята, то в т. В скоростите им биха били равни и противоположни – случаят е същият, както току-що анализираният, само че местата на т. А и на т. В се сменят.) Ако в т. А разликата в скоростта е $|\mathbf{v}_e - \mathbf{v}| > 0$, то относителната скорост би била $v_r = v_e + v > 2v$ (случаят е показан на фиг. 1-3в); в случай че $v > v_e$, се променя само посоката на относителната скорост в т. А. Действително и в трите случая Земята се движи спрямо ефира със скорост не по-малка от v .

В тези случаи относителната скорост не е по-малка от $v = 30 \text{ km/s}$. Да приемем тази скорост за база и ефирът в покой, т.е. $v_e \equiv 0$ ($\epsilon = 0$). Да предположим, че на разстояние D в т. А са разположени източник на светлина и огледало, успоредно на скоростта на Земята $\mathbf{v}$ – фиг. 1-4.

Големината на относителната скорост на ефира спрямо Земята е $v_r = v$.

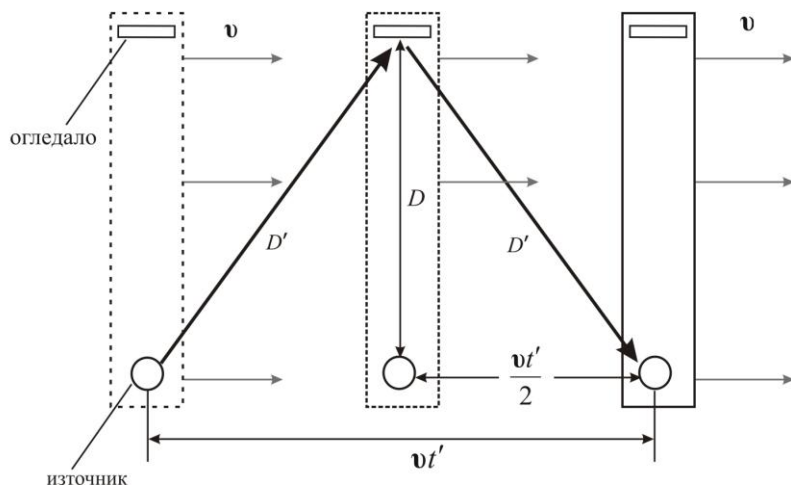


Фиг. 1-4. Източник (S) и огледало M, разположени така, че светлината се разпространява към и от огледалото успоредно на скоростта на Земята v . В случая след нашето предположение (вж. фиг. 1-3а) $|v_r| = v$.

Тогава пълното време t за разпространение на светлината от източника до огледалото и обратно е равно на сумата от времената до огледалото $D/(c+v)$ и обратно $D/(c-v)$:

$$t = \frac{D}{c+v} + \frac{D}{c-v} = \frac{2Dc}{c^2 - v^2} \Leftrightarrow t = \frac{2D/c}{(1 - v^2/c^2)}. \quad (1.20)$$

Нека да повторим, че t е времето на пълно разпространение на светлината от източника до огледалото и обратно, ако установка е ориентирана успоредно на скоростта v . Ако я завъртим на 90° , тя ще се окаже перпендикулярна на скоростта v . За наблюдателя на Земята установката се движи със скорост v спрямо ефира и светлината изминава път $2D'$ (фиг. 1-5). Времето за разпространение на светлината е



Фиг. 1-5. Движение на светлината в установка, перпендикулярна на скоростта v ($|v_r| = 2v$).

$$t' = 2D' / c. \quad (1.21)$$

От правоъгълния триъгълник, изобразен на фиг. 1-5, става ясно, че

$$D'^2 = D^2 + (\nu t' / 2)^2 = D^2 + (\nu t')^2 / 4. \quad (1.22)$$

Повдигаме уравнение (1.21) на квадрат, заместваме в него D' от (1.22) и получаваме времето на пълно разпространение, ако експерименталната установка е перпендикулярна на скоростта ν :

$$t'^2 c^2 = 4 \left(D^2 + \frac{\nu^2 t'^2}{4} \right) \Rightarrow t' = \frac{2D}{c} \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (1.23)$$

По такъв начин разликата във времената на разпространение на светлината Δt при успоредно и перпендикулярно направление на ориентацията на установката (спрямо ν) е

$$\Delta t = t - t' = \frac{2D}{c} \left[\left(1 - \frac{\nu^2}{c^2} \right)^{-1} - \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right]. \quad (1.24)$$

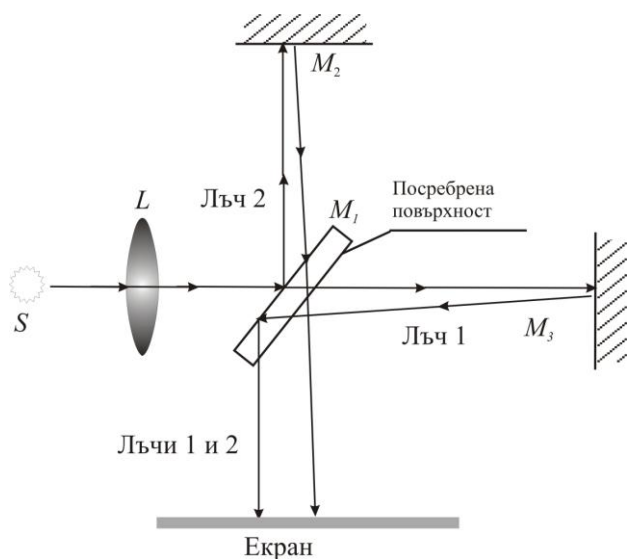
Тъй като $\nu^2 \ll c^2$, ограничавайки се с първите два члена на биномното разлагане по формулата $(1-\varepsilon)^n \approx 1 - n\varepsilon$ ($\varepsilon \equiv \nu^2/c^2$), получаваме

$$\Delta t = t - t' = \frac{2D}{c} \left[\frac{\nu^2}{c^2} - \frac{\nu^2}{2c^2} \right] = \frac{D\nu^2}{c^3}. \quad (1.25)$$

Скоростта на Земята $\nu = 30 \text{ km/s}$ е много по-малка от $c = 3.10^5 \text{ km/s}$. Разликата във времето $\Delta t = t - t'$ даже за $D = 10 \text{ m}$ е $3,3.10^{-16} \text{ s}$. Майкелсън и Морли смятали, че такава малка разлика може да се измери само с интерферометър (в интерферометъра разстоянието $D = 10 \text{ m}$ се е постигало с многократно отразяване на лъчите).

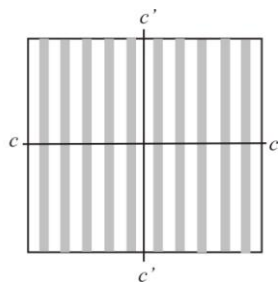
На фиг. 1-6 са показани основните компоненти на установката. Светлинен лъч с монохроматична светлина от източник S след преминаване през леща L попада върху полупропускливо огледало M_1 . То разделя падащия лъч на две лъча. Препреминалия лъч наричаме лъч 1, а отразения лъч – лъч 2. Тези лъчи се отразяват от огледала M_2 и M_3 и съответно отново се срещат върху полупропускливото огледало M_1 , а оттам попадат върху екрана (за екран се използва теодолит). На екрана се получава интерференчна картина от тъмни и светли ивици.

Фактически оптичните пътища M_1M_2 и M_1M_3 са двете основи (двете рамена) на интерферометъра. Ако в т. A в средата на екрана оптичните пътища на двата лъча са равни, там се получава светла ивица. (Равен



Фиг. 1-6. Схема на интерферометъра на Майкелсъ и Морли. (За яснота падащите върху екрана, отразени от огледалата M_2 и M_3 лъчи са представени под малък ъгъл спрямо нормалата на огледалата; за екран се използва теодолит).

ството на оптичните пътища се постига с преместването огледалото M_3 .) интерференчната картина се вижда в маркера cc и $c'c'$ на теодолита (фиг. 1-7).



Фиг. 1-7. Типични ивици на интерференчната картина в т. А, наблюдавана в експеримента на Майкелсъ и Морли.

Ако завъртим интерферометъра на 90° , двата лъча взаимно заменят ролите си и цялостното закъснение е $\Delta t_y = 2\Delta t$ *:

*Ако интерферометърът е успореден на скоростта на Земята, времето на лъча 1 е по-голямо от времето на лъча 2 и той закъснява с Δt . Нека бавно да завъртим интерферометъра на 45° по часовниковата стрелка. Времето на лъча 1 се намалява, а на лъча 2 се увеличава и при 45° времената им са равни. При завъртане на още 45° , т.е. интерферометърът се завърта на 90° , лъчът 2 е успореден на v , а лъчът 1 е перпендикулярен на v . Сега лъчът 2 закъснява спрямо лъча 1 с Δt , а лъчът 2 го изпреварва с Δt . Общото изменение Δt_y при завъртането на 90° за всеки един от лъчите е $\Delta t_y = \Delta t + \Delta t = 2\Delta t$.

$$\Delta t_s = 2\Delta t = 2(t - t') = 2Dv^2 / c^3. \quad (1.26)$$

Интерференчните ивици се отместват на разстояние $c\Delta t_s$. Броят на отместените интерференчни ивици ΔN е това разстояние, делено на дължината на вълната λ :

$$\Delta N = c\Delta t_s / \lambda = 2Dv^2 / \lambda c^2. \quad (1.27)$$

От експеримента $D = 10 \text{ m}$ и $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ и за ΔN получаваме

$$\Delta N = \frac{2Dv^2}{\lambda c^2} = \frac{2.10 \text{ m} \cdot (3.10^4 \text{ m/s})^2}{5000 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot (3.10^8 \text{ m/s})^2} = 0,4. \quad (1.28)$$

В експеримента интерферометърът на Майкелсъ и Морли е можел да забележи отместване от 1/100 от ивицата. Така че не е имало проблем да се забележи отместване от 0,4 ивици. Но Майкелсъ и Морли не са забелязали никакво отместване на ивиците. Те повторили опита в различни места, в различно време на деня и в различни сезони. Но ивиците не се отмествали. Това е възможно само ако

$$\Delta t = t - t' = 0, \text{ т.е. } t = t'. \quad (1.29)$$

Това означава, че *няма ефир*. Негативният резултат от опитите на Майкелсъ и Морли е бил голямо разочарование за вярващите в хипотезата за ефира, тъй като той означавал, че не е възможно да се измери абсолютната скорост на Земята по отношение на ефира. От негативния резултат от опитите може да се направи и много важният извод, че светлината от източника винаги се разпространява с една и съща скорост c независимо от скоростта на движение. Тъй като движението между източника на светлината и наблюдателя е относително, този извод се отнася не само за източника, но и за наблюдателя – *скоростта на разпространение на светлината не зависи от скоростта на движение на източника или на наблюдателя (приемника)*. Това значи, че трансформациите на Галилей, които са добри при малки скорости (по отношение на c), трябва да бъдат изменени при големи скорости. Преди да разгледаме тези нови трансформации, ще се спрем на някои характерни особености на движението при големи скорости.

