Упражнение 9, 10

Двойственост в линейното оптимиране

С всяка задача на ЛО може да бъде асоциирана друга задача на ЛО, наречена *двойствена* (или *спрегната*, *дуална*) на дадената. Връзките между тези две задачи ни позволяват:

- ако разполагаме с информация за разрешимостта на едната от тях, да имаме достатъчно информация и за разрешимостта на другата задача;
- ако знаем оптимално решение на едната задача да получим оптимално решение и на двойствената ѝ.

Двойствеността намира широко приложение при икономическата интерпретация на математическите модели, довели до съответната задача на ЛО. Този елемент на двойствеността ще бъде обект на част от упражненията по дисциплината Математическо оптимиране 2.

1. Права задача

Всяка задача на ЛО може да бъде сведена (чрез евентуална смяна на критерия и умножаване на ограниченията от тип $\leq$ с -1) до задача от вида

$$(P)\qquad \begin{aligned} \min z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \\ \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} &\geq b_i, \quad i \in I, \\ \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} &= b_i, \quad i \in \overline{I}, \\ x_j &\geq 0, \quad j \in J, \\ x_j &\gtreqless 0, \quad j \in \overline{J}. \end{aligned}$$

Така получената задача се нарича *права задача*. Тук I е индексно множество, подмножество на множеството $\{1, \dots, m\}$ от индекси на ограниченията, като $\overline{I} := \{1, \dots, m\} \setminus I$, а J е индексно множество, подмножество на множеството $\{1, \dots, n\}$ от индекси на променливите, като $\overline{J} := \{1, \dots, n\} \setminus J$. Знакът $\gtreqless$ използваме за означаване на свободните променливи. Така при КЗЛО $I = \overline{J} = \emptyset$.

Нека $\mathbf{A}$ е матрицата, чиито елементи по редове са координатите на векторите $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}$, $i = 1, \dots, m$. Така получаваме $m \times n$ матрицата от коефициентите пред неизвестните в левите страни на ограниченията на задачата. Вектор-стълбовете на $\mathbf{A}$, както и преди, ще означаваме с $\mathbf{A}_j$, $j = 1, \dots, n$. Векторът на целевата функция $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^{\mathrm{T}}$ и векторът на променливите $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ са от $\mathbb{R}^n$, а векторът с десните страни на ограниченията $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^{\mathrm{T}}$ е от $\mathbb{R}^m$.

2. Двойствена задача. Правила за написването ѝ

Определение 1. Задачата

$$
(DP) \qquad
\begin{aligned}
\max v(\boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}, \\
\pi_i &\geq 0, \quad i \in I, \\
\pi_i &\lesseqgtr 0, \quad i \in \overline{I}, \\
\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} &\leq c_j, \quad j \in J, \\
\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} &= c_j, \quad j \in \overline{J}.
\end{aligned}
$$

се нарича двойствена на задачата (P).

Твърдение 1. Двойствената на задачата (DP) е задачата (P).

Затова обикновено говорим за двойка *спрегнати* (*дуални*) *задачи*.

За по-голяма яснота при формулиране на правилата за писане на двойствената задача да напишем двете задачи една до друга

$$
\begin{aligned}
\min z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \\
\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} &\geq b_i, \quad i \in I, \\
\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} &= b_i, \quad i \in \overline{I}, \\
x_j &\geq 0, \quad j \in J, \\
x_j &\gtrless 0, \quad j \in \overline{J},
\end{aligned}
\qquad \Longleftrightarrow \qquad
\begin{aligned}
\max v(\boldsymbol{\pi}) &= \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}, \\
\pi_i &\geq 0, \quad i \in I, \\
\pi_i &\lesseqgtr 0, \quad i \in \overline{I}, \\
\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} &\leq c_j, \quad j \in J, \\
\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} &= c_j, \quad j \in \overline{J}.
\end{aligned}
$$

1. На всяко ограничение на правата задача се съпоставя променлива на двойствената задача, като на ограничение неравенство (равенство) съответства неотрицателна (свободна) променлива.

2. На всяка променлива на правата задача се съпоставя ограничение на двойствената задача, като на неотрицателна (свободна) променлива съответства ограничение неравенство (равенство).

3. Ако правата задача е за минимум (максимум), двойствената е за максимум (минимум). Коефициентите на целевата функция на спрегнатата

задача са десните страни на ограниченията на правата задача, а десните страни на ограниченията на двойствената задача са коефициентите на целевата функция на правата задача. Матриците от коефициентите пред неизвестните в левите страни на ограниченията на двете спрегнати задачи са транспонирани една на друга.

При писане на двойствената задача определящ е критерият (максимум или минимум) на дадената задача. Ако има ограничения на задачата от тип неравенство, които не са съгласувани с критерия, те се умножават с -1. След това се записва съответната спрегнатата задача.[1]

3. Основни теореми за двойственост

Теорема 1. За всяка двойка спрегнати задачи на ЛО е възможен точно един от следните три случая:

(а) Двете задачи имат оптимално решение. За всеки две допустими решения $\mathbf{x}$ на правата задача и $\boldsymbol{\pi}$ на двойствената задача е в сила неравенството

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi},$$

като равенство се достига тогава и само тогава, когато $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\pi}$ са оптимални решения на съответните задачи.

(б) Ако целевата функция на едната от двойка спрегнати задачи е неограничена върху допустимото ѝ множество, допустимото множество на двойствената ѝ задача е празно.

(в) Допустимите множества на двете задачи са празни.

От последните два случая става ясно, че твърдението в (б) не е обратимо, т. е. при празно допустимо множество на едната от двойка спрегнати задачи не е ясно (без допълнително изследване) защо дуалната задача няма решение. Освен това ако е известно, че двете спрегнати задачи имат допустими решения, то е налице случаят (а).

Теорема 2 (Условия за допълнителност)**.** Векторите $\mathbf{x}^*$ и $\boldsymbol{\pi}^*$, допустими съответно за правата и двойствената задача, са оптимални решения на

[1] Двойствената задача може да бъде записана и без да се съгласуват ограниченията от тип неравенство с критерия, но тогава съответните двойствени променливи не са неотрицателни, а *неположителни*!

съответните задачи тогава и само тогава, когато

$$\pi_i^*(\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* - b_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$(\mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^* - c_j)x_j^* = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Горните равенства са изпълнени автоматично за $i \in \overline{I}$ и $j \in \overline{J}$, защото за тези индекси ограниченията на съответните задачи са равенства. Така интересни са само индексите от индексните множества I и J. Сега ще изкажем Теорема 2 по друг начин. За целта даваме следните две определения.

Определение 2. Условията (ограниченията)

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \geq b_i \quad \text{и} \quad \pi_i \geq 0 \quad \text{за фиксирано } i \in I, \\ &x_j \geq 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \leq c_j \quad \text{за фиксирано } j \in J, \end{aligned} \tag{1}$$

се наричат *двойка спрегнати условия*.

