Задача 10. Нека A е обратима $n \times n$ матрица. Докажете, че числото на обусловеност относно произволна норма удовлетворява

$$k(A) \geq \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \right) / \left(\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \right),$$

където $(\lambda_i)_{i=1}^n$ са собствените стойности на A.

Лема. Нека A е обратима и λ е собствена стойност за A. Тогава $\frac{1}{\lambda}$ е собствена стойност за A^{-1}. При това всички собствени стойности на A се получават по този начин.

Доказателство. Нека $\mathbf{v}$ е собствен вектор, отговарящ на λ, т.е. $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. Тогава $\mathbf{v} = A^{-1}A\mathbf{v} = A^{-1}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda(A^{-1}\mathbf{v})$. Следователно $A^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v}$, т.е. реципрочните на собствените стойности на A са собствени стойности на A^{-1}.

Нека сега $\frac{1}{\lambda}$ е собствена стойност за A^{-1}. Тогава $(\lambda^{-1})^{-1} = \lambda$ е собствена стойност за $(A^{-1})^{-1} = A$, т.е. собствените стойности на A^{-1} са измежду реципрочните на собствените стойности на A.

Следователно собствените стойности на A^{-1} са точно реципрочните на собствените стойности на A. □

Решение. Знаем, че относно произволна норма е в сила неравенството

$$\|A\| \leq \rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

От лемата получаваме, че

$$\left(\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \right)^{-1} = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{|\lambda_i|} = \rho(A^{-1}).$$

От горните две наблюдения следва, че

$$k(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq \rho(A)\rho(A^{-1}) = \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \right) / \left(\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \right),$$

което и трябваше да се докаже.

Задача 11. Нека $\tilde{\mathbf{x}}$ удовлетворява $\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$, където

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1,01 & -0,01 \\ 0,02 & 2,02 \end{pmatrix}, \ \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2,02 \\ 3,99 \end{pmatrix}.$$

Без да намирате $\tilde{\mathbf{x}}$ оценете $\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Ще смятаме, че началните състояния на A и $\mathbf{b}$ са

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \ \text{(за тях очивдно } A\mathbf{x} = \mathbf{b}\text{)}.$$

Знаем, че за произволна $n \times n$ матрица $X = (x_{ij})_{n\times n}$ е в сила

$$\|X\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}|.$$

Следователно $\|A\|_\infty = 2,\ \|\tilde{A}\|_\infty = 2,04,\ \|A - \tilde{A}\|_\infty = 0,04$. Оттук $\epsilon(\tilde{A}) = \frac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} = 0,02$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_\infty = 1 \Rightarrow k(A) = 2.$$

$$q = \|A - \tilde{A}\|\|A^{-1}\| = 0,04,\ \epsilon(\tilde{\mathbf{b}}) = \frac{\|\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = 0,005.$$

Съгласно **Теорема 2** от **Въпрос 5** е в сила оценката

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \epsilon(\tilde{\mathbf{x}}) \le \frac{k(A)}{1-q}(\epsilon(\tilde{A}) + \epsilon(\tilde{\mathbf{b}})) = \frac{2}{0,96}(0,02 + 0,005) = \frac{5}{96}.$$

Задача 12. Нека A е обратима $n \times n$ матрица.

а) Докажете, че

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{m(A)},\ m(A) = \min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|.$$

б) Нека $\|\mathbf{e}_j\| = 1,\ \mathbf{e}_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T,\ j = 1, ..., n$. Докажете, че

$$k(A) \geq \left(\max_{1\leq j\leq n} \|\mathbf{a}_j\|\right) / \left(\min_{1\leq j\leq n} \|\mathbf{a}_j\|\right),$$

където $\mathbf{a}_j$ е j-тият стълб на A.

Доказателство. а) Нека $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\| = 1$, е произволен. Тогава $\|A^{-1}\|.\|A\mathbf{x}\| \geq \|A^{-1}A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| = 1$. Тъй като това е вярно за произволен единичен вектор, то

$$\|A^{-1}\| \geq \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \frac{1}{\|A\mathbf{x}\|} = \left(\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|\right)^{-1} = \frac{1}{m(A)}.$$

За обратната посока, $\|A^{-1}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A^{-1}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$. Нека този максимум се достига за вектора $\mathbf{x}_0$. Полагаме $\mathbf{y}_0 = A^{-1}\mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{x}_0 = A\mathbf{y}_0$. Тогава

$$\|A^{-1}\| = \frac{\|A^{-1}\mathbf{x}_0\|}{\|\mathbf{x}_0\|} = \frac{\|\mathbf{y}_0\|}{\|A\mathbf{y}_0\|} \leq \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{y}\|}{\|A\mathbf{y}\|} = \min_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \left(\frac{\|A\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|}\right)^{-1} = \frac{1}{m(A)}.$$

б) Тъй като $\{\mathbf{e}_1, .., \mathbf{e}_n\} \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \|\mathbf{x}\| = 1\}$, то за всяка функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ са изпълнени неравенствата

$$\max_{1\leq j\leq n} f(\mathbf{e}_j) \leq \max_{\|\mathbf{x}\|=1} f(\mathbf{x}),\ \min_{1\leq j\leq n} f(\mathbf{e}_j) \geq \min_{\|\mathbf{x}\|=1} f(\mathbf{x}).$$

Тъй като за $j = 1, .., n$ е в сила $\mathbf{a}_j = A\mathbf{e}_j$, то

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \geq \max_{1\leq j\leq n} \|A\mathbf{e}_j\| = \max_{1\leq j\leq n} \|\mathbf{a}_j\|,$$

$$\|A^{-1}\| \geq \left(\min_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|\right)^{-1} \geq \left(\min_{1\leq j\leq n} \|A\mathbf{e}_j\|\right)^{-1} = \left(\min_{1\leq j\leq n} \|\mathbf{a}_j\|\right)^{-1}.$$

Като умножим двете неравенства, получаваме търсеното ($k(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|$).

