Упражнение 7, 8

Решаване на каноничната задача на линейното оптимиране при неизвестен начален базис

Има два общоприети метода за намиране на начално бдр на КЗЛО. Първият от тях е известен като *двуетапен симплекс метод*. На *първия етап* се решава специална КЗЛО, която има очевидно бдр. Тази задача винаги е разрешима. От вида на оптималното решение се съди за това дали е получено бдр на КЗЛО или допустимото множество на тази задача е празно (ограниченията на задачата са несъвместими). В първия случай се продължава с *втория етап*, който се състои в решаване на задачата със симплекс метода, като се започне с вече намереното оптимално бдр на първия етап.

Вторият начин обединява двата етапа на двуетапния симплекс метод в едно и е известен като *M-метод* или *M-задача*. Ние ще се спрем само на този метод.

Нека е дадена КЗЛО

$$
\text{(K)}\qquad
\begin{aligned}
z(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\to \min,\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, &\quad i = 1, \dots, m,\\
x_j \ge 0, &\quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

M-задача, съответна на задача (K), наричаме задачата

$$
\text{(M)}\qquad
\begin{aligned}
z_M(\mathbf{x}_M) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} &\to \min,\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, &\quad i = 1, \dots, m,\\
x_j \ge 0, &\quad j = 1, \dots, n+m,
\end{aligned}
$$

където $M > 0$ е достатъчно голямо число.

Теорема 1. Ако $\mathbf{x}_M^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m}^*)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на задачата (M) и $x_{n+i}^* = 0$, $i = 1, \dots, m$, то $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на задачата (K).

Теорема 2. Ако каноничната задача (K) има оптимално решение, то съществува число $M_0 > 0$, такова че за всяко $M \geq M_0$ съответната M-задача е разрешима и последните m (изкуствените) координати на всички нейни оптимални бдр са нули ($x^*_{n+i} = 0$, $i = 1, \dots, m$).

Тези теореми позволяват каноничната задача (K) да се решава чрез M-задачата (M). Задача (M) има бдр $\mathbf{x}_M^{(0)} = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)^\mathrm{T}$ с базис $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_M^{(0)}} = [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}]$, базисна матрица $\mathbf{B} = \mathbf{E}_m$ и системата ѝ уравнения е в базисен вид спрямо $\mathbf{x}_M^{(0)}$. Променливите x_{n+i}, $i = 1, \dots, m$, се наричат *изкуствени променливи*, а $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_M^{(0)}}$ — *изкуствен базис*.

След като симплекс метода се приложи към M-задачата, се стига до един от следните случаи:

1. Намерено е оптимално бдр $\mathbf{x}^*_M = (x^*_1, \dots, x^*_n, x^*_{n+1}, \dots, x^*_{n+m})^\mathrm{T}$ на M-задачата:

   (а) ако $x^*_{n+i} = 0$, $i = 1, \dots, m$, то $\mathbf{x}^* = (x^*_1, \dots, x^*_n)^\mathrm{T}$ е оптимално решение на каноничната задача (K) и $z(\mathbf{x}^*) = z_M(\mathbf{x}^*_M)$;

   (б) ако $\sum_{i=1}^{m} x^*_{n+i} > 0$, от Теорема 2 следва, че допустимото множество на каноничната задача (K) е празно, т. е. тя няма решение.

2. M-задачата няма решение (функцията $z_M(\mathbf{x}_M) \to -\infty$ в допустимото ѝ множество). От Теорема 2 следва, че и каноничната задача (K) няма решение (поради това, че допустимото ѝ множество е празно или $z(\mathbf{x}) \to -\infty$ в него).

При решаване на M-задачата не е необходимо да се определя числото M. Достатъчно е да се има предвид, че M е достатъчно голямо. За целта относителните оценки $\bar{c}_j$, $j = 1, \dots, n+m$, на дадено бдр се разглеждат като сума $\bar{c}_j = \bar{c}_{1j} + \bar{c}_{2j}M$ и тогава

$$\operatorname{sign} \bar{c}_j = \operatorname{sign} \bar{c}_{2j} \quad \text{при} \quad \bar{c}_{2j} \neq 0, \; j = 1, \dots, n+m.$$

За нагледност може симплексната таблица да се допълни с още един ред: числата $\bar{c}_{1j}$, $j = 0, \dots, n+m$, се попълват в $(m+1)$-вия ред, а $\bar{c}_{2j}$, $j = 0, \dots, n+m$ — в $(m+2)$-рия ред на таблицата ($\bar{c}_0 = \bar{c}_{10} + \bar{c}_{20}M$). Когато прилагаме критерия за оптималност или определяме ключовия стълб, се ръководим от числата $\bar{c}_{2j}$, $j = 1, \dots, n+m$, докато между тях има различни от нула. При елементарно преобразование с ключов елемент w_{pq} формулите за $\bar{c}_{1j}$ и $\bar{c}_{2j}$