§ 1.3. ДВА ПРИНЦИПА НА РЕЛАТИВИСТКАТА МЕХАНИКА И ОТНОСИТЕЛНОСТ НА ЕДНОВРЕМЕННОСТТА

В класическата механика се предполага, че всички скорости са значително по-малки от скоростта на светлината c . Такова ограничение е логично, защото просто във всекидневието скоростите са по-малки от

тази на светлината. Средната скорост, с която човек ходи е $v = 7 \text{ km/h}$ (или $1,94 \text{ m/s}$), т.е. много по-малка от c . Една от най-високите скорости, развивани на земната повърхност от състезателен автомобил, е $v = 1100 \text{ km/h}$ или 305 m/s . Но даже тази голяма скорост (305 m/s), съпоставима със скоростта на светлината, е пренебрежимо малка

величина – $\frac{v}{c} = \frac{305}{3 \cdot 10^8} = 1,017 \cdot 10^{-6}$. Дори ако вземем високата скорост,

достигната от един от най-бързите реактивни самолети на Земята (SR-71), $v = 3600 \text{ km/h}$, ще получим пренебрежимо малко отношение със

скоростта на светлината, а именно $v/c \approx 3 \cdot 10^{-5}$. Класическа механика е абсолютно вярна при $v \rightarrow 0$ и описва с добро приближение наблюдаваните движения и изменения в свойствата на телата, за които имаме $v \ll c$. Механиката, която описва движение със скорости, сравними със скоростта на светлината, $v \sim c$, се нарича релативистка. В случай на ИОС тя се описва от специалната теория на относителността. Веднага ще отбележим, че при малки скорости законите и уравненията на СТО преминават в тези на класическата механика. При малки скорости релативистките ефекти са толкова незначителни, че не се забелязват. След като във всекидневното $v \ll c$, логично е да се запитаме струва ли си да се занимаваме с релативистка механика? Тук ще посочим само основните причини за това:

1. Скоростта на светлината, изучаването на свойствата на която е основна задача във физиката, е $c = 299\,792\,458 \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.
2. Електромагнитните вълни (светлината е част от тях) се разпространяват със скорост c . Цялата теория на електромагнитните явления е релативистка.
3. В атомната и ядрената физика частиците се движат със скорост, близка или равна до тази на светлината. Например електронът в атома, който определя химичните му свойства, има скорост, сравнима със скоростта на светлината (изключение се прави в атома на H), фотоните винаги имат скорост, равна на тази на светлината $v = c$, а скоростта на неутриното толкова малко се различава от c , че тази разлика не може да бъде измерена. Изобщо, много свойства на атомите, важни във физиката и химията, са свързани с релативистки ефекти – например връзката между енергия, маса и импулс на електрона, разцепването на енергетичните нива, а оттам и на спектралните линии във фината структура на атома и др.
4. Механиката в съвременната звездна астрономия е релативистка по своята същност. Галактиките се отдалечават една от друга със скорости, сравними с тази на светлината. Природата на откритите досега обекти, като неутронни звезди, пулсари и черни дупки, е свързана с ефекти на ниво релативистка механика.
5. В основата на квантовата физика лежат явленията фотоефект и ефект на Комптън (вж. гл. 2). Тези ефекти са релативистки.

За правилното разбиране на тези явления са необходими и знанията за релативистките отношения между енергията, масата и импулса. Изходното твърдение в теорията на относителността на Айнщайн се основава на експерименталния факт от опита на Майкелсъ и Морли – те доказват, че скоростта на светлината винаги е $c = 2,99.10^8$ m/s, независимо от скоростта на движение на светлинния източник или на приемника.

В основата на СТО лежат два основни принципа:

Първи принцип – скоростта на светлината е постоянна (една и съща) във всички отправни системи (ОС).

Втори принцип – не е възможно в една ОС с каквито и да е експерименти да се установи равномерно и праволинейно движение спрямо ИОС. (Предполага се, че ОС няма контакт (и визуален) с друга ОС.)

Вторият принцип често се формулира като *принцип на относителността на Айнщайн*. Дадена ИОС и всички ОС, които се движат спрямо нея равномерно и праволинейно, са еквивалентни по отношение на описването на явленията, т.е. *физичните закони са еднакви (изглеждат еднакви) във всички ИОС. Принциплът на Галилей утвърждава, че механичните закони са еднакви във всички ИОС. Айнщайн разширява това твърдение, като го разпространява за всички физични явления (също и за оптиката).*

В този параграф ще разглеждаме понятието едновременност в СТО. Казваме, че две събития протичат едновременно, ако протичат в един и същ момент на времето. Ако тези събития протичат в една и съща точка на пространството, установяването на тяхната едновременност е тривиално. Как да установим едновременност, ако събитията протичат в различни места, достатъчно отдалечени едно от друго? Въпросът, който искаме да изясним, е: ако две събития са едновременни от гледна точка на наблюдателя в една неподвижна ОС, ще бъдат ли едновременни и за наблюдателя в движеща се ОС относно първата?

Най-напред ще анализираме събитията в т. *A* и в т. *B* неподвижна платформа (наблюдателят в т. *O* е по средата между т. *A* и т. *B*). Ако в т. *A* и в т. *B* падат мълнии и светлината от тях достигне за едно и също време до наблюдателя в т. *O*, казваме, че събитията от падането на мълниците са едновременни (фиг. 1-8).

Според фиг. 1-8 две събития (в т. *A* и в т. *B*) са едновременни, ако светлинните импулси от тях стигат за едно и също време до наблюдателя в т. *O*, разположен по средата между *A* и *B*.

Айнщайн се усъмнил в коректността на общоприетите представи за едновременност на събитията, протичащи в различни места на пространството. За да се убедим в това съмнение, е основателно да направим следния експеримент: нека да си представим, че Ние и Вие се намираме в различни космически кораби, летящи без ускорение някъде във Вселената. Вашият космически кораб ще се движи със скорост $v_2 \equiv v$ ($v \sim c$) по отношение на нашия, който е в покой – $v_1 = 0$.

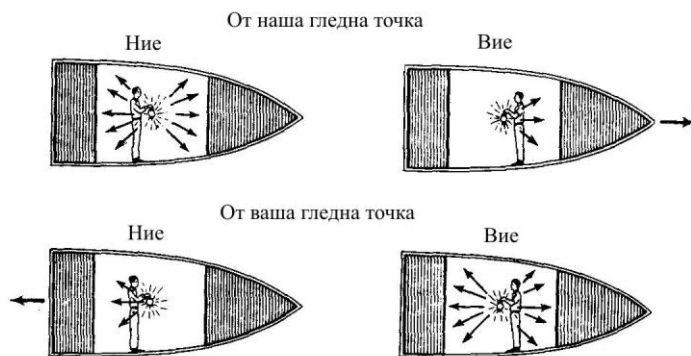
Да включим лампа точно по средата на вашия космически кораб така, че светлината да може да се разпростира към носа и към задната част на кораба. Тогава, тъй като светлинните вълни се разпространяват



Фиг. 1-8. От гледна точка на наблюдателя в т. O светлинните импулси от събитията в т. A и в т. B идват по едно и също време и събитията в тях са едновременни.

в двете посоки с еднаква скорост, Вие логично ще заявите, че светлината достига предната и задната част на космическия кораб едновременно. Ако Ние по аналогичен начин изпратим светлинни вълни от центъра на нашия космически кораб, ще направим същото заключение по отношение на разпространението на светлината. Но какво може да кажем Ние за разпространение на светлината във вашия кораб?

Тъй като вашият космически кораб се движи спрямо нашия, то Ние бихме видели, че задната част на кораба ви се движи срещу светлината, разпространяваща се към нея. Носът, обратно, „избягва“ светлината, движеща се напред в кораба ви. Ние заключаваме и виждаме, че във вашия космически кораб светлината достига до задната стена по-рано в сравнение с достигането до предната (фиг. 1-9). По такъв начин, ако от



Фиг. 1-9. Разпространение на светлината в неподвижна отправна система (наблюдател Ние) и подвижна отправна система (наблюдател Вие).

ваша гледна точка светлинните вълни достигат до предната и задната стена едновременно, то според нашите наблюдения тези събития (по отношение на светлината) не са едновременни.

От наша гледна точка светлината достига в нашия космически кораб едновременно до предната и задната стена, а във вашия кораб вече е достигнала задната стена и продължава да се движи към предната; от

ваша гледна точка светлината достига във вашия кораб едновременно до предната и до задната стена, а в нашия кораб светлината е достигнала вече предната стена и продължава да се движи към задната. Това разминаване в изводите на наблюдателите е свършено не-обикновено. Удивително е, че разминаването в гледните точки е взаимно.

Спрямо вашия космически кораб нашият се движи назад, така че според вашите наблюдения светлинните вълни в нашия кораб и в нашия експеримент ще достигнат предната стена по-рано от момента, когато вълните, разпространяващи се назад, ще достигнат задната стена.

Според принципа на относителността двамата наблюдатели (Ние и Вие) в двете ИОС са равноправни. Ние не можем да смятаме, че Вие сте „по-добри“ от нас или че Ние сме „по-добри“ от вас. *Оттук следва, че ако двама наблюдатели се движат равномерно един спрямо друг, то пространствено разделени събития са едновременни за единия и не са едновременни за другия и обратно. Едновременността е относителна.*

Извод: Две събития, които са едновременни в една ИОС, може да не са едновременни в друга ИОС. Тоест при голяма скорост ($v \sim c$) понятието едновременност не е абсолютно, а относително.