$\square$

Забележка. Идеята на тази задача е, че ако знаем, че векторите от стандартния базис са с единична дължина (например в L^p пространствата), то лесно можем да оценим числото на обусловеност на A отдолу с отношението на най-дългия и най-късия от стълбовете на A.

Задача 13. Нека $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Да се намери в явен вид

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Упътване: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Характеристичният полином на A е

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

с корени $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$ - собствените стойности на A. Собствените вектори, отговарящи на съответните собствени стойности са:

$$\lambda_1 = 1,\ \mathbf{v}_1 : (A - \lambda_1 E_2)\mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 3,\ \mathbf{v}_2 : (A - \lambda_2 E_2)\mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицата на прехода е

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Съответната диагонална матрица в новия (диагонален) базис е

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

като е изпълнено равенството $A = CDC^{-1}$. Обратната на C е

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(използвахме формулата $X^{-1} = \frac{1}{detX} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, където $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$).
Ще използваме, че $A^n = CD^nC^{-1}$. Имаме:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{CD^nC^{-1}}{n!} = C\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}\right) C^{-1} = Ce^DC^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^3 \\ -e & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e+e^3}{2} & \frac{-e+e^3}{2} \\ \frac{-e+e^3}{2} & \frac{e+e^3}{2} \end{pmatrix}.$$

Задача 14. Нека $A = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ q & p & q \\ 0 & q & p \end{pmatrix}$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Намерете всички стойности на p и q, за които методът на простата итерация е сходящ за всяко начално приближение $\mathbf{x}^{(0)}$.

Решение. Нека $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (сходимостта на метода не зависи от дясната страна на уравнението). Решаваме $i-$ тото уравнение относно x_i за $i = 1, 2, 3$. Това е възможно при $p \neq 0$. Получаваме системата

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{q}{p} & 0 \\ -\frac{q}{p} & 0 & -\frac{q}{p} \\ 0 & -\frac{q}{p} & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичният полином на B е

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{q}{p} & 0 \\ -\frac{q}{p} & -\lambda & -\frac{q}{p} \\ 0 & -\frac{q}{p} & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 - 2(-\lambda)\frac{q^2}{p^2}2 = (-\lambda)(\frac{\sqrt{2}q}{p} - \lambda)(-\frac{\sqrt{2}q}{p} - \lambda)$$

с корени $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}q}{p}, \ \lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}q}{p}$. За да бъде сходящ методът на простата итерация, необходимо и достатъчно е да е изпълнено $\rho(A) < 1$, т.е. $\frac{\sqrt{2}q}{p} \in (-1, 1)$, т.е. $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, |q| < \frac{p\sqrt{2}}{2}$.

Задача 15. Решаваме по метода на Зайдел системата $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Ако $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, намерете $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$.
б) Намерете $q < 1$ така, че $\|\mathbf{x}^{(k)} - \xi\|_\infty < q^k \|\|\mathbf{x}^{(0)} - \xi\|_\infty, \ k = 0, 1, ...$

Решение. Решаваме $i-$ тото уравнение относно x_i за $i = 1, 2, 3$. Получаваме системата

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{d}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

а) Методът на Зайдел е:

$$\left| \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{1}{2} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{4}x_3^{(k)} + \frac{3}{2} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_2^{(k+1)} + \frac{1}{2} \end{array} \right. , \ k = 0, 1, ...$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1^{(1)} = \frac{1}{4}x_2^{(0)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4}x_1^{(1)} + \frac{1}{4}x_3^{(0)} + \frac{3}{2} = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{4}x_2^{(1)} + \frac{1}{2} = \frac{13}{32} + \frac{1}{2} = \frac{29}{32} \end{array} \right. \Rightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 13/8 \\ 29/32 \end{pmatrix}.$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1^{(2)} = \frac{1}{4}x_2^{(1)} + \frac{1}{2} = \frac{13}{32} + \frac{1}{2} = \frac{29}{32} \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}x_1^{(2)} + \frac{1}{4}x_3^{(1)} + \frac{3}{2} = \frac{29}{128} + \frac{29}{128} + \frac{3}{2} = \frac{125}{64} \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{4}x_2^{(2)} + \frac{1}{2} = \frac{125}{256} + \frac{1}{2} = \frac{253}{256} \end{array}\right. \Rightarrow \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 29/32 \\ 125/64 \\ 253/256 \end{pmatrix}.$$

б) От **теорема 3** на **Въпрос 7** следва, че една такава оценка е

$$q = \|B\|_\infty = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |b_{ij}| = \frac{1}{2}.$$

Задача 16. Решаваме по метода на най-бързото спускане системата $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(1)} = ?$$

Сходящ ли е методът? Защо? (A е положително определена.)

Решение. $\mathbf{r}^{(0)} = A\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{b} = -\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}^T$.

$$(\mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)}) = (-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 = 11.$$

$$A\mathbf{r}^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix},\ (A\mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)}) = (-1)(-6)+(-3)(-11)+(-1)(-6) = 45.$$

$$\alpha_0 = \frac{(\mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)})}{(A\mathbf{r}^{(0)}, \mathbf{r}^{(0)})} = \frac{11}{45},\ \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - \alpha_0 \mathbf{r}^{(0)} = \frac{11}{45} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Характеристичните корени на A са $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3 + 2\sqrt{2}$. Тъй като те са положителни и A е симетрична матрица, то тя е и положително определена. Съгласно теоремата (недоказана) методът на най-бързото спускане е сходящ за всяко начално приближение $\mathbf{x}^{(0)}$ и в частност за даденото.