имат вида

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
-\overline{c}'_{10} &= -\overline{c}_{10} - \overline{c}_{1q}\frac{\overline{\mathbf{x}}_{B_p}}{w_{pq}}, & -\overline{c}'_{20} &= -\overline{c}_{20} - \overline{c}_{2q}\frac{\overline{\mathbf{x}}_{B_p}}{w_{pq}};\\
\overline{c}'_{1j} &= \quad \overline{c}_{1j} - \overline{c}_{1q}\frac{w_{pj}}{w_{pq}}, & \overline{c}'_{2j} &= \quad \overline{c}_{2j} - \overline{c}_{2q}\frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad j = 1,\dots,n+m.
\end{aligned}
$$

Възможните случаи 1) и 2), до които се стига след решаването на M-задачата, имат следната интерпретация в таблицата:

1. $\overline{c}_j \geq 0$, $j = 1,\dots,n+m$, т.е. $\overline{c}_{2j} \geq 0$ за $j = 1,\dots,n+m$ и $\overline{c}_{1j} \geq 0$ за тези j, за които $\overline{c}_{2j} = 0$. В този случай е намерено оптимално бдр $\mathbf{x}^*_M = (x^*_1,\dots,x^*_n,x^*_{n+1},\dots,x^*_{n+m})^{\mathrm{T}}$ на M-задачата:

   (а) ако $\overline{c}_{20} = 0$, то $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x^*_{n+i} = 0$ и $\mathbf{x}^* = (x^*_1,\dots,x^*_n)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на каноничната задача;

   (б) ако $\overline{c}_{20} \neq 0$, то $\sum_{i=1}^{m} x^*_{n+i} > 0$ и каноничната задача няма решение, защото допустимото ѝ множество е празно.

2. Съществува $\overline{c}_q < 0$ ($\overline{c}_{2q} < 0$ или $\overline{c}_{2q} = 0$, $\overline{c}_{1q} < 0$), а $w_{iq} \leq 0$, $i = 1,\dots,m$. Тогава M-задачата няма решение, откъдето следва, че и каноничната задача няма решение.

Забележка 1. Не е необходимо началният базис на M-задачата да бъде изцяло изкуствен. Ако в каноничната задача системата от уравнения е решена спрямо някои от променливите $x_1,\dots,x_n$, целесъобразно е те да се използват като базисни (вж. примерите).

Забележка 2. След излизането на някоя изкуствена променлива x_{n+i} $(1 \leq i \leq m)$ от базиса, попълването на стълба x_{n+i} става излишно и той може да отпадне от таблицата, тъй като тази променлива не може да се върне в базиса, защото това би довело до увеличаване на стойността на целевата функция.

Забележка 3. Ако за дадено бдр $\mathbf{x}_M = (x_1,\dots,x_{n+m})^{\mathrm{T}}$ на M-задачата някоя изкуствена променлива x_{n+p} $(1 \leq p \leq m)$ е базисна нула $(x_{n+p} = 0)$, тя може да бъде изключена от базиса, като се направи елементарно преобразование с ключов елемент $w_{pq} \neq 0$, където p е редът на x_{n+p} в таблицата (ключовият ред), а q е индекс на небазисна променлива (вж. пример 2).

Забележка 4. Ако в симплексната таблица на някое бдр $\mathbf{x}_M$ се окаже, че $\overline{c}_{20} = 0$, то $\mathbf{x}_M = (x_1,\dots,x_n,0,\dots,0)^{\mathrm{T}}$, което означава, че или всички изкуствени променливи x_{n+i} са небазисни, или базисните сред тях са базисни нули. В първия случай $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ е бдр на каноничната задача (K). Във втория случай, след като се изключат от базиса изкуствените променливи, които са базисни нули, ще се получи симплексна таблица, която може да се разглежда като начална за каноничната задача (K) при начално бдр $\overline{\mathbf{x}}$ (в нея липсват стълбовете на изкуствените променливи и $(m+2)$-ият ред). След като при решаването на M-задачата се стигне до такава таблица, оттук нататък се решава направо каноничната задача (K).