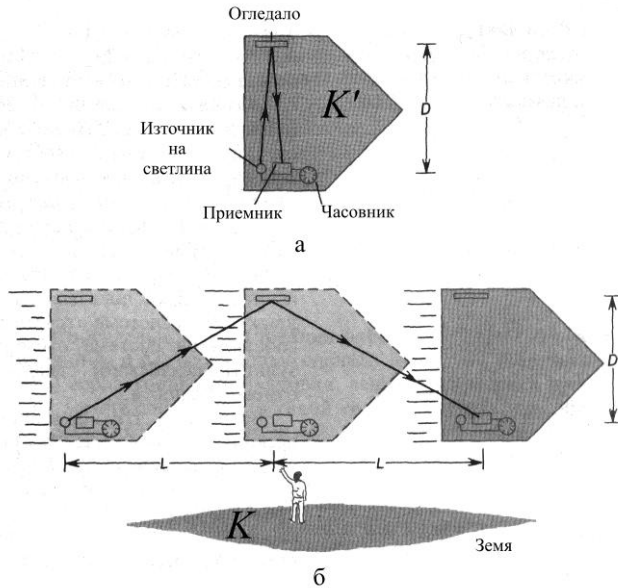
§ 1.4. ЗАБАВЯНЕ НА ВРЕМЕТО И СЪКРАЩАВАНЕ НА ДЪЛЖИНАТА

В предния параграф се убедихме, че едновременността е относителна. Това твърдение разрушава нютоновите представи за пространството и времето. Боравейки с понятието абсолютно време, можем твърдо да решим дали дадени събития са настъпили едновременно или не, даже ако те са пространствено разделени: *те са едновременни, ако са станали в един и същ момент на абсолютното време. В теорията на относителността, вземайки предвид относителността на едновременността, можем да кажем, че е относително и самото време.*

Експериментът с двата космически кораба показва, че понятието едновременност е относително. Докато за наблюдателя в едната ОС (в случая неподвижната) времената на двете събития са еднакви, в другата ОС (в случая подвижната) времената на двете събития са различни. Тогава възниква въпросът може ли в една ОС времето да протича по един начин, а в друга – по друг? Ще се помъчим да потърсим отговора на този въпрос с един друг мислен експеримент.

Космическият кораб се движи с голяма скорост $v \sim c$ спрямо Земята. На кораба се намира източник на светлина. След светването светлината се отразява от огледало и се връща в приемника, който е до източника. Разстоянието между източника (приемника) и огледалото е D , т.е. светлината изминава разстоянието $2D$ (фиг. 1-10а) със скорост c . За наблюдателя, неподвижен в K' (намира се в космическия кораб), времето, за което светлината изминава това разстояние, е t' :

$$t' = 2D/c. \quad (1.30)$$



Фиг. 1-10. Пътят на светлината за наблюдателя в K' е $2D$ (а) (за нагледност двата успоредни пътя са под малък ъгъл), а за наблюдателя в K пътът е $2\sqrt{D^2 + L^2} > 2D$ (б). Наблюдателят в K ще измери по-голямо време от този в K' , т.е. времето в K се забавя.

В ОС на Земята K наблюдателят, който се намира на Земята, също следи за разпространението на светването в космическия кораб. За него обаче космическият кораб се движи, докато светването се разпространява и светлината (до огледалото и приемника) се движи вече по друг път (фиг. 1-10б), който се вижда от фигурата.

Пътят на светлината, която за този наблюдател пресича кораба косо, е по-дълъг. За време t корабът изминава разстоянието $2L = 2vt$, а светлината – $2\sqrt{D^2 + L^2}$ (вж. фиг. 1-10б). В двете ОС светлината се разпространява с еднаква скорост съгласно първия принцип на относителността и следователно ($2\sqrt{D^2 + L^2} > 2D$) времето в ОС K е по-голямо:

$$\text{Error! Objects cannot be created from editing field codes..} \quad (1.31)$$

Повдигаме това уравнение на квадрат и го решаваме спрямо t :

$$\text{Error! Objects cannot be created from editing field codes.} \quad (1.32)$$

След отчитане на (1.30), изразът (1.32) се редуцира до

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma t'. \quad (1.33)$$

Използвахме широко разпространените означения β и γ :

$$\beta = v/c, \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}. \quad (1.34)$$

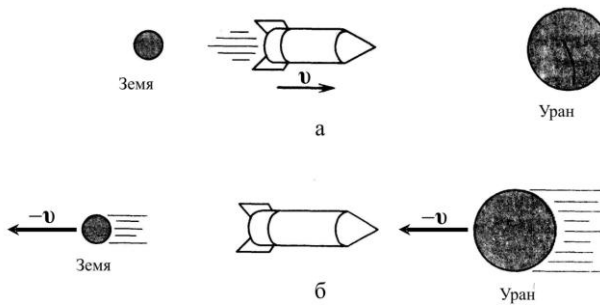
Тук β е отношението на скоростта на движещото се тяло към скоростта на светлината, а γ се нарича релативистки фактор. Той показва колко пъти се изменя (увеличава или намалява) дадена величина при движение на тялото с $v \sim c$.

В случая времето t' (за събитията, случващи се в едно и също място) е пъти по-малко от времето между събитията в ОС, която се движи със скорост $|v|$ спрямо първата (Земята се движи с $-v$ спрямо кораба). Тук става въпрос за наблюдател в ОС, която е в покой (К), и за наблюдател в ОС, която се движи (K') през интервала между събитията. Интервалът от време t' между събитията в дадена ОС (в случая в корабите), случили се в една и съща точка, се нарича собствено време τ : $t' = \tau$. Собственото време е най-малкото време от времената във всички ОС. Тоест наблюдателят на кораба измерва време τ , което е пъти по-малко от времето t , измервано на Земята:

$$\tau = t / \gamma. \quad (1.35)$$

Видяхме, че при движение със скорости $v \sim c$ времето в движещата се система K' е по-малко от времето в неподвижната система К, т.е. времето в К се забавя.

А сега, когато знаем какво показват часовниците в ОС K' на кораба и в ОС К на Земята, да си представим, че корабът лети със скорост v от Земята към Уран (вж. фиг. 1-11). Разстоянието между Земята и Уран



Фиг. 1-11. Движение на космически кораб от Земята към Уран: а) в ОС, свързана със Земята, космическият кораб лети с много голяма скорост v от Земята към Уран; б) в ОС, свързана с кораба, Земята и Уран се движат със скорост $-v$.

за наблюдателя от Земята е $L = vt$. За наблюдателя от космическия кораб това разстояние е $L' = vt'$:

$$L' = vt' = v\tau = vt / \gamma = L / \gamma. \quad (1.36)$$

Следователно в различната (от K) K' -система не само времевите интервали са различни, но и пространствените интервали (дължините и разстоянията) се различават. Разстоянията в движещата се със скорост v система са γ пъти по-малки от разстоянията в неподвижната система. Ще подчертаем, че получените разлики се отнасят както за разстоянията, така и за линейните размери на системата, така че окончателно можем да формулираме: *дължината на едно тяло е по-къса, когато то се движи, в сравнение с дължината му в покой.*

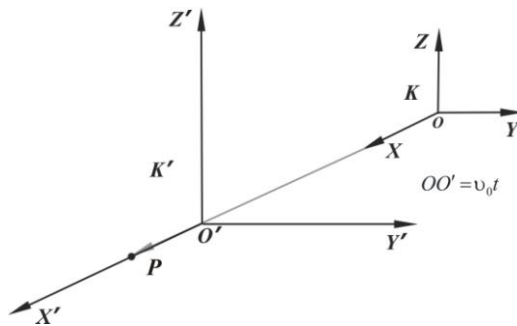
Дължината на едно тяло в ОС, в която то е в покой, се нарича собствена дължина L_0 (в анализирания случай тя е L).

В случая собствената дължина се измерва в ОС K (собственото време е в ОС K'). За да определим L_0 и τ , трябва да преминем в система, в която съответно тялото и събитията са в едно и също място, т.е. спрямо тях ОС е в покой. *Собствената дължина е най-голямата възможна дължина, докато собственото време е най-малкото възможно време.*

Тук ще отбележим, че изменението на дължината става само в направлението на движение. Нашият кораб, движещ се от Земята към Уран, се съкращава по дължина, но височината му остава същата.

§ 1.5. ТРАНСФОРМАЦИИ НА ЛОРЕНЦ

В § 1.1 се запознахме с трансформациите на Галилей (1.4), които са в сила при малки скорости. При по-големи скорости, обаче, това не е така. Затова величините в неподвижна ОС K и в движеща се спрямо нея със скорост $v = v_x \mathbf{x}^0 \equiv v_0 \mathbf{x}^0$ система K' (фиг. 1-12) са свързани по друг



Фиг. 1-12. ИОС K' се движи по оста X спрямо ИОС K с постоянна скорост v_0 . Радиус-векторът на т. P в K е $\mathbf{r} = \overline{OP}$, а в K' — $\mathbf{r}' = \overline{O'P}$.

начин. Тези трансформации се наричат *трансформации на Лоренц*. В двете системи има по един наблюдател. Координатите на двете системи съвпадат в началния момент на времето (при $t = t' = 0$). В този начален момент е емитирана светлина от източници съответно в K и в K' . След време светлинният сигнал достига точката P , като в K P има радиус-вектор $\mathbf{r}$, а в K' — $\mathbf{r}'$. Съгласно нютоновата относителност скоростта

на сигнала би била различна за двамата наблюдатели, защото времето за достигане на т. P би било същото. Но съгласно I принцип на СТО скоростта на светлината е еднаква в двете ИОС и значи времената t и t' в двете системи за изминаване на разстоянията r и r' са различни.

$$r = ct, \quad r' = ct'. \quad (1.37)$$

Тъй като $t \neq t'$ и скоростта c е еднаква в двете системи, ще получим нови трансформации. Записваме уравненията (1.37) във форма:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad (1.38a)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (1.38b)$$

Тъй като движението на системите K и K' е само по осите X и X' ($\mathbf{v} = v_0 \mathbf{x}^0$), то в перпендикулярни направления координатите не се променят (както и при галилеевите трансформации):

$$y = y' \text{ и } z = z'. \quad (1.39)$$

Да предположим за простота, че т. P е на осите X и X' — $y = y' = 0$ и $z = z' = 0$ (фиг. 1-12). Тогава уравненията (1.38) приемат вида:

$$x^2 - c^2 t^2 = 0, \quad (1.40a)$$

$$x'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (1.40b)$$

Очевидно можем да запишем

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 = 0 \text{ или } x'^2 - c^2 t'^2 - x^2 + c^2 t^2 = 0. \quad (1.40b)$$

Искаме да намерим зависимостите на x' и t' от x и t , т.е.