Определение 3. Едно условие (от тип неравенство) в задача на ЛО се нарича *свободно*, ако за поне едно оптимално решение на задачата е удовлетворено като строго неравенство и *закрепено*, ако всяко оптимално решение го удовлетворява като равенство.

Така Теорема 2 има следната проста формулировка: Ако двойка спрегнати задачи са разрешими, то от всяка двойка спрегнати условия едното е свободно, а другото — закрепено.

Пример 1. Да се напише двойствената задача на задачата

$$z(\mathbf{x}) = 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & & & \leq & 5, \\ 9x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 54, \\ & - & x_2 & - & x_3 & \geq & -9, \\ \multicolumn{7}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.} \end{array} \tag{2}$$

Да се провери дали $\bar{\mathbf{x}} = (2, 0, 9)^{\mathrm{T}}$ и $\bar{\boldsymbol{\pi}} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ са оптимални решения съответно на задача (2) и на нейната спрегната задача.

Решение. Умножаваме предварително с -1 третото ограничение в (2) и след всяко ограничение пишем съответната двойствена променлива

$$z(\mathbf{x}) = 9x_1 + 5x_2 + 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{array}{rcrcrcr|l} & & x_2 & & & \leq & 5, & \pi_1 \\ 9x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 54, & \pi_2 \\ & & x_2 & + & x_3 & \leq & 9, & \pi_3 \\ \multicolumn{7}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.} & \end{array}$$

Така спрегнатата задача е

$$
\begin{aligned}
&v(\boldsymbol{\pi}) = 5\pi_1 + 54\pi_2 + 9\pi_3 \to \min,\\
&\qquad 9\pi_2 \qquad\quad \geq 9,\\
(3)\qquad &\pi_1 + 4\pi_2 + \pi_3 \geq 5,\\
&\qquad 4\pi_2 + \pi_3 = 5,\\
&\pi_1 \geq 0,\ \pi_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Елементарно се проверява, че $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\boldsymbol{\pi}}$ са допустими решения съответно на задачи (2) и (3), и понеже $z(\overline{\mathbf{x}}) = v(\overline{\boldsymbol{\pi}}) = 63$, то съгласно Теорема 1(a) те са оптимални.

Пример 2. Да се провери оптимален ли е векторът $\mathbf{x}^* = (3, 0, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ за задачата

$$
\begin{aligned}
z(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 &\to \max,\\
3x_1 - x_2 \qquad\quad + 2x_4 &\leq 16,\\
-x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4,\\
- x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0,\\
x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 4.&
\end{aligned}
$$

Решение. Спрегнатата задача е

$$
\begin{aligned}
v(\boldsymbol{\pi}) = 16\pi_1 + 4\pi_2 &\to \min,\\
3\pi_1 - \pi_2 \qquad\quad &\geq 2,\\
-\pi_1 - 2\pi_2 - \pi_3 &\geq -1,\\
\pi_2 - 3\pi_3 &\geq 4,\\
2\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 &\geq -6,\\
\pi_1 \geq 0.&
\end{aligned}
$$

Допускаме, че $\mathbf{x}^*$ (проверете допустимостта му) е оптимално решение. Тогава съгласно Теорема 2 в двойките спрегнати условия

$$
\begin{array}{rclcrcl}
3x_1 - x_2 + 2x_4 & \leq & 16 & \text{и} & \pi_1 & \geq & 0,\\
x_1 & \geq & 0 & \text{и} & 3\pi_1 - \pi_2 & \geq & 2,\\
x_2 & \geq & 0 & \text{и} & -\pi_1 - 2\pi_2 - \pi_3 & \geq & -1,\\
x_3 & \geq & 0 & \text{и} & \pi_2 - 3\pi_3 & \geq & 4,\\
x_4 & \geq & 0 & \text{и} & 2\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 & \geq & -6
\end{array}
$$

едното е свободно, а другото — закрепено, т. е. от

$$\left|\begin{array}{l} x_1^* = 3 > 0 \\ x_3^* = 1 > 0 \\ x_4^* = 3 > 0 \end{array}\right. \qquad \text{следва} \qquad \left|\begin{array}{rcrcrcr} 3\pi_1^* & - & \pi_2^* & & & = & 2 \\ & & \pi_2^* & - & 3\pi_3^* & = & 4 \\ 2\pi_1^* & + & 2\pi_2^* & + & \pi_3^* & = & -6 \end{array}\right.$$

за всяко оптимално решение $\boldsymbol{\pi}^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \pi_3^*)^{\mathrm{T}}$ на двойствената задача. Решаваме системата и получаваме $\boldsymbol{\pi}^* = (0, -2, -2)^{\mathrm{T}}$. Векторът $\boldsymbol{\pi}^*$ удовлетворява и останалите ограничения на двойствената задача. Така, допускайки, че $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение, намерихме допустимо решение на двойствената задача. Понеже $z(\mathbf{x}^*) = v(\boldsymbol{\pi}^*) = -8$, то $\mathbf{x}^*$ наистина е оптимално решение съгласно Теорема 1(a).

Нека коефициентът пред x_2 в целевата функция не е -1, а 7. Това води до промяна на дясната страна на второто ограничение на двойствената задача

$$-\pi_1 - 2\pi_2 - \pi_3 \geq 7. \tag{4}$$

Отново стигаме до вектора $\boldsymbol{\pi}^* = (0, -2, -2)^{\mathrm{T}}$. Сега обаче той не удовлетворява ограничението (4). В този случай векторът $\mathbf{x}^*$ не е оптимално решение на дадената задача, тъй като допускането, че $\mathbf{x}^*$ е оптимално решение и прилагането на Теорема 2 не води до допустим за двойствената задача вектор, който удовлетворява условията за допълнителност.

Пример 3. Да се провери оптимален ли е векторът $\mathbf{x}^* = (3, 0, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ за задачата

$$z(\mathbf{x}) = -x_1 + 3x_2 + x_4 \to \min,$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 11, \\ x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0, \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & \geq & 7, \end{array}$$

$$x_1 \geq 0.$$

Решение. Спрегнатата задача на дадената е

$$v(\boldsymbol{\pi}) = 11\pi_1 + 7\pi_3 \to \max,$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2\pi_1 & + & \pi_2 & & & \leq & -1, \\ & & \pi_2 & + & \pi_3 & = & 3, \\ -\pi_1 & & & - & 2\pi_3 & = & 0, \\ 2\pi_1 & - & \pi_2 & + & 3\pi_3 & = & 1, \\ & & & & \pi_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Системата ограничения на спрегнатата задача е несъвместима. От първите две равенства изразяваме π_2 и π_1 чрез π_3 и заместваме в третото. Последователно получаваме

$$\pi_2 = 3 - \pi_3, \quad \pi_1 = -2\pi_3 \Rightarrow 2\pi_1 - \pi_2 + 3\pi_3 = -4\pi_3 - 3 + \pi_3 + 3\pi_3 = -3 \neq 1,$$

т. е. допустимото множество на двойствената задача е празно. От Теорема 1 следва, че изходната задача е неразрешима. Тъй като допустимото множество на дадената задача не е празно (лесно се проверява, че $\mathbf{x}^*$ е допустим), то тогава целевата ѝ функция е неограничена.