$$\begin{aligned} x' &= x'(x, t), \\ t' &= t'(x, t). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Трансформациите трябва да бъдат линейни, за да може едно събитие в едната ОС да бъде интерпретирано като едно събитие в другата ОС. Ако трансформациите са например квадратични, това ще означава, че в другата ОС ще има повече от едно събитие. Така че ще предположим

$$x' = a_{11}x + a_{12}t, \quad (1.42a)$$

$$t' = a_{21}x + a_{22}t. \quad (1.42b)$$

В K' за O' винаги $x' = 0$ (и при $t' = 0$). В K ОС K' се движи с v_0 , така че за O' $x = v_0 t$. Това се получава от (1.42a), записано като $x' = a_{11}(x - v_0 t)$. Наистина, когато $x' = 0$, от него получаваме $x = v_0 t$. Замествайки го в (1.42a), определяме $a_{12} = -v_0 a_{11}$. Тогава (1.42) придобиват вида

$$x' = a_{11}(x - v_0 t), \quad (1.43a)$$

$$t' = a_{21}x + a_{22}t. \quad (1.43b)$$

Заместваме x' и t' в (1.40b) и получаваме

$$(a_{11}^2 - c^2 a_{21}^2 - 1)x^2 - 2(\nu_0 a_{11}^2 + c^2 a_{21} a_{22})xt - (c^2 a_{22}^2 - \nu_0^2 a_{11}^2 - c^2)t^2 = 0. \quad (1.44)$$

То е нула за всяко x и t , само ако коефициентите пред x и t са нули:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 - c^2 a_{21}^2 &= 1, \\ \nu_0 a_{11}^2 + c^2 a_{21} a_{22} &= 0, \\ c^2 a_{22}^2 - \nu_0^2 a_{11}^2 &= c^2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Решаваме тази алгебрична система и получаваме

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{22} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (\nu_0^2 / c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma, \\ a_{21} &= \frac{-\nu / c^2}{\sqrt{1 - (\nu_0^2 / c^2)}} = -\frac{-\beta / c}{\sqrt{1 - (\nu_0^2 / c^2)}} = \frac{\beta \gamma}{c}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

За β и γ използвахме (1.34). Заместваме в (1.43) и заедно с (1.44) трансформациите на координатите и времето са:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{(x - \nu_0 t)}{\sqrt{1 - \nu_0^2 / c^2}}, & x' &= \gamma(x - \nu_0 t), \\ y' &= y, & y' &= y \\ z' &= z, & z' &= z, \\ t' &= \frac{t - (\nu_0 / c^2)x}{\sqrt{1 - \nu_0^2 / c^2}}, & t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Обратните трансформации (от системата K в системата K') получаваме, като заменим ν_0 с $-\nu_0$ и сменим местата на примованите и непримованите координати и време:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(x' + \nu_0 t')}{\sqrt{1 - \nu_0^2 / c^2}}, & x &= \gamma(x' + \nu_0 t'), \\ y &= y', & y &= y' \\ z &= z', & z &= z', \\ t &= \frac{t' + (\nu_0 / c^2)x'}{\sqrt{1 - \nu_0^2 / c^2}}, & t &= \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Много важно е да отбележим, че в тези трансформации t и t' не са вече независими от координатите както при трансформациите на Галилей. От уравненията (1.47) и (1.48) се вижда, че t е функция на t' и x' , а t' – на t и x , т.е. координатите или времето в едната ОС зависят едновременно от координатите и времето в другата ОС (става дума за

преобразувания в ИОС). Така че *пространството и времето могат да се интерпретират като компоненти на един 4-мерен вектор* (3 пространствени компоненти и една времева) и се нарича *пространство-време на Минковски*. Координатите в това 4-мерно пространство-време са (ct, x, y, z) (използва се измерителна система, в която $c = 1$ m – в нея координатите са (t, x, y, z)). Често се приема, че видът на координатите (x_0, x_1, x_2, x_3) , където $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Да разгледаме две събития в K (вж. фиг. 1-12 и текста под нея): пристигането на светлинен сигнал в една точка (1-во) и пристигането му в друга (2-ро). Да запишем (1.37) за двете събития съответно с x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 :

$$\begin{aligned} c^2 t_1^2 &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \\ c^2 t_2^2 &= x_2^2 + y_2^2 + z_2^2. \end{aligned} \quad (1.49)$$

От тук за координатите и за времето на тези две събития получаваме

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (1.50a)$$

Величината $r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ е квадратът на разстоянието (на интервала) между две точки в обикновеното 3-мерно пространство. Аналогично можем да говорим за разстояние (за интервал) в 4-мерното пространство-време на Минковски. *Величината s_{12} , чийто квадрат се определя по формулата*

$$s_{12}^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2, \quad (1.50b)$$

се нарича интервал между 2-те събития. За две безкрайно близки събития видът на квадрата на интервала е $(ds)^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$.

В разгледания пример (с излъчване и пристигане на светлина) фронтът на светлината е сфера и радиусът на сферите е $c^2 t_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ ($i = 1$ за излъчването и $i = 2$ за пристигането). От изразите за радиусите лесно доказваме, че

$$s_{12}^2 = 0. \quad (1.51)$$

В общия случай това равенство не е валидно. Например, ако първото събитие представлява изстрел от оръдие от точка x_1, y_1, z_1 в момент t_1 , а второто събитие – попадането на снаряда в точка x_2, y_2, z_2 в момент t_2 . В този случай $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ е квадратът на разстоянието (пространственото) между двете точки (местата на изстрел и на попадането), а величината $c^2 (t_2 - t_1)^2$ е квадратът на пътя на сигнал, излъчен в точка x_1, y_1, z_1 в момент t_1 . Тъй като скоростта на снаряда е винаги по-малка от c , то $s_{12}^2 > 0$. Ето и пример, в който

$s_{12}^2 < 0$. В точка t_1, x_1, y_1, z_1 на Слънцето се появява петно. В момент t_2 , когато светлината от петното още не е достигнала Земята, в точка с координати x_2, y_2, z_2 астроном насочва своя телескоп към Слънцето (t_1, x_1, y_1, z_1 и t_2, x_2, y_2, z_2 са в ОС K , свързана със Земята). Светлината идва от Слънцето за около 500 s, така че за време t_2 ($t_2 - t_1 < 500$ s) второто събитие (действията на астронома) съвсем не може да се счита за следствие на събитието поява на слънчевото петно. Тогава имайки предвид, че разстоянието между Слънцето и Земята е $150 \cdot 10^6$ m, доказваме, че $s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$ е отрицателен: $s_{12}^2 < 0$.

Но за произволен интервал, ако използваме трансформациите на Лоренц за ОС K и K' , лесно ще докажем, че

$$s_{12}^2 = s_{12}'^2. \quad (1.52)$$

Интервалът между две събития е неизменен при прехода от K в K' , т.е. интервалът е инвариант.

Когато скоростта е ниска (класическа механика), трансформациите на Лоренц преминават в трансформациите на Галилей. Наистина лесно се вижда, че при $v_0 \rightarrow 0$, и следователно $v_0^2/c^2 \ll 1$ и $v_0/c^2 \ll 1$ уравненията (1.48) преминават в

$$x' = x - v_0 t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (1.53)$$

А това са трансформациите на Галилей (вж. (1.4)). Нагледно можем да представим това така:

трансформациите на Лоренц = трансформациите на Галилей

при $v/c \rightarrow 0$ или $c \rightarrow \infty$.

Трансформациите на Лоренц налагат ограничение на максималната големина на скоростта v ($v \equiv v_0$). Скоростта v трябва да бъде по-малка от c , тъй като в противен случай величината $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ би била имагинерна. Това значи, че координатите и времето биха били имагинерни, което е физически невъзможно (координатите и времето са физични величини и като такива са винаги реални). *Във вакуум нищо с маса, отлична от нула, не може да се движи със скорост, по-голяма от скоростта на светлината.* (За още една причина вж. § 1.8.) Това е експериментален факт. И накрая ще отбележим, че математиците често обръщат внимание на аналогията на **преобразуванията** на Лоренц и **преобразуванията**, описващи въртенето на координатната система.

Математическа форма на преобразуванията на Лоренц (групова структура)

Разказахме, че през 1881 г. Майкелсън провежда своя знаменит опит, с който доказва, че скоростта на светлината във вакуум е константа за всички ИОС и. Това променя представите за устройството

на пространството и времето. Времето t не е абсолютно. СТО има за предмет пространствено-времевия континуум от събития (t, x, y, z) , в който липсват каквито и да е било маси. СТО описва по-точно реалните пространство и време в сравнение с механиката на Галилей-Нютон.

Метриката в теорията на относителността (да подчертаем, че не само в СТО, а и в общата теория на относителността (ОТО)) е метриката на Минковски:

$$(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (1.54)$$

Тя напълно определя геометричните свойства на 4-мерното пространство-време.

Аналог на 10-мерната група на Галилей в СТО е също 10-мерна група, групата на Поанкаре:

$$\left(\begin{array}{c} \text{група на} \\ \text{Поанкаре} \end{array} \right) = SO(1,3) \rtimes \mathbb{R}^4. \quad (1.55)$$

Тук $SO(1,3)$ са преобразуванията на Лоренц, $\mathbb{R}^4$ са транслациите, а знакът $\rtimes$ както и в (1.17) означава полудиректно произведение. Подгрупата от транслации $\mathbb{R}^4$ е същата, както и в теорията на Галилей-Нютон.

Шестмерната подгрупа

$$SO(1,3) = \{4 \times 4 \text{ матрици } M : M \begin{pmatrix} 1/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \det M = 1\} \quad (1.57)$$

съдържа линейни преобразувания, запазващи метриката (1.54). Нейните елементи запазват формата на прехода от една към друга ИОС в 4-мерното пространство-време:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad M \in SO(1,3). \quad (1.58)$$

Уравнение (1.58) задава действието на групата на Поанкаре върху време-пространството при смяна на променливите $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$.

Шестте генератора на $SO(1,3)$ са (за простота $c=1$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{въртене} \\ \text{на } \angle \varphi \text{ око-} \\ \text{ло ос } X \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{въртене} \\ \text{на } \angle \varphi \text{ око-} \\ \text{ло ос } Y \end{array} \right. \quad (1.59a)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{въртене} \\ \text{на } \angle \varphi \text{ око-} \\ \text{ло ос } Z \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} \text{ch} \alpha & \text{sh} \alpha & 0 & 0 \\ \text{sh} \alpha & \text{ch} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{хипербо-} \\ \text{лично вър-} \\ \text{тене на } \angle \alpha \\ \text{около ос } X \end{array} \right. \quad (1.59b)$$

$$\begin{pmatrix} \text{ch} \alpha & 0 & \text{ch} \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \text{sh} \alpha & 0 & \text{ch} \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{хипербо-} \\ \text{лично вър-} \\ \text{тене на } \angle \alpha \\ \text{около ос } Y \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} \text{ch} \alpha & 0 & 0 & \text{sh} \alpha \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \text{sh} \alpha & 0 & 0 & \text{ch} \alpha \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{хипербо-} \\ \text{лично вър-} \\ \text{тене на } \angle \alpha \\ \text{около ос } Z \end{array} \right. \quad (1.59c)$$

(Една техническа подробност: в групата на Поанкаре координатите са (t, x, y, z) , т.е. пишем времето t в началото. В групата на Галилей координатите са (x, y, z, t) , т.е. t е отзад.) В частност, ако $y = y'$, $z = z'$ и $ct_0 = x_0 = y_0 = z_0 = 0$ и ОС K' се движи със скорост v_0 спрямо K (това е случаят на фиг. 1-12), то са в сила **преобразуванията** на Лоренц (1.48).)

Формулите на Лоренц са хиперболично въртене по оста X на ъгъл α :

$$\alpha = \text{arctgh } v/c. \quad (1.60)$$

Когато $c \rightarrow \infty$, то $v/c \rightarrow 0$, което е едно и също, **преобразуванията** на Лоренц преминават в тези на Галилей (1.53). Може да се каже, че при $c \rightarrow \infty$ СТО преминава в класическата механика на Нютон.

§ 1.6. ВРЕМЕ И ДЪЛЖИНА. ТРАНСФОРМАЦИИ НА ЛОРЕНЦ

Ще започнем със забавяне на времето. Нека разгледаме две събития в ОС K и K' . В K времената на събитията са t_1 и t_2 и координатите са x_1 и x_2 . В K' времената са t_1' и t_2' и координатите – x_1' и x_2' . Като предположим, че събитията стават в едно и също място в K' , е ясно, че $x_1' = x_2'$. В СТО времевият интервал не е абсолютен – в K той е $\Delta t = t_2 - t_1$, а в K' – $\Delta t' = t_2' - t_1'$. От последното уравнение на (1.48) записваме:

$$t_1 = \frac{t_1' + (v_0/c^2)x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{t_2' + (v_0/c^2)x_2'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (1.61)$$

Следователно

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1' + (v_0/c^2)(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t' - (v_0/c^2)(x_2' - x_1')}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (1.62)$$

Но тъй като $x_1' = x_2'$, ние получаваме следното съотношение

$$\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1-\beta^2} = \gamma \Delta t'. \quad (1.63)$$

Релативисткият фактор γ е винаги по-голям от единица – получихме забавяне на времето. Интервалът $\Delta t'$ в системата, в която събитията стават в едно и също място, е най-къс (вж. началото на параграфа. Това е собственото време – вж. (1.29).

Да видим как от трансформациите на Лоренц ще получим скъсяване на дължината. Разгледаме двама наблюдатели в покой съответно в ОС K и K' . Наблюдателят в неподвижната система K има прът с дължина L , който е успореден на оста X – $L = x_2 - x_1$. В системата K' прътът има координати x_1' и x_2' , а дължината му е $L' = x_2' - x_1'$. Съгласно (1.42)

$$x_1 = \gamma(x_1' + v_0 t_1'), \quad x_2 = \gamma(x_2' + v_0 t_2'). \quad (1.64)$$

Изваждаме тези две равенства и получаваме

$$x_2 - x_1 = \gamma[(x_2' - x_1') - v_0(t_2' - t_1')]. \quad (1.65)$$

Тъй като наблюдателят в K' трябва да измери краищата на пръта едновременно, то $t_1' = t_2'$ и уравнението (1.54) става

$$x_2 - x_1 = \gamma(x_2' - x_1') \quad \text{или} \quad L' = L / \gamma. \quad (1.66)$$

В ОС, която се движи със скорост v_0 спрямо обекта, неговата дължина се скъсява γ пъти. *Дължината на обекта (в случая пръта) е най-голяма в ОС, в която той е в покой. Това е неговата собствена дължина.*

Разбира се, ефектът е реципрочен. Ако прътът е в покой в ОС K' , то неговата дължина в K се скъсява γ пъти.

Да разгледаме един *пример* за забавяне на времето и скъсяване на дължината. Според наблюдател на Земята кола изминава за 25 s път 1 km на права отсечка на магистрала. Колко са времето и пътят на колата според наблюдател в космически кораб, който се отдалечава от Земята със скорост 0,95c по линията на движение на колата?

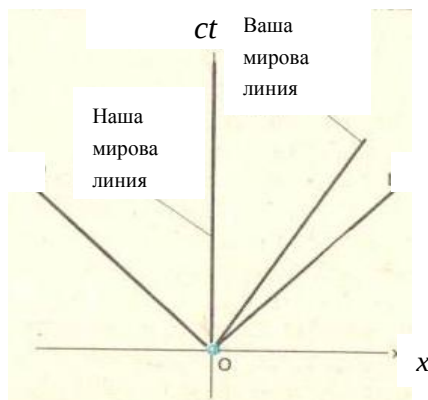
Собственото време (в ОС на Земята пътят е в покой!) е $t = 25$ s. Времето за наблюдателя в космическия кораб, който се движи със скорост $v_0 = 0,95c$, е $t' = \gamma t = 1/\sqrt{1-(0,95)^2} \cdot 25 \text{ s} = 3,2 \cdot 25 \text{ s} = 80 \text{ s}$.

Космическият кораб се движи със скорост v и дължината на пътя за наблюдателя в него ще се съкрати γ пъти: $L' = L/\gamma = 1/3,2 \text{ km} \approx 0,31 \text{ km}$. Според него колата ще измине $0,31 \text{ km}$ за 80 s , а 1 km за $258,5 \text{ s} = 4,3 \text{ min}$.

§ 1.7. СВЕТЛИНЕН КОНУС

Да разгледаме частица с $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Графиката $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, описваща движението на частицата в 4-мерното пространство-време, се нарича *мирова линия на частицата*.

За да добием нагледна представа за 4-мерното пространство-време, ще отхвърлим две от пространствените координати, разглеждайки както и в § 1.5 само онази област, в която y и z са равни на нула. Това позволява вместо 4-мерното да изследваме 2-мерното пространство-време с пространствена координата x и времева t . Да предположим, че наблюдател в точката x (ние) измерва координата ct (това става в ИОС K). Нашата мирова линия е отсечка, лежаща на оста ct (фиг. 1-13).



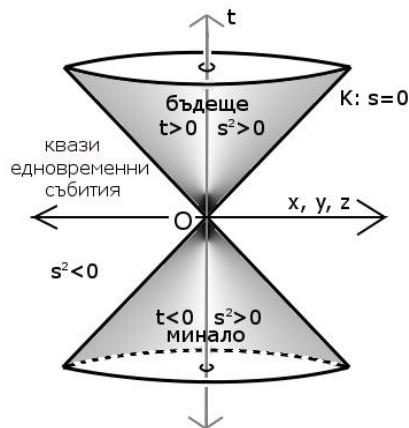
Фиг. 1-13. Мирови линии на събитията, минаващи през т. O .

Да предположим, че Вие започвате да се движите с постоянна скорост v от точка $x=0$ в момент $t=0$. Вашата мирова линия ще бъде правата на диаграмата на Минковски на фиг. 1-13. Наистина първият закон на Нютон (свободните частици се движат с постоянна скорост), формулиран на езика на мировите линии, е *мировите линии на свободните частици са прави*. Разбира се, в общия случай събитието може да не минава през т. O или да не лежи в разгледаната област $y = z = 0$.

Ако начертаем линиите $\pm x = ct$, ще получим мировите линии на светлинен сигнал, разпространяващ се от т. O и момента $t = 0$.

Да разширим разгледаната област на пространство-времето на Минковски – нека само една координата да бъде равна на нула ($z = 0$).

В този случай фигурата се превръща в двумерен конус, повърхнината на който е образувана от безкрайно множество мирови линии, минаващи през събитието O под ъгъл 45° на оста ct . Тъй като той е място на събития, разпространяващи се със скоростта на светлината, се нарича *светлинен конус*. Можем леко да усложним картина, като разгледаме различни от нула и трите пространствени координати. В този случай получаваме тримерен светлинен конус (фиг. 1-14).



Фиг. 1-14. Светлинен конус.

Колкото е по-голяма скоростта на физически обект по отношение на наблюдател на оста t , толкова по-далече обектът ще се отдалечи от него за дадено време. Тъй като нито един материален обект не може да се движи по-бързо от светлината, то и нито един обект не може да се премести по-далече, отколкото светлината. Следователно мировите линии на произволен физически обект лежат вътре в светлинния конус.

За простота ще разглеждаме събитията $(0, 0, 0, 0)$ и (t, x, y, z) . В 4-мерното пространство-време разстоянието между тях $s = \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ може да е положително, нула или имагинерно число*. Вътрешността на конуса е от две части: горна при $t > 0$ и долна при $t < 0$. В горната $t > 0$ означава, че събитието (t, x, y, z) е след събитието $(0, 0, 0, 0)$ – затова областта е на *бъдещето*; в долната $t < 0$ – събитието (t, x, y, z) е преди събитието $(0, 0, 0, 0)$ – затова тази област е на *миналото*:

*В псевдоевклидовата метрика, в частност тази на Минковски, имаме сигнатура (p, q) , където $p > 0$, $q > 0$. В метриката на Минковски сигнатурата е $(1, 3)$, един „+“ и три „-“. От тук и квадратът на разстоянието s^2 може да е положителен, нула или отрицателен. В евклидовата метрика $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$ сигнатурата е $(3, 0)$ и $s^2 \geq 0$, като $s = 0$ само при съвпадащи точки.

$$\begin{aligned} \text{бъдеще} &= \{s > 0, t > 0\} = \{(t, x, y, z) : t > 0, c^2 t^2 > x^2 + y^2 + z^2\}, \\ \text{минало} &= \{s > 0, t < 0\} = \{(t, x, y, z) : t < 0, c^2 t^2 > x^2 + y^2 + z^2\}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Примерът с изстрелване на снаряд (първо събитие) и попадането му в целта (второ събитие) показва, че двете събития са причинно свързани (вж. § 1.5). Изстрелването на снаряда е причина, а попадането е следствие. Можем да дадем подобни примери и за други събития: изстрела на ловец и падането на заек след изстрела, раждането на човек и след това неговата смърт, сблъскването на две топчета и след това тяхното отскачане. Във всички тези примери $s^2 > 0$. В общия случай при $s^2 > 0$, т.е. *при положителен интервал, събитията са причинно-следствено обосновани*.