Пример 4. Да се провери дали условието $x_2 \geq 0$ е свободно или закрепено в задачата

$$z(\mathbf{x}) = 3x_2 + 6x_3 + x_4 - 15x_5 \to \max,$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & 2x_5 & \leq & 2, \\ -x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \leq & 1, \end{array}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \dots, 5.$$

Решение. Двойствената задача

$$v(\boldsymbol{\pi}) = 2\pi_1 + \pi_2 \to \min,$$

$$\begin{array}{rcrcr} 2\pi_1 & - & \pi_2 & \geq & 0, \\ \pi_1 & & & \geq & 3, \\ \pi_1 & + & \pi_2 & \geq & 6, \\ & & \pi_2 & \geq & 1, \\ -2\pi_1 & + & 3\pi_2 & \geq & -15, \end{array}$$

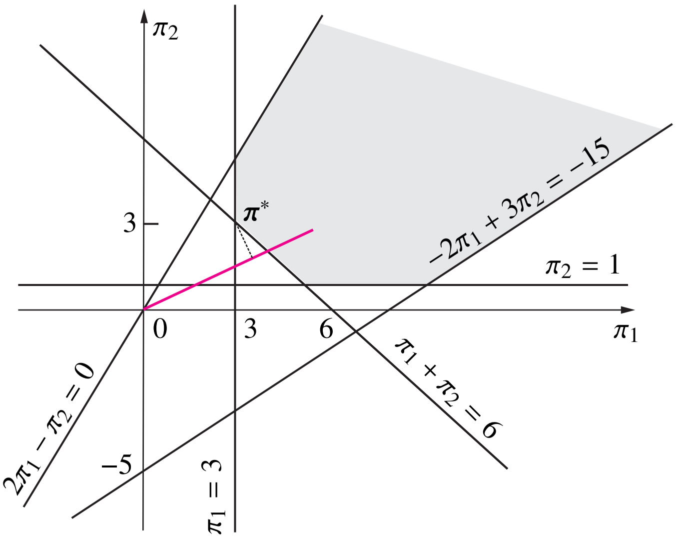
$$\pi_1 \geq 0, \; \pi_2 \geq 0$$

е с две променливи и може да бъде решена геометрично (фиг. 1). Тя има единствено оптимално решение $\boldsymbol{\pi}^* = (3,3)^{\mathrm{T}}$ и $v^* = 9$. Условието $x_2 \geq 0$ е спрегнато с условието $\pi_1 \geq 3$. Тъй като $\pi_1^* = 3$, условието $\pi_1 \geq 3$ е закрепено. Следователно условието $x_2 \geq 0$ е свободно.

4. Едновременно решаване на правата и двойствената задача със симплекс метода

Нека $\mathbf{x}^*$ е оптимално бдр на КЗЛО

$$\min z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$



Фиг. 1

и $\mathbf{B}^{-1}$ е обратната на базисната му матрица. Тогава

$$\boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1} \tag{5}$$

е оптимално решение на двойствената на КЗ

$$\max v(\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}, \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \le \mathbf{c}.$$

Обратната на текущата базисна матрица $\mathbf{B}^{-1}$ се намира там, където в първата симплексна таблица е била единичната матрица.

Да припомним, че относителните оценки се пресмятат по формулата $\overline{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = c_j - \boldsymbol{\pi}^*\mathbf{A}_j$. Нека j описват множеството на онези индекси, които са били базисни в началното бдр. Там съответните стълбове $\mathbf{A}_j$ са единични. Ако $\mathbf{A}_{j_i} = \mathbf{e}_i$, то $\overline{c}_{j_i} = c_{j_i} - \boldsymbol{\pi}^*\mathbf{e}_i = c_{j_i} - \pi_i^*$, откъдето

$$\pi_i^* = c_{j_i} - \overline{c}_{j_i}. \tag{6}$$

Пример 5. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1, \\ x_1 & & & - & 2x_3 & \ge & 3, \\ -x_1 & & & + & x_3 & \ge & -2, \end{array} \tag{7}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0.$$

Да се напише спрегнатата ѝ задача и да се намери нейно оптимално решение, като се използва симплексната таблица на намереното оптимално бдр на съответната канонична задача.

Решение. Решаването на задачата ще протече по следния начин:

1. Най-напред привеждаме задачата в каноничен вид и я решаваме с помощта на табличната форма на симплекс метода.

2. Написваме двойствената задача на каноничната задача и пресмятаме координатите на оптималното ѝ решение по някоя от формулите (5) или (6).

3. Написваме двойствената на дадената задача и я сравняваме с двойствената на КЗ. Между тези задачи *винаги* има връзка, защото са задачи с един и същи брой променливи. От установената връзка между двойствените задачи на дадената и на каноничната намираме оптималното решение на двойствената на дадената задача.

Канонизираме задача (7), като полагаме $x_3 = x_3^+ - x_3^-$

$$
\begin{aligned}
&\bar{z}(\mathbf{x}) = -3x_1 - x_2 - 2x_3^+ + 2x_3^- \to \min,\\
&\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
x_1 &+& x_2 &+& 3x_3^+ &-& 3x_3^- & & & & &=& 1,\\
x_1 & & &-& 2x_3^+ &+& 2x_3^- &-& x_4 & & &=& 3,\\
x_1 & & &-& x_3^+ &+& x_3^- & & &+& x_5 &=& 2,
\end{array}\\
&x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Съответната M-задача е

$$
\begin{aligned}
&z_M(\mathbf{x}_M) = -3x_1 - x_2 - 2x_3^+ + 2x_3^- + Mx_6 \to \min,\\
&\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
x_1 &+& x_2 &+& 3x_3^+ &-& 3x_3^- & & & & & & &=& 1,\\
x_1 & & &-& 2x_3^+ &+& 2x_3^- &-& x_4 & & &+& x_6 &=& 3,\\
x_1 & & &-& x_3^+ &+& x_3^- & & &+& x_5 & & &=& 2,
\end{array}\\
&x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5, x_6 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Последователните симплексни таблици са дадени в табл. 1–3. В таблици 2 и 3 стълбът x_6 продължава да участва, защото обратната базисна матрица на всяко бдр се намира в стълбовете, образуващи началния базис. В нашия случай началният базис е $[x_2, x_6, x_5]$ и съответните стълбове в табл. 3

съдържат елементите на обратната базисна матрица

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Таблица 1

$\mathbf{x}_M^{(0)}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		-3	-1	-2	2	0	0	M	0
x_2	-1	1	1	3	-3	0	0	0	1
x_6	M	1	0	-2	$\boxed{2}$	-1	0	1	3
x_5	0	1	0	-1	1	0	1	0	2
$\bar{\mathbf{c}}$		$-M-2$	0	$2M+1$	$-2M-1$	M	0	0	$-3M+1$

Таблица 2

$\mathbf{x}_M^{(1)}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		-3	-1	-2	2	0	0	M	0
x_2	-1	$5/2$	1	0	0	$-3/2$	0	$3/2$	$11/2$
x_3^-	2	$1/2$	0	-1	1	$-1/2$	0	$1/2$	$3/2$
x_5	0	$\boxed{1/2}$	0	0	0	$1/2$	1	$-1/2$	$1/2$
$\bar{\mathbf{c}}$		$-3/2$	0	0	0	$-1/2$	0	$M+1/2$	$5/2$

Таблица 3

$\mathbf{x}_M^{*}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		-3	-1	-2	2	0	0	M	0
x_2	-1	0	1	0	0	-4	-5	4	3
x_3^-	2	0	0	-1	1	-1	-1	1	1
x_1	-3	1	0	0	0	1	2	-1	1
$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	3	$M-1$	4

на оптималното решение $\mathbf{x}_M^* = (1, 3, 0, 1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, съответно на оптималното решение $\overline{\mathbf{x}}^* = (1, 3, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ на каноничната задача (8).

Оптималното решение на изходната задача е $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (1, 3, -1)^{\mathrm{T}}$ и $z^* = -\overline{z}^* = 4$.

Двойствената задача на каноничната задача (8) е

$$
\begin{aligned}
&v(\boldsymbol{\pi}) = \pi_1 + 3\pi_2 + 2\pi_3 \to \max, \\
&\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \le -3, \\
&\pi_1 \le -1, \\
&\left.\begin{aligned} 3\pi_1 - 2\pi_2 - \pi_3 &\le -2, \\ -3\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 &\le 2, \end{aligned}\right\} \iff -3\pi_1 + 2\pi_2 + \pi_3 = 2, \\
&-\pi_2 \le 0, \\
&\pi_3 \le 0.
\end{aligned} \tag{9}
$$

От табл. 3 може да се намери оптималното решение $\boldsymbol{\pi}^*$ (формула (5))

$$
\boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} = (-1, 2, -3) \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.
$$

Двойствената задача на изходната задача (7) (второто и третото ограничение в (7) са умножени предварително с -1) е

$$
\begin{aligned}
&w(\mathbf{y}) = y_1 - 3y_2 + 2y_3 \to \min, \\
&y_1 - y_2 + y_3 \ge 3, \\
&y_1 \ge 1, \\
&3y_1 + 2y_2 - y_3 = 2, \\
&y_2 \ge 0, \ y_3 \ge 0.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Непосредствено се проверява, че задачи (9) и (10) са еквивалентни при смяна на променливите

$$
y_1 = -\pi_1, \quad y_2 = \pi_2, \quad y_3 = -\pi_3.
$$

Следователно $\mathbf{y}_{\text{и}}^* = (1, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на двойствената задача (10) и $v(\mathbf{y}_{\text{и}}^*) = z(\mathbf{x}_{\text{и}}^*) = 4$.

Задачи

1. За всяка от дадените задачи да се напише спрегнатата ѝ задача:

1.1. $x_1 + 10x_2 - x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 &\leq 2, \\ x_2 \quad\quad &\leq 0, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.2. $x_1 + 4x_4 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 \quad\quad &\leq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\geq 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \quad\quad &\geq 5, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.3. $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max,$
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} &= b_i, \qquad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, \qquad j = 1, \dots, n+m; \end{aligned}$$

1.4. $\min\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$;

1.5. $\min\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$;

1.6. $\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$;

1.7. $\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$;

1.8. $\min\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$.

2. Да се даде пример за двойка спрегнати задачи:

а) всяка от които няма допустими точки;

б) едната има допустими точки, а другата няма.

3. Като се използват теоремите за двойственост, да се провери дали дадените вектори $\overline{\mathbf{x}}$ са оптимални решения на съответните задачи:

3.1. $2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad &\geq 2, \\ x_2 \quad\quad &\leq 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \\ \overline{\mathbf{x}} &= (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}; \end{aligned}$$

3.2. $x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} 4x_1 + 11x_2 + 3x_3 &= 7, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3, \\ \overline{\mathbf{x}} &= (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}; \end{aligned}$$

3.3. $5x_1 + 54x_2 + 9x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} 9x_2 \quad\quad &\geq 9, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &\geq 5, \\ 4x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0, \\ \overline{\mathbf{x}} &= (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}; \end{aligned}$$

3.4. $16x_1 + 4x_2 \to \min,$
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 \quad\quad &\geq 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 1, \\ x_2 - 3x_3 &\geq 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq -6, \\ x_1 &\geq 0, \\ \overline{\mathbf{x}} &= (0, -2, -2)^{\mathrm{T}}; \end{aligned}$$

3.5. $x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\geq 3, \\ x_1 \qquad\qquad &\geq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2, \end{aligned}$$
$$x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$\bar{\mathbf{x}} = (1, 1, 3)^{\mathrm{T}};$$

3.6. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= -3, \\ x_1 \qquad\qquad + 3x_4 &= 12, \\ x_2 + x_3 \qquad &= 1, \end{aligned}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4,$$
$$\bar{\mathbf{x}} = (3, 0, 1, 3)^{\mathrm{T}};$$

3.7. $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \max,$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 15, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 22, \end{aligned}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4,$$
$$\bar{\mathbf{x}} = (3, 4, 5, 0)^{\mathrm{T}};$$

3.8. $2x_1 - x_2 - x_3 \to \max$
$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5, \\ 2x_1 \qquad - x_3 &\leq 6, \\ x_1 \qquad + 2x_3 &\geq 4, \end{aligned}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0,$$
$$\bar{\mathbf{x}} = \left(\tfrac{16}{5}, -\tfrac{37}{5}, \tfrac{2}{5}\right)^{\mathrm{T}}.$$

4. Като се използват теоремите за двойственост, да се решат задачите:

4.1. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 6, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 8, \end{aligned}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3;$$

4.2. $z(\mathbf{x}) = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \to \max,$
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 &\leq -3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &\geq 3, \end{aligned}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4;$$

4.3. $z(\mathbf{x}) = -4x_1 - 8x_2 - 4x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -3, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -1, \end{aligned}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3;$$

4.4. $z(\mathbf{x}) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \end{aligned}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3;$$

4.5. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min,$
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1, \end{aligned}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3;$$