Но ние можем да си представим и две събития, за които $s^2 < 0$.

Както се вижда от примера в § 1.5 с астронома и слънчевите петна, за който $s^2 < 0$, двете събития са причинно независими – никое от тях не може да бъде нито причина, нито следствие за другото. В общия случай при $s^2 < 0$, т.е. *при имагинерен интервал, събитията са причинно независими*. Областта при $s^2 < 0$ е външността на светлинния конус. Тя се състои от т. нар. *псевдоедновременно събития*:

$$\text{псевдоедновременно събития} = \{s^2 < 0\} = \{(t, x, y, z): c^2 t^2 < x^2 + y^2 + z^2\}. \quad (1.68)$$

Понятията *бъдеще, минало и псевдоедновременно* не зависят от избора на ИОС, тъй като метриката на Минковски е инвариантна относно *преобразуванията на Лоренц*. Това означава, че ако:

- едно събитие е бъдещо спрямо друго събитие в една ОС, то си остава бъдещо и във всяка друга ИОС;
- едно събитие е минало спрямо друго събитие в една ОС, то си остава минало и във всяка друга ИОС;
- едно събитие е псевдоедновременно спрямо друго събитие в една ОС, то си остава псевдоедновременно и във всяка друга ИОС.

С други думи казано, знакът на s^2 не зависи от избора на ИОС.

По-нагледно можем да си представим светлинния конус чрез анимация. Събитието $(0, 0, 0, 0)$ е точка в 3-мерното пространство и в момент $t = 0$ на анимацията. След това за светлинен сигнал точката „избухва“ и става светеща и разширяваща се сфера с радиус ct . В сферата е бъдещето, самата сфера е конусът, а извън сферата са псевдоедновременните събития.

Ако в точката (x, y, z) има наблюдател, то разширяващата се светлинна сфера ще достигне до него за време $t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} / c$.

Казваме, че при $t > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} / c$ имаме причинно-следствена връзка между събитията (t, x, y, z) и $(0, 0, 0, 0)$, т. е. $(0, 0, 0, 0)$ повлиява на (t, x, y, z) , или че (t, x, y, z) се е случило след $(0, 0, 0, 0)$. Ако $t < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} / c$, събитията (t, x, y, z) и $(0, 0, 0, 0)$ нямат причинно-следствена връзка. Тогава не може да се каже кое събитие е „първо“ и кое е „второ“, т.е. те са квазиедновременни. Знакът на t е без значение, защото, ако кажем $t > 0$, то винаги съществува ИОС, в която $t = 0$, и друга, в която $t < 0$ – следователно двете събития са квазиедновременни.

§ 1.8. РЕЛАТИВИСТКА МАСА

За илюстрация на зависимостта на масата от скоростта ще са ни необходими трансформациите на Лоренц за скоростите. Ще ги получим, като използваме трансформациите на Лоренц за координатите от § 5. Нека както и там ОС K' се движи със скорост $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{x}^0$ спрямо ОС K (вж. фиг. 1-11). Нашата цел е да намерим съотношенията между компонентите на скоростите в двете ОС:

$$\text{в } K \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad \text{и в } K' \quad v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (1.69)$$

Диференцираме уравнения (1.47) (изменят се както координатите, така и времената в двете ОС):

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - v_0 dt), \\ dy' &= dy, \\ dz' &= dz, \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v_0}{c^2} dx\right). \end{aligned} \quad (1.70)$$

За компонентата v'_x лесно получаваме

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v_0 dt)}{\gamma[dt - (v_0 dx / c^2)]} = \frac{(dx / dt) - v_0}{1 - (v_0 / c^2)(dx / dt)}. \quad (1.71)$$

За другите компоненти на скоростта изразите са аналогични и сумарно имаме:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - v_0}{1 - (v_0 v_x / c^2)}, \\ v'_y &= \frac{v_y}{\gamma[1 - (v_0 v_x / c^2)]}, \\ v'_z &= \frac{v_z}{\gamma[1 - (v_0 v_x / c^2)]}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

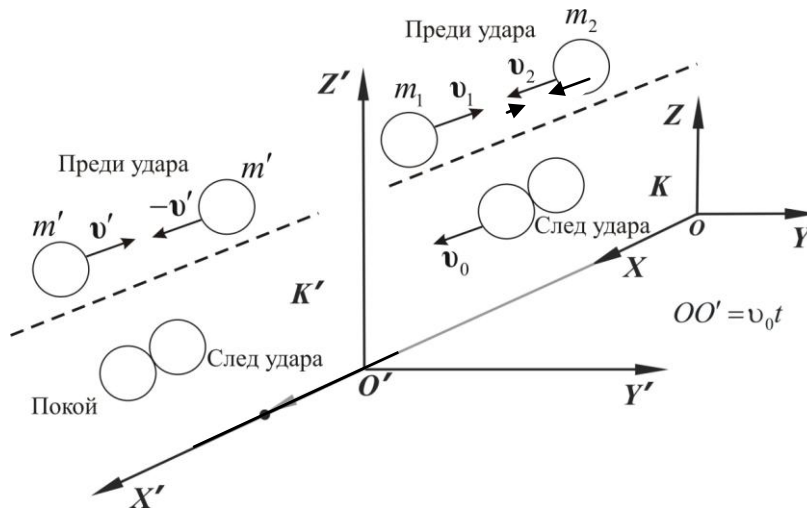
Аналогично получаваме скоростите в ОС K чрез скоростите в ОС K' :

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{v'_x + v_0}{1 + (v_0 v'_x / c^2)}, \\
 v_y &= \frac{v'_y}{\gamma [1 + (v_0 v'_x / c^2)]}, \\
 v_z &= \frac{v'_z}{\gamma [1 + (v_0 v'_x / c^2)]}.
 \end{aligned}
 \tag{1.73}$$

Ще разгледаме идеален нееластичен удар в ОС K' на две еднакви частици с маса m' . След удара те остават залепени една за друга (представете си две топчета от восък). За простота аналогично на еластичния удар в § 1 ще предположим, че частиците се движат по оста X със скорости v'_x и $-v'_x$. При нееластичен удар е в сила законът за запазване на импулса. Ще напишем този закон от гледна точка на наблюдател в системата K' и на наблюдател в K (за наблюдателя в K слетите след удара частици ще се движат със скорост v_0 (фиг. 1-15)):

$$\begin{aligned}
 m'v'_x + m'(-v'_x) &= 0 \quad \text{в } K', \\
 m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} &= (m_1 + m_2)v_0 \quad \text{според } K.
 \end{aligned}
 \tag{1.74}$$

Ще отбележим, че от гледна точка на наблюдателя в ОС K скоростите на двете частици са различни, а от това следва, че и масите се различават. Тук компонентите v_{1x} и v_{2x} в K са



Фиг. 1-15. Идеален нееластичен удар в K' на две еднакви частици с маси m' : в ляво как вижда удара наблюдателят в ОС K' , а в дясно как го вижда наблюдателят в ОС K .

$$\begin{aligned} v_{1x} &= \frac{v_x' + v_0}{1 + (v_0 v_x' / c^2)}, \\ v_{2x} &= \frac{-v_x' + v_0}{1 - (v_0 v_x' / c^2)}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Ако положим $M = m_1 + m_2$ в K , второто уравнение на (1.71) може да запишем по следните два начина:

$$\begin{aligned} m_1(v_{1x} - v_{2x}) &= M(v_0 - v_{2x}), \\ m_2(v_{1x} - v_{2x}) &= M(v_{2x} - v_0)v_0 \end{aligned} \quad (1.76)$$

Разделяйки почленно тези две уравнения и замествайки v_{1x} и v_{2x} от (1.56), получаваме

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_0 - v_{2x}}{v_{1x} - v_0} = \frac{1 + (v_x' v_0 / c^2)}{1 - (v_x' v_0 / c^2)}. \quad (1.77)$$

За да намерим вдясно числителя и знаменателя на това уравнение в подходящ вид, ще използваме изразите $\sqrt{1 - (v_{1x}^2 / c^2)}$ и $\sqrt{1 - (v_{2x}^2 / c^2)}$, като стойностите на v_{1x} и v_{2x} вземем от (1.75). От първия израз имаме

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2}{c^2}} &= \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\frac{v_x' + v_0}{1 + (v_x' v_0 / c^2)} \right]^2} = \frac{\sqrt{[1 - (v_0^2 / c^2)][1 - (v_x')^2 / c^2]}}{1 + (v_x' v_0 / c^2)} \\ \Rightarrow 1 + \frac{v_x' v_0}{c^2} &= \frac{\sqrt{[1 - (v_0^2 / c^2)][1 - (v_x')^2 / c^2]}}{\sqrt{1 - (v_{1x}^2 / c^2)}}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Аналогично

$$1 - \frac{v_x' v_0}{c^2} = \frac{\sqrt{[1 - (v_0^2 / c^2)][1 - (v_x')^2 / c^2]}}{\sqrt{1 - (v_{2x}^2 / c^2)}}. \quad (1.79)$$

Заместваем (1.78) и (1.79) в (1.77):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1 - (v_{2x}^2/c^2)}}{\sqrt{1 - (v_{1x}^2/c^2)}} \rightarrow m_1 \sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2}{c^2}} = m_2 \sqrt{1 - \frac{v_{2x}^2}{c^2}} = \text{const} = m_0. \quad (1.80)$$

Тук m_0 е масата на покой на всяка една от двете частици. Така, ако тяло с маса на покой m_0 се движи със скорост v по отношение на наблюдател, неговата маса ще бъде:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0. \quad (1.81)$$

Вижда се, че в общия случай масата не е постоянна величина. Само когато тялото е в покой, масата му е постоянна и равна на m_0 . Но когато то се движи със скорост v , неговата маса се увеличава на m . Това е релативистката маса. Инвариантна величина в релативистката физика е m_0 , а не m . В класическата физика разликата между m_0 и m е пренебрежимо малка, тъй като в нея скоростите v по отношение на скоростта на светлината са толкова малки, че от (1.81) е ясно, че $m \rightarrow m_0$. Ако обаче $v \rightarrow c$, то $m \rightarrow \infty$, което означава, че ако искаме частицата да се движи със скоростта на светлината, то трябва да ѝ увеличим масата до безкрайност! Ясно е, че това е невъзможно и този факт е една от причините да смятаме, че c е граничната скорост, която не може да бъде достигната от частицата.