4.6. $z(\mathbf{x}) = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq -2, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 &\geq 1, \end{aligned}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3.$$

5. В следващите задачи да се провери дали условието $x_1 \geq 0$ е свободно:

5.1. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 14, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2,3; \end{aligned}$$

5.2. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 3a, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 &= 2a, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2,3. \end{aligned}$$

6. Да се решат с помощта на симплекс-метода дадените задачи. За всяка разрешима задача да се напише двойствената ѝ задача и да се пресметне оптималното ѝ решение, като се използува някоя от формулите (5) или (6):

6.1. $z(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 - x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 4, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= -5, \\ x_2 &\leq 6, \\ x_2 \geq 0,\ x_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

6.2. $z(\mathbf{x}) = -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 - x_2 &\leq 4, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq -3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

6.3. $z(\mathbf{x}) = -x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 3, \\ x_2 &\leq 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= -1, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2,3; \end{aligned}$$

6.4. $z(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -2, \\ x_1 &\leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

6.5. $z(\mathbf{x}) = -2x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 - x_3 &\leq 6, \\ x_1 + 2x_3 &\geq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0; \end{aligned}$$

6.6. $z(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -5, \\ x_1 &\leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

7. Да се намери минималната стойност на функцията $z(\mathbf{x})$:

7.1. $z(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_i &\geq i, \qquad i = 1,\ldots,n, \\ x_j &\geq 0, \qquad j = 1,\ldots,n; \end{aligned}$$

7.2. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{100},$

$$\begin{aligned} & x_i + x_{i+1} \geq \alpha_i, \quad i = 1,\ldots,99, \\ & x_1 + x_{100} \geq \alpha_{100}; \end{aligned}$$

7.3. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3,$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &\geq \mu_1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &\geq \mu_2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &\geq \mu_3; \end{aligned}$$

7.4. $z(\mathbf{x}) = x_1 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_3,$

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &\geq \mu, \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 + x_3 &\geq \mu, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 &\geq \mu. \end{aligned}$$

8. Да се докаже, че задачите

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_b\}, \quad P_b = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \\ &\text{II.} \quad \max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_d\}, \quad P_d = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{d},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

са едновременно разрешими и неразрешими, ако:

а) $\mathbf{b} \neq \mathbf{d}$, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$;

б) $\mathbf{b} \neq \mathbf{d}$, $P_b \neq \emptyset$, $P_d \neq \emptyset$.

9. Нека $\max\{z(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in P\}$ и $\min\{v(\boldsymbol{\pi}) : \boldsymbol{\pi} \in Q\}$ са двойка спрегнати задачи. Кои от следните случаи са възможни:

а) $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$ и съществуват $\mathbf{x}^* \in P$, $\boldsymbol{\pi}^* \in Q$, за които $z(\mathbf{x}^*) = v(\boldsymbol{\pi}^*)$;

б) $P \neq \emptyset$ и $v(\boldsymbol{\pi})$ е неограничена отдолу в Q;

в) $z(\mathbf{x})$ и $v(\boldsymbol{\pi})$ са неограничени съответно отгоре в P и отдолу в Q;

г) $P \neq \emptyset$, $Q \neq \emptyset$.

10. Задачата $(P, z) : \max\{z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$, $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ е разрешима.

а) Може ли $z(\mathbf{x})$ да бъде неограничена отгоре в множеството $\widetilde{P} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, където $\mathbf{d} \neq \mathbf{b}$?

б) Може ли $\widetilde{P} \neq \emptyset$?

в) Може ли $\tilde{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ да бъде неограничена отгоре в P, ако $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$?

г) Какво трябва да бъде множеството P, за да бъде задачата

$$\max(\min)\ \{\widetilde{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$$

разрешима за всяко $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$?

11. Нека $\mathbf{x}'$, $\boldsymbol{\pi}'$ и $\mathbf{x}''$, $\boldsymbol{\pi}''$ са съответни оптимални решения на двойките спрегнати задачи

$$\max\{\mathbf{c}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \min\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}'\}$$

и

$$\max\{\mathbf{c}''^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \min\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}''\}.$$

Докажете, че $(\mathbf{c}'' - \mathbf{c}')^{\mathrm{T}}\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\pi}'' - \boldsymbol{\pi}') \leq (\mathbf{c}'' - \mathbf{c}')^{\mathrm{T}}\mathbf{x}''$.

12. Нека $\mathbf{x}'$, $\boldsymbol{\pi}'$ и $\mathbf{x}''$, $\boldsymbol{\pi}''$ са съответни оптимални решения на двойките спрегнати задачи

$$\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}',\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \qquad \min\{\mathbf{b}'\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}\}$$

и

$$\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}'',\ \mathbf{x} \geq 0\}, \qquad \min\{\mathbf{b}''\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}\}.$$

Докажете, че $\boldsymbol{\pi}''^{\mathrm{T}}(\mathbf{b}'' - \mathbf{b}') \leq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \leq \boldsymbol{\pi}'^{\mathrm{T}}(\mathbf{b}'' - \mathbf{b}')$.

13. Да се докаже, че от двете системи I и II само едната има решение ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^m$):

13.1. I. $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} > 0$; II. $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{c}$, $\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}$;

13.2. I. $\mathbf{A}\mathbf{x} < \mathbf{0}$, II. $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\pi} \neq \mathbf{0}$;

13.3. I. $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, II. $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}$, $\boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{0}$;

13.4. I. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$, II. $\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c}\boldsymbol{\pi} = 1$.

Отговори и решения

1.1. $-\pi_1 + 2\pi_2 \to \min,$

$$\begin{aligned} -\pi_1 + \pi_2 \quad\quad &\geq \ \ 1,\\ -\pi_1 - \pi_2 + \pi_3 &= 10,\\ -\pi_1 - \pi_2 \quad\quad &\geq -1,\\ \pi_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

1.2. $-4\pi_1 + 3\pi_2 + 5\pi_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} \pi_2 + \ \ \pi_3 &\leq 1,\\ -\pi_1 - \pi_2 - \ \ \pi_3 &\leq 0,\\ -\pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3 &= 0,\\ \pi_2 \quad\quad &= 4,\\ \pi_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

1.3. $b_1\pi_1 + \cdots + b_m\pi_m \to \min,$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i \geq c_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\pi_i \geq -M, \ \ i = 1, \ldots, m.$$

1.4. $\max\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}\}$.

1.5. $\min\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq -\mathbf{c},\ \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}\}$.

1.6. На $\min\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{x}) : \mathbf{A}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{b},\ -\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ спрегнатата е

$$\max\{-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}\} \iff \min\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}\}.$$

1.7. На $\min\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{x}) : \mathbf{A}(-\mathbf{x}) \geq -\mathbf{b},\ -\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ спрегнатата е

$$\max\{-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c},\ \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}\} \iff \min\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \leq \mathbf{c},\ \boldsymbol{\pi} \geq 0\}.$$

1.8. На $\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{x}) : \mathbf{A}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{b},\ -\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ спрегнатата е

$$\min\{-\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}\} \iff \max\{\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}\}.$$

2. а) Например

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &\to \max, & \pi_1 - 2\pi_2 &\to \min,\\ x_1 - x_2 &\leq \ \ 1, & \pi_1 - \pi_2 &\geq \ \ 5,\\ -x_1 + x_2 &\leq -2, & -\pi_1 + \pi_2 &\geq \ \ 1,\\ x_1 \geq 0,\ & x_2 \geq 0, & \pi_1 \geq 0,\ & \pi_2 \geq 0. \end{aligned}$$

б) Достатъчно е да се вземе ЗЛО, чиято функция е неограничена отгоре (или отдолу) в допустимото ѝ множество (Теорема 1(б)).

3.1. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = (1, 0, 3)^{\mathrm{T}}$.

3.2. Не.

3.3. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = (2, 0, 9)^{\mathrm{T}}$.

3.4. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = (3, 0, 1, 3)^{\mathrm{T}}$.

3.5. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = (1, 3, -1)^{\mathrm{T}}$.

3.6. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = (1, 0, 6)^{\mathrm{T}}$.

3.7. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = \left(\frac{19}{13}, -\frac{2}{13}, -\frac{10}{13}\right)^{\mathrm{T}}$.

3.8. Да, $\boldsymbol{\pi}^* = \left(1, \frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}$.

4.1. $\boldsymbol{\pi}^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right)^{\mathrm{T}}$.

4.2. $\boldsymbol{\pi}^* = (6, 6)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{9}{17}, \frac{15}{17}, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

4.3. $\boldsymbol{\pi}^* = (6, 2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^* = (0, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

4.4. $\boldsymbol{\pi}^* = \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^* = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$.

4.5. $\boldsymbol{\pi}^* = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{4}{7}, \frac{1}{7}, 0\right)^{\mathrm{T}}$.

4.6. Няма решение.

5.1. Да.

5.2. При $a > 0$ — свободно, при $a = 0$ — закрепено, при $a < 0$ — допустимото множество е празно.

6.1. $z^* = -\frac{19}{2}$, $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}^*_{\text{и}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4 и x_5, $x_1 = x_1^+ - x_1^-$. За M-задачата: начален базис $\{x_6, x_7, x_5\}$, x_6 и x_7 изкуствени променливи. Оптимални решения: $\mathbf{x}^*_M$ от табл. 4, на КЗ $\mathbf{x}^*_K = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{9}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$ (използвайте формула (6): $\pi_1 = c_6 - \bar{c}_6 = M - \left(M - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $\pi_2 = c_7 - \bar{c}_7 = M - \left(M - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$, $\pi_3 = c_5 - \bar{c}_5 = 0$). Спрегнатата задача на изходната задача е $\min\{-4_1 - 5y_2 + 6y_3 : y_1 - y_2 = -1, -y_1 - y_2 + y_3 \geq -2, 2y_1 + y_2 \geq -1, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = \pi_1$, $y_2 = \pi_2$, $y_3 = -\pi_3$ тя съвпада със спрегнатата на КЗ.

Таблица 4

$\mathbf{x}_M^*; \mathbf{x}_K^*$

B	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	x_1^-	x_3	x_4	x_6	x_7	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-1	1	0	M	M	0
x_2	2	0	-1	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$9/2$
x_1^+	1	-1	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
x_5	0	0	$3/2$	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	$3/2$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	$5/2$	$1/2$	$M-1/2$	$M-3/2$	$-19/2$

6.2. $z^* = -22$, $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (3,0,-2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}_{\text{и}}^* = (2,0,8)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4 и x_5, $x_3 = x_3^+ - x_3^-$. За M-задачата начален базис $\{x_3^+, x_4, x_5\}$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: $\mathbf{x}_M^*$ от табл. 5, на КЗ $\mathbf{x}_K^* = (3,0,0,2,1,0)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = (-2,0,8)^{\mathrm{T}}$. Спрегнатата задача на изходната задача е $\min\{y_1 + 4y_2 - 3y_3 : y_1 + y_2 - y_3 \ge -6,\ 3y_1 - y_2 + 2y_3 \ge 4,\ y_1 = 2,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = -\pi_1$, $y_2 = -\pi_2$, $y_3 = \pi_3$ тя съвпада със спрегнатата на КЗ.

Таблица 5

$\mathbf{x}_M^*; \mathbf{x}_K^*$

B	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	x_2	x_3^+	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-4	-2	0	M	0
x_1	6	-2	0	-1	1	3
x_4	0	1	0	1	-1	1
x_3^-	2	-5	-1	-1	1	2
$\overline{\mathbf{c}}$		18	0	8	$M-8$	-22

6.3. $z^* = \frac{11}{2}$, $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = \left(\frac{1}{2}, 2, 2\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}_{\text{и}}^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, -1\right)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4 и x_5. За M-задачата начален базис $\{x_6, x_5, x_3\}$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: $\mathbf{x}_M^*$ от табл. 6, на КЗ $\mathbf{x}_K^* = \left(\frac{1}{2}, 2, 2, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, -1\right)^{\mathrm{T}}$. Спрегнатата задача на изходната задача е $\min\{-3y_1 + 2y_2 - y_3 : -2y_1 - 2y_3 \ge -1,\ -y_1 + y_2 + y_3 \ge 2,\ -y_3 \ge 1,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = \pi_1$, $y_2 = -\pi_2$, $y_3 = \pi_3$ тя съвпада със спрегнатата на КЗ.

Таблица 6

$\mathbf{x}^*_M; \mathbf{x}^*_K$

B	$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}_B$	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		0	0	M	0
x_1	1	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
x_2	-2	0	1	0	2
x_3	-1	1	2	-1	2
$\overline{\mathbf{c}}$		$3/2$	$9/2$	$M-3/2$	$11/2$

6.4. $z^* = 6$, $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (2,-4,0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}^*_{\text{и}} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4, x_5, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. За M-задачата начален базис $\{x_6, x_7, x_5\}$, x_6, x_7 изкуствени променливи. Оптимални решения: $\mathbf{x}^*_M$ от табл. 7, на КЗ $\mathbf{x}^*_K = (2,0,4,0,0,2)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$. Спрегнатата задача на изходната задача е $\max\{6y_1 - 2y_2 - 4y_3 : y_1 + y_2 - y_3 \le 1,\ -y_1 + y_2 = -1,\ y_2 \le 1,\ y_1 \ge 0,\ y_3 \ge 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = \pi_1$, $y_2 = -\pi_2$, $y_3 = -\pi_3$ тя съвпада със спрегнатата на КЗ.