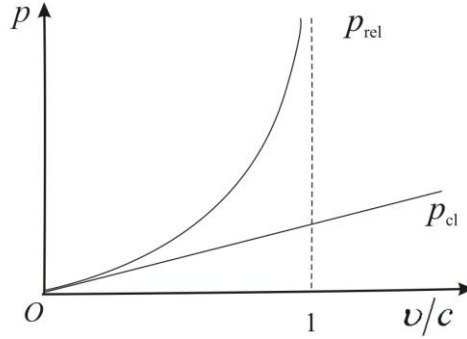
§ 1.9. РЕЛАТИВИСТКИ ИМПУЛС И РЕЛАТИВИСТКА ЕНЕРГИЯ

Трите основни величини в механиката са енергията, времето и масата. От предходния параграф вече знаем, че времето и дължината са относителни, т.е. техните стойности зависят от това, в каква ОС ги измерваме. За третата величина – за масата в § 1.8 доказахме, че тя е относителна. Айнщайн е показал, че масата на тялото зависи от неговата скорост (1.81), т.е. *с увеличаване на скоростта масата на тялото нараства* (скоростта на тялото е фактически скоростта v_0 на ОС – $v = v_0$). Формулата (1.81) следва от СТО. Тя е доказана експериментално посредством опити с елементарни частици.

В класическата механика характеризирахме масата като мярка за инертността. *При увеличаване на скоростта инертността расте*. След като знаем зависимостта на масата от скоростта, лесно можем да въведем релативистки импулс. По определение импулсът е $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Заместваме масата от (1.81) и получаваме

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1.82)$$

На фиг. 1-16 са представени зависимостите на релятивисткия импулс и на класическия импулс от скоростта.



Фиг. 1-16. Релятивистски (p_{rel}) и класически импулс (p_{cl}) като функция на скоростта.

В класическата механика кинетичната енергията е свързана с масата и импулса – $E_k = mv^2/2 = p^2/2m$. Каква е връзката им при големи скорости $v \sim c$? Както в класическата механика, кинетичната енергията може да се означава като работата на силата $\mathbf{F}$. Взимайки силата $\mathbf{F}$ от втория закон на Нютон, при произволни скорости за E_k получаваме

$$E_k = \int_0^x F dx = \int_0^x \frac{d(mv)}{dt} dx = \int_0^v \frac{dx}{dt} d(\gamma m_0 v) = m_0 \int_0^v v d(\gamma v). \quad (1.83)$$

В скобите под интеграла имаме:

$$\begin{aligned} d\gamma &= d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{v}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv, \\ d(\gamma v) &= \gamma dv + v d\gamma = \\ &= \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} dv + \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} dv \right] = \frac{dv}{\left[1 - (v^2/c^2)\right]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Заместваме $d(\gamma v)$ в (1.83) и получаваме

$$\begin{aligned} E_k &= m_0 \int_0^v v d(\gamma v) = m_0 \int_0^v \frac{v dv}{\left[1 - (v^2/c^2)\right]^{3/2}} = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \Big|_0^v = \\ &= m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - 1 \right] = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2, \end{aligned} \quad (1.84a)$$

$$\text{т.е.} \quad E_k = m_0 \gamma c^2 - m_0 c^2 = m c^2 - m_0 c^2. \quad (1.84\bar{6})$$

Членът $m_0 c^2$ се нарича *енергия на покой* E_0 : $E_0 = m_0 c^2$.

Често наричат енергията на покой E_0 *собствена енергия* на тялото:

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (1.85)$$

Да запишем (1.84) малко по-иначе – $m c^2 = E_k + m_0 c^2 = E_k + E_0$. В класическата механика пълната енергия E е сума от кинетичната енергия E_k и потенциалната енергия E_p : $E = E_k + E_p$. Аналогията е очевидна. Релативистката пълна енергия е

$$E = m c^2 = E_k + E_0 = m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}. \quad (1.86)$$

Тяло с маса m има запас от енергия $m c^2$. Това твърдение днес широко се използва в ядрената енергетика.

Като *пример* за еквивалентността на масата и енергията може да ни служи енергията E_0 , която се съдържа в 1 g пясък. Съгласно (1.85)

$E_0 = (10^{-3} \text{ kg}) (3.10^8 \text{ m/s})^2 = 9.10^{13} \text{ J}$. Да сравним тази енергия с енергията 7000 cal на 1 g въглища, която се отделя при изгарянето им. В джаули тази енергия е изразена по следния начин: $7000 \text{ cal} \cdot 4,18 \text{ J/cal} = 2,9.10^4 \text{ J}$. Виждаме, че собствената енергия е $3,1.10^9$ пъти по-голяма от химичната енергия на въглищата.

Да се докоснем до въпроса за релативистката кинетична енергия. В класическата механика кинетичната енергия е енергия на движението. Следователно релативистката кинетична енергия E_k можем да получим, като извадим от пълната енергия E енергията на покой E_0 :

$$E_k = E - E_0 = m c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\left(1 - v^2 / c^2 \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] = m_0 c^2 (\gamma - 1). \quad (1.87)$$

Виждаме, че изразът (1.84 $\bar{6}$) е много различен от класическия $E_k = m v^2 / 2$. Но при малки скорости ($v / c \ll 1$) (1.84) трябва да премине в класическия израз. Това може да се покаже, като разложим γ в ред на Тейлър (Tyler) и запазим само първите два члена:

$$\begin{aligned} \lim_{v/c \ll 1} E_k &= \lim_{v/c \ll 1} \left\{ m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (v^2 / c^2)}} - 1 \right] \right\} \\ &\simeq m_0 c^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) - 1 \right] = m_0 v^2 / 2. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Да видим как можем физически да интерпретираме (1.84). За целта ще го запишем така

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \Delta mc^2. \quad (1.89)$$

Увеличението на кинетичната енергия на частицата се дължи на увеличението на нейната маса. От съотношението се подразбира, че в релативистката механика промяната на кинетичната енергия води до промяна на масата и обратно. Пръв до този извод е достигнал Айнщайн. Той е предположил, че ако масата на покой на частиците се намали с Δm , то при това ще се отдели енергия, равна на разликата в масите, умножена по c^2 – $\Delta E_k = (\Delta m)c^2$.

Ще илюстрираме това с енергията на свързване. Най-напред ще дадем определение за свързани системи. Свързана система е тази, която има маса на покой, по-малка от сумата от отделните маси на покой на нейните компоненти. В свързаната система потенциалната енергия е отрицателна, което съответства на сили на привличане. Свързани системи са например атомните ядра (вж. например § 17.2.2).

Да разгледаме две тела съответно с маси m_1 и m_2 , които образуват свързана система (едно тяло) с маса M :

$$m_1 + m_2 - M = \Delta m. \quad (1.90)$$

Съгласно Айнщайн системата ще отдели енергия $E_b = \Delta mc^2$ поради намаляването на масата с Δm

$$E_b = \Delta mc^2 = (m_1 + m_2 - M)c^2. \quad (1.91)$$

Тази енергия E_b се нарича енергия на свързването (*binding energy*; често се употребява енергия на връзката). Енергията E_b се освобождава при образуване на свързаната система (фиг. 1-17а). Именно освобождаването на енергията на свързване е събиране заедно на частите на системата. Ако осигурим на системата поглъщане на енергията E_b , то както е показано на фиг. 1-17б, тя ще се разпадне на отделни тела с маси m_1 и m_2 :

$$M + E_b / c^2 = m_1 + m_2. \quad (1.92)$$



Фиг. 1-17. а) Две частици с маси m_1 и m_2 се сливат, за да образуват стабилна свързана система с маса M , като при това се отделя енергия E_b . б) Поглъщане на енергията E_b (равна на енергията на свързването) от системата с маса M води до разпадането ѝ на части, на тела с маса m_1 и m_2 .

Съотношенията (1.91) и (1.92) са едно от най-важните следствия на зави-

симостта между енергията и масата от СТО. Ще илюстрираме това с един *пример* от атомната физика. Деутронът е ядро на деутерия (изотоп на H) и се състои от протон и неутрон. Масите на деутрона, протона и неутрона са съответно $M_d = 2,01410 \text{ аму}$, $m_p = 1,007825 \text{ аму}$, $m_n = 1,008665 \text{ аму}$. Сумата от отделните маси на протона и неутрона е $m_p + m_n = (1,007825 + 1,008665) \text{ аму} = 2,016490 \text{ аму}$ (за единицата аму, както и по-долу за MeV, вж. прил. I на [Л 1]). Съгласно (1.91) можем да запишем:

$$\begin{aligned} E_b &= (m_p + m_n - M_d)c^2 = \\ &= (2,01649 - 2,01440) \text{ аму} (3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) = 2,23 \text{ MeV}. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Това означава, че деутронът се образува от сливането на протон и неутрон, като се освобождава енергия от 2,23 MeV. Ако искаме деутронът да се разпадне на протон и неутрон, трябва да добавим енергия 2,23 MeV към деутрона:

$$M_d + 2,23 \text{ MeV}/c^2 = m_p + m_n. \quad (1.94)$$

Създаването на деутрон от протон и неутрон и неговото разпадане на протон и неутрон са доказани експериментално.

Да обсъдим връзката между E и p . Вземаме зависимостите (1.82) и (1.85). Повдигаме (1.86) на квадрат и получаваме

$$E^2 (1 - v^2/c^2) = m_0^2 c^4. \quad (1.95)$$

Разделяме (1.82) на (1.86) и получаваме

$$\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2} \Rightarrow v = \frac{pc^2}{E}. \quad (1.96)$$

Заместваме v в (1.86):

$$E^2 - \frac{E^2}{c^2} \left(\frac{pc^2}{E} \right)^2 = m_0^2 c^4. \quad (1.97)$$

След преобразувания окончателно получаваме уравнението

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (1.98)$$

Оттук се вижда че в релятивистката механика връзката между E и p съществено се различава от тази в класическата – $E = p^2 / 2m + E_p$.

И нека накрая съвсем накратко да споменем за две основни величини на механиката – действието и функцията на Лагранж (преглед за

използването им в класическата механика е дадено в гл. 3). Да намерим тези физични величини за свободна релативистка частица.

По определение (вж. § 3.1) функционалът S е равен на

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) dt. \quad (1.99)$$

Тук q_j и $\dot{q}_j$ са обобщените координати и обобщените скорости (гл. 3).

Интегралът, изразяващ действие, трябва да бъде инвариантен относно преобразуванията на Лоренц. Следователно той трябва да бъде взет от скалар, при това скаларът да има вид на диференциал от първа степен. Единствен скалар от такъв вид за свободна частица е величина, пропорционална на интервала ds (1.54): $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$. За действието между две точки с интервали съответно s_1 и s_2 , като означим коефициента на пропорционалност с k , имаме

$$S = \int_{s_1}^{s_2} k ds = \int_{s_1}^{s_2} k d\sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = \int_{t_1}^{t_2} kc \sqrt{1 - v^2/c^2} dt. \quad (1.100)$$

Следователно за функцията на Лагранж можем да запишем

$$\mathcal{L} = kc \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1.101)$$

При малки скорости, $v \ll c$, тази функция фактически преминава във нютоновска функция на Лагранж (3.38)

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} v^2. \quad (1.102)$$

Наистина, разлагайки функцията (1.101) в степенен ред по v/c , пренебрегвайки малките членове от порядък $0(c^2)$ и отхвърляйки постоянния член, получаваме

$$\mathcal{L} = -kv^2/2c. \quad (1.103)$$

Сравнението между последните две формули показва, че $k = -mc$. Следователно функцията на Лагранж за свободна частица е

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (1.104)$$

Тогава

$$S = m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} (1 - v^2/c^2)^{-1/2} dt \quad (1.105)$$

е действието на свободна частица.

РЕЗЮМЕ

Първият закон на Нютон е определение за ИОС: има такава отправна система, в която, ако едно тяло не взаимодейства с друго тяло, то запазва състоянието си на покой или праволинейно равномерно движение. Такава система се нарича ИОС.

Вторият закон на Нютон във вида

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

може да се прилага за малки скорости ($v \ll c$). Записан като

$$F = \frac{dmv}{dt} = \frac{dp}{dt},$$

той може да се прилага за произволни скорости.

За своите закони Нютон въвежда понятията абсолютно пространство и абсолютно време.

Ако ИОС K' се движи по оста X със скорост v_0 спрямо ИОС K , то координатите в K (x, y, z) и координатите в K' (x', y', z') в момент от време t са свързани с трансформациите на Галилей:

$$\begin{aligned}x &= x' + v_0 t, \\y &= y', \\z &= z' .\end{aligned}$$

Времето в двете отправни системи е едно и също ($t = t'$). Постоянни в двете ИОС, т.е. инвариантни, остават ускорението и действащата сила.

Принципът на Галилей гласи, че законите на механиката са едни и същи във всички инерциални отправни системи.

До началото на XX в. се е смятало, че светлината се разпространява в среда, наречена ефир, както звуковите вълни – във въздуха. Опитът на Майкелсъ и Морли показва, че няма ефир и скоростта на светлината c е постоянна – не зависи от движението на източника и (или) приемника.

Преобразуванията на Галилей математически се задават с 10-мерна група от смени на променливите, наречена група на Галилей.

Редица обекти в природата се разпространяват със скорост, близка или равна на скоростта на светлината c . Това са електромагнитните вълни, светлината като част от тях, електронът в атома, елементарните частици, галактиките и др.

Механиката, описваща движения при скорости, близки до скоростта на светлината, $v \sim c$, се нарича релативистка механика. На основата на експерименталните факти в опита на Майкелсъ и Морли Айнщайн издига своите знаменити принципи, които лежат в основата на СТО:

Първи принцип – скоростта на светлината е постоянна (една и съща) във всички ИОС. Втори принцип – не е възможно в една ОС да се установи нейното равномерно и праволинейно движение спрямо ИОС.

При скорости, сравними със скоростта на светлината, понятието едновременност е относително.

Две събития, които са едновременни от гледна точка на един наблюдател в една ИОС, може да не са едновременни и от гледна точка на втория наблюдател, намиращ се в друга ИОС. Тоест при голяма скорост, близка до тази на светлината, понятието едновременност не е абсолютно, а относително.

От относителността на едновременността следва относителност на времето. В ОС времето t_0 на събитията, които стават на едно и също място, е $\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2} = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}$ пъти по-малко от времето t между събитията в ОС, която се движи със скорост v спрямо първата; интервалът от време между събитията в ОС, в която те стават на едно и също място от пространството, се нарича собствено време τ : $\tau = t / \gamma$. Разстоянията в движещата се със скорост v система са γ пъти по-малки от разстоянията в неподвижна система. С други думи, дължината L на едно тяло е по-малка, когато то се движи, отколкото дължината му L_0 , когато е в покой. Дължината на тялото в ОС, в която то е в покой, се нарича собствена дължина $L_0 = \gamma L$.

При скорости, сравними със скоростта на светлината, пространствените координати и времето в две ИОС са свързани с трансформациите на Лоренц:

$$x' = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad z' = z, \quad y' = y, \quad t' = \frac{t - (v / c^2)x}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

В трансформациите на Лоренц t и t' не са вече независими от координатите както при трансформациите на Галилей – t е функция на t' и x' , а t' – на t и x , т.е. координатите и времето в едната ИОС зависят едновременно от координатите и времето в другата ИОС. Така че пространството и времето могат да се интерпретират като компоненти на един 4-мерен вектор.

Величината s_{12} , чийто квадрат се определя по формулата

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2,$$

се нарича интервал между събитията 1 и 2.

Интервалът между две събития е неизменен при прехода от K в K' , т.е. интервалът е инвариант.

Аналог на 10-мерната група на Галилей в СТО е 10-мерната група на Поанкаре.

Точката на събитието в 4-мерното пространство се нарича *мирова точка*. С течение на времето мировата точка на даден обект се премества в 4-мерното пространство, като описва някаква линия, която се нарича *мирова линия*.

Светлинен конус се нарича 3-мерният конус $s = 0$ или еквивалентно $\{(t, x, y, z) : c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.

Вътрешността на светлинния конус е от две части: горна при $t > 0$, т.е. бъдеще, и долна при $t < 0$, т.е. минало:

$$\text{бъдеще} = \{s > 0, t > 0\} = \{(t, x, y, z) : t > 0, c^2 t^2 > x^2 + y^2 + z^2\},$$

$$\text{минало} = \{s > 0, t < 0\} = \{(t, x, y, z) : t < 0, c^2 t^2 > x^2 + y^2 + z^2\}.$$

Външността на светлинния конус ($s^2 < 0$) се състои от т. нар. *псевдоедновременно събития*:

$$\text{псевдоедновременно събития} = \{s^2 < 0\} = \{(t, x, y, z) : c^2 t^2 < x^2 + y^2 + z^2\}.$$

Понятията бъдеще, минало и псевдоедновременност не зависят от избора на ИОС, тъй като метриката на Минковски е инвариантна относно преобразуванията на Лоренц.

При големи скорости масата на тялото нараства:

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2} = \gamma m_0.$$

Величината m_0 е масата на тялото при покой и се нарича маса на покой. Импулсът на тяло с маса m_0 в ОС, движеща се със скорост v , зависи от скоростта по следния начин:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Запасената в едно тяло енергия е равна на

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2.$$

Кинетичната енергия на частицата се дължи на изменението на нейната маса:

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2 = \Delta m c^2.$$

При образуване на свързана система с маса M от частици с маси m_1 и m_2 се освобождава енергия E_b :

$$E_b = \Delta m c^2 = (m_1 + m_2 - M) c^2.$$

Тази енергия E_b се нарича енергия на връзката (binding energy).

При големи скорости енергията и импулсът са свързани по следния начин:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4.$$

Тази връзка съществено се различава от еквивалентната ѝ в класическата механика.

Функцията на Лагранж за свободна частица при $v \sim c$ е

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2 / c^2},$$

$$\text{а } S = m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} (1 - v^2 / c^2)^{-1/2} dt$$

е действието на свободна частица.

ВЪПРОСИ

1. Какво гласи първият закон на Нютон?
2. Първият закон на Нютон – това определение ли е?
3. Какво гласи вторият закон на Нютон и може ли той да се прилага за големи скорости?
4. Какво представляват трансформациите на Галилей?
5. Коя величина е инвариантна в класическата механика?
6. Какво гласи принципът на Галилей?
7. Какво е инерциална отправна система?
8. Валидни ли са трансформациите на Галилей за сферична електромагнитна вълна?
9. Как математически представяме трансформациите на Галилей?
10. Какво е генератор на група?
11. Какво е ефир?
12. Какво разбирате под забавяне на времето?
13. Какво разбирате под съкращаване на дължината?
14. Какво е собствено време?
15. Какво е собствена дължина?
16. Кога използваме трансформациите на Лоренц?
17. От кои величини на движещата се система зависят координатите на една точка в неподвижната система?
18. Защо координатите или времето в една ИОС зависят линейно от координатите и времето в друга ИОС?
19. Какво е интервал в 4-мерното пространство-време на Минковски?
20. Какво е група на Поанкаре?
21. Какво е светлинен конус?
22. Кои области на светлинния конус са бъдеще и минало?
23. Кои събития са в областта $s^2 < 0$ на светлинния конус?
24. Следват ли забавяне на времето и съксяване на дължината от трансформациите на Лоренц?

25. Как зависи масата от скоростта?
26. Как зависи импулсът от скоростта в релятивистката теория?
27. Каква е връзката между енергията и масата?
28. Какво значи еквивалентност между масата и енергията?
29. Какво е енергия на покой?
30. Какво е енергия на свързването?
31. Какво е кинетична енергия E_k в релятивистката теория?
32. Каква е връзката между енергията и импулса в релятивистката теория?

ЗАДАЧИ

1. Какво става с масата на телата, ако скоростта се увеличава и се приближава до скоростта на светлината?
2. Мюонът е елементарна частица, която се разпада на електрон и две други елементарни частици, неутрина, за $2,2 \cdot 10^{-8}$ s, когато сме в неговата ОС. Какво е времето на живот на мюона за наблюдателя, покрай който мюонът минава със скорост $2,9 \cdot 10^8$ m/s?
3. Каква е скоростта на космически кораб, ако за 1 h на неговия часовник съответстват 1 h и 1 s на часовника на Земята?
4. Електрон се движи със скорост 99,99% от скоростта на светлината. Каква е неговата маса?
5. Електрон се ускорява с потенциална разлика $\Delta V = 10^7$ V. Намерете неговите: а) кинетична енергия, б) пълна релятивистка енергия, в) маса, г) скорост и д) импулс.
6. Космонавт лежи в космически кораб успоредно на движението на кораба. За наблюдателя от Земята корабът се движи със скорост $v = 2 \cdot 10^4$ km/s и космонавтът е висок 1,30 m. Какъв е ръстът на космонавта, когато той е в покой?

и