Таблица 7

$\mathbf{x}^*_M; \mathbf{x}^*_K$

B	$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}_B$	x_2^+	x_3	x_4	x_6	x_7	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		1	1	0	M	M	0
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	2
x_2^-	1	-1	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	4
x_5	0	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	2
$\overline{\mathbf{c}}$		0	1	1	$M-1$	M	-6

6.5. $z^* = -\frac{67}{5}$, $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = \left(\frac{16}{5}, -\frac{37}{5}, \frac{2}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}^*_{\text{и}} = \left(1, \frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4, x_5, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. За M-задачата начален базис $\{x_2^-, x_4, x_6\}$. Оптимални решения: $\mathbf{x}^*_M$ от табл. 8, на КЗ $\mathbf{x}^*_K = \left(\frac{16}{5}, 0, \frac{37}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = \left(-1, -\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)^{\mathrm{T}}$. Спрегнатата задача на изходната задача е $\max\{-5y_1 - 6y_2 + 4y_3 : y_1 - 2y_2 + y_3 \le -2,\ y_1 = 1,\ -2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 1,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = -\pi_1$, $y_2 = -\pi_2$, $y_3 = \pi_3$ тя съвпада с двойнствената на КЗ.

Таблица 8

$\mathbf{x}_M^*; \mathbf{x}_K$

B	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	x_2^+	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		1	0	0	M	0
x_2^-	-1	-1	$4/5$	$3/5$	$-3/5$	$37/5$
x_1	-2	0	$2/5$	$-1/5$	$1/5$	$16/5$
x_3	1	0	$-1/5$	$-2/5$	$2/5$	$2/5$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	$9/5$	$3/5$	$M-3/5$	$67/5$

6.6. $z^* = 6$, $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = \left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y}_{\text{и}}^* = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$. За КЗ допълнителни променливи x_4 и x_5, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. За M-задачата начален базис $\{x_6, x_7, x_5\}$, x_6, x_7 изкуствени променливи. Оптимални решения: $\mathbf{x}_M^*$ от табл. 9, на КЗ $\mathbf{x}_K^* = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0, 0, \frac{7}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, на спрегнатата ѝ задача $\boldsymbol{\pi}^* = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$. Спрегнатата задача на изходната задача е $\max\{6y_1 - 5y_2 - 4y_3 : y_1 + y_2 - y_3 \le 1,\ -y_1 + y_2 = -1,\ y_2 \le 1,\ y_1 \ge 0,\ y_3 \ge 0\}$ и при смяна на променливите $y_1 = \pi_1$, $y_2 = -\pi_2$, $y_3 = -\pi_3$ тя съвпада със спрегнатата на КЗ.

Таблица 9

$\mathbf{x}_M^*; \mathbf{x}_K^*$

B	$\mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}$	x_2^+	x_3	x_4	x_6	x_7	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-1	1	0	M	M	0
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_2^-	1	-1	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$11/2$
x_5	0	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$7/2$
$\overline{\mathbf{c}}$		0	1	1	$M-1$	M	-6

7.1. $z^* = n$. Спрегнатата задача е

$$\max v(\boldsymbol{\pi}) = \pi_1 + 2\pi_2 + \cdots + n\pi_n,\ \pi_i + \pi_{i+1} + \cdots + \pi_n \le i,\ \pi_i \ge 0,\ i = 1, \dots, n.$$

От

$$(11) \qquad \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_n \le 1, \quad \pi_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

следват останалите ограничения, т. е. допустимото множество се определя от (11). То е компактно и оптимално бдр е $\boldsymbol{\pi}^* = (0, 0, \dots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = v(\boldsymbol{\pi}^*) = n$.

7.2. Двойствената задача е $\max v(\boldsymbol{\pi}) = \alpha_1\pi_1 + \cdots + \alpha_{100}\pi_{100}$, $\pi_i + \pi_{i+1} = 1$, $i = 1, \ldots, 99$, $\pi_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 100$. От уравненията следва, че $\pi_i = 1 - \pi_1$, $i = 2, \ldots, 100$, $\pi_i = \pi_1$, $i = 1, 3, \ldots, 99$, и $0 \leq \pi_1 \leq 1$. Следователно $v(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i-1}\pi_1 + \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i}(1 - \pi_1) = \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i} + \pi_1 \sum_{i=1}^{50}(\alpha_{2i-1} - \alpha_i)$ и

$$z^* = \begin{cases} \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i-1} & \text{при } \sum_{i=1}^{50}(\alpha_{2i-1} - \alpha_i) \geq 0 \quad (\pi_1 = 1), \\ \sum_{i=1}^{50} \alpha_{2i} & \text{в противен случай} \quad (\pi_1 = 0). \end{cases}$$

7.3. $z^* = \dfrac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{\lambda + 2}$ при $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$; $z^* = \max(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ при $\lambda = 1$; $z^* = -\infty$ при $\lambda = -2$. Спрегнатата задача е $\max \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2 + \mu_3\pi_3$, $\mathbf{A}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{b}$, $\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$; $\det \mathbf{A} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. При $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -2$ оптимално решение е $\boldsymbol{\pi}^* = \frac{1}{\lambda+2}(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. При $\lambda = 1$ допустимото множество $\{\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) : \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \pi_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$ е компактно с върхове $(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. При $\lambda = -2$ задачата няма допустими точки и понеже допустимото множество на изходната задача не е празно, то $z(\mathbf{x}) \to -\infty$ в него.

7.4. $z^* = \dfrac{\lambda\mu(\lambda^2 + \lambda + 1)}{\lambda(3 - \lambda)}$ при $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 3$; $z(\mathbf{x}) \to -\infty$ при $\lambda = 0$ и $\lambda = 3$. Спрегнатата задача е $\max \mu(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3)$, $\mathbf{A}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{b}$, $\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (1, \lambda, \lambda^2)^{\mathrm{T}}$; $\det \mathbf{A} = -\lambda^2(\lambda - 3)$. При $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 3$ оптимално решение е $\boldsymbol{\pi}^* = \frac{1}{\lambda(3-\lambda)}(\lambda^2 + 2\lambda - 2, \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 1, 2\lambda^2 - 2\lambda + 1)^{\mathrm{T}}$. При $\lambda = 0$ или $\lambda = 3$ задачата няма допустими точки и понеже допустимото множество на изходната задача не е празно, то $z(\mathbf{x}) \to -\infty$ в него.

8. Съответните спрегнати задачи имат общо допустимо множество $Q = \{\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c},\ \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}\}$.

а) $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in P_b \neq \emptyset$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in P_d \neq \emptyset$. Нека задача I е разрешима. Тогава и спрегнатата ѝ задача е разрешима, т. е. $Q \neq \emptyset$. Ако допуснем, че задача II е неразрешима, то $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ е неограничена в P_d ($P_d \neq \emptyset$), откъдето (Теорема 1(б)) стигаме до противоречието $Q = \emptyset$. Ако задача I е неразрешима и допуснем, че задача II има решение, ще стигнем до същото противоречие.

б) Нека задача I е разрешима, тогава $Q \neq \emptyset$ и ако допуснем, че задача II няма решение, то $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ е неограничена в P_d ($P_d \neq \emptyset$), т. е. стигаме (Теорема 1(б)) до противоречието $Q = \emptyset$. Аналогично се доказва и случаят за неразрешимост.

9. а) Да. б) Не (Теорема 1(б)). в) Не (Теорема 1(б)). г) Да.

10. а) Не. Спрегнатите задачи на задачите (P, z) и $(P, \tilde{z})$ имат общо допустимо множество $Q = \{\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}\}$; $Q \neq \emptyset$, защото задача (P, z) е разрешима. Ако допуснем, че задача $(P, \tilde{z})$ е неразрешима, то $\tilde{z} \to +\infty$ в $\widetilde{P}$ ($\widetilde{P} \neq \emptyset$) и стигаме до противоречието $Q = \emptyset$.

б) Да. При $\operatorname{rank}\mathbf{A} \neq \operatorname{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{d})$.

в) Да, ако P е неограничено. Тогава е достатъчно $\mathbf{c}$ да бъде неотрицателна линейна комбинация на направляващи вектори на неограничени ръбове на P.

г) Ограничено.

11. Двете изходни задачи имат общо допустимо множество, двете спрегнати задачи — също. Следователно

$$\begin{array}{llcl} & \mathbf{c}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' \leq \mathbf{c}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x}' = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}', & & \mathbf{c}''^{\mathrm{T}}\mathbf{x}' \leq \mathbf{c}''^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'', \\ & \mathbf{c}''^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'' & \text{и} & \mathbf{c}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x}' = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}', \\ \text{т. е.} & (\mathbf{c}' - \mathbf{c}'')^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' \leq \mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\pi}' - \boldsymbol{\pi}'') & \text{и} & (\mathbf{c}'' - \mathbf{c}')^{\mathrm{T}}\mathbf{x}' \leq \mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\pi}'' - \boldsymbol{\pi}'), \end{array}$$

откъдето следва твърдението.

12. Понеже двойките спрегнати задачи имат общо допустимо множество, то

$$\begin{array}{llcl} & \mathbf{b}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'' \geq \mathbf{b}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}', & & \mathbf{b}''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}' \geq \mathbf{b}''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'' = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'', \\ & \mathbf{b}''^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'' = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}'' & \text{и} & \mathbf{b}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}' = \mathbf{c}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x}', \\ \text{т. е.} & (\mathbf{b}' - \mathbf{b}'')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}'' \geq \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') & \text{и} & (\mathbf{b}'' - \mathbf{b}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}' \geq \mathbf{c}'\mathbf{x}', \end{array}$$

откъдето следва твърдението.

13.1. Образуваме спрегнатите задачи: I^{a}: $\max\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_1\}$, $P_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ и II^{a}: $\min\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi} \in P_2\}$, $P_2 = \{\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{c},\ \boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}\}$. Нека системата I има решение. Ако допуснем, че задача I^{a} има оптимално решение $\mathbf{x}^*$, то задача II^{a} има оптимално решение $\boldsymbol{\pi}^*$ и $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^* = 0$, което е противоречие. Следователно задача I^{a} е неразрешима, откъдето и двойствената ѝ задача II^{a} е неразрешима поради $P_2 = \emptyset$, т. е. системата II няма решение.

Нека системата II има решение. Ако допуснем, че задача $\mathrm{II^a}$ има оптимално решение $\boldsymbol{\pi}^*$, то и задача $\mathrm{I^a}$ има оптимално решение $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \le \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^* = 0$, т. е. системата I няма решение.

13.2. Образуваме спрегнатите задачи: $\mathrm{I^a}$: $\max\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_1\}$, $P_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{0}\}$ и $\mathrm{II^a}$: $\min\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi} \in P_2\}$, $P_2 = \{\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\pi} \ge \mathbf{0}\}$. Нека системата I има решение. Понеже $P_1 \ne \emptyset$, то в задача $\mathrm{I^a}$ всички допустими точки са оптимални решения. Следователно ограниченията $\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{0}$ са свободни, откъдето $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$, т. е. системата II няма решение.

Нека системата II има решение. Понеже $P_2 \ne \emptyset$ и $\boldsymbol{\pi} \ne \mathbf{0}$, то има поне едно закрепено ограничение в P_2, т. е. системата I няма решение.

13.3. Образуваме спрегнатите задачи: $\mathrm{I^a}$: $\min\{-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_1\}$, $P_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$ и $\mathrm{II^a}$: $\max\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{\pi}) : -\boldsymbol{\pi} \in P_2\}$, $P_2 = \{-\boldsymbol{\pi} : -\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} \le -\mathbf{c},\ -\boldsymbol{\pi} \ge \mathbf{0}\}$. Нека системата I има решение. Ако допуснем, че задача $\mathrm{I^a}$ е разрешима, то и задача $\mathrm{II^a}$ е разрешима и $0 = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{\pi}) \le -\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} < 0$, което е противоречие. Следователно задача $\mathrm{I^a}$ няма оптимално решение поради неограниченост отдолу на $-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ ($P_1 \ne \emptyset$), откъдето задача $\mathrm{II^a}$ е неразрешима поради $P_2 = \emptyset$, т. е. системата II няма решение.

Нека системата II има решение. Ако допуснем, че задача $\mathrm{II^a}$ има оптимално решение, то и задача $\mathrm{I^a}$ е разрешима и $\min\{-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in P_1\} = \max\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{\pi}) : -\boldsymbol{\pi} \in P_2\} = 0$, т. е. системата I няма решение.

13.4. Образуваме дуалните задачи: $\mathrm{I^a}$: $\min\{\mathbf{0}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}\}$ и $\mathrm{II^a}$: $\max\{v(\boldsymbol{\pi}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{0}\}$. Нека системата I има решение. Тогава задача $\mathrm{I^a}$, съответно $\mathrm{II^a}$, имат оптимални решения и $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi} \le \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0 < 1$. Следователно системата II няма решение.

Нека системата II има решение. Ако допуснем, че задача $\mathrm{II^a}$, съответно $\mathrm{I^a}$, са разрешими, то съществува допустима точка за задача $\mathrm{II^a}$, за която $v = 1$, докато стойността на целевата функция на задача $\mathrm{I^a}$ е равна на нула за всяка нейна допустима точка, което е противоречие. Следователно задача $\mathrm{II^a}$ е неразрешима поради неограничена целева функция (допустимото ѝ множество съдържа нулевия вектор), откъдето следва, че допустимото множество на задача $\mathrm{I^a}$ е празно, т. е. системата I няма решение.