Пример 1. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{array}{rrrrrl} -2x_1 & - x_2 & & + x_4 & & = 3, \\ x_1 & & - x_3 & & & = 1, \\ 3x_1 & & + x_3 & & + x_5 & = 4, \end{array} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 5.$$

Решение. Системата уравнения е решена спрямо променливите x_4 и x_5. В M-задачата ще има само една изкуствена променлива x_6:

$$z_M(\mathbf{x}_M) = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + Mx_6 \to \min,$$

$$\begin{array}{rrrrrrl} -2x_1 & - x_2 & & + x_4 & & & = 3, \\ x_1 & & - x_3 & & & + x_6 & = 1, \\ 3x_1 & & + x_3 & & + x_5 & & = 4, \end{array}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 6.$$

Началното бдр е $\mathbf{x}_M^{(0)} = (0, 0, 0, 3, 4, 1)^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{B}_{\mathbf{x}_M^{(0)}} = [x_4, x_6, x_5]$. Съответната му симплексна таблица е показана в табл. 1. Бдр $\mathbf{x}_M^{(0)}$ не е оптимално: $\bar{c}_1 =$

Таблица 1

$\mathbf{x}_M^{(0)}$

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		2	3	−3	0	0	M	0
x_4	0	−2	−1	0	1	0	0	3
x_6	M	$\boxed{1}$	0	−1	0	0	1	1
x_5	0	3	0	1	0	1	0	4
$\overline{\mathbf{c}}$		$-M+2$	3	$M-3$	0	0	0	$-M$

Таблица 2

$\mathbf{x}_M^{(1)}$

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		2	3	−3	0	0	0
x_4	0	0	−1	−2	1	0	5
x_1	2	1	0	−1	0	0	1
x_5	0	0	0	$\boxed{4}$	0	1	1
$\overline{\mathbf{c}}$		0	3	−1	0	0	−2

$-M + 2 < 0$. Новата базисна променлива x_1 влиза на мястото на изкуствената променлива x_6, защото $\min\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{1}\right) = 1$. Новото бдр (табл. 2) е $\mathbf{x}_M^{(1)} = (1, 0, 0, 5, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ и $z_M(\mathbf{x}_M^{(1)}) = 2$. Понеже $\overline{c}_3 = -1 < 0$, x_3 влиза в базиса на мястото на x_5. Новото бдр (табл. 3) $\mathbf{x}_M^{(2)} = \left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{11}{2}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$ е оптимално и $z_M^* = \frac{7}{4}$. Изкуствената променлива x_6 има стойност нула, следователно $\mathbf{x}^* = \left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{11}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на задача (2). Табл. 2 може да се разглежда като начална симплексна таблица на задача (2) с начално бдр $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 5, 1)^{\mathrm{T}}$.

Таблица 3

$\mathbf{x}_M^{(2)} = \mathbf{x}^*$

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		2	3	−3	0	0	0
x_4	0	0	−1	0	1	1/2	11/2
x_1	2	1	0	0	0	1/4	5/4
x_3	−3	0	0	1	0	1/4	1/4
$\overline{\mathbf{c}}$		0	3	0	0	1/4	−7/4

Пример 2. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 - x_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= 2, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Решение. Въвеждаме изцяло изкуствен базис

$$z_M(\mathbf{x}_M) = 2x_1 - x_2 - x_3 + Mx_4 + Mx_5 \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5} &= 2, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 \phantom{{}+x_4} + x_5 &= 2, \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

В табл. 4 и 5 е представено решаването на задачата с помощта на две симплексни таблици. Началното бдр е $\mathbf{x}_M^{(0)} = (0,0,0,2,2)^{\mathrm{T}}$ и $z_M(\mathbf{x}_M^{(0)}) = 4M$. Относителната оценка на променливата x_1 е отрицателна. Затова x_1 влиза в базиса на мястото на x_4 (в този случай двете частни за определяне на ключовия ред са равни, така че да използваме правилото на Бленд). Новото бдр е $\mathbf{x}_M^{(1)} = (2,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ и $z_M(\mathbf{x}_M^{(1)}) = 4$. За него критерият за оптималност е изпълнен. Изкуствените променливи x_4 и x_5 имат нулеви стойности, въпреки че x_5 е базисна ($\mathbf{x}_M^{(1)}$ е изроден и x_5 е базисна нула). Следователно $\mathbf{x}^* = (2,0,0)^{\mathrm{T}}$ е решение на първоначалната канонична задача и въпреки че в табл. 5 $\bar{c}_0 = 0$ и $\bar{c}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 5$, тя не може да се разглежда като симплексна таблица на $\mathbf{x}^*$ за каноничната задача, защото съдържа изкуствената базисна променлива x_5. Ако се нуждаем от базисен вид на каноничната задача спрямо оптимал-

Таблица 4

$\mathbf{x}_M^{(0)}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		2	-1	-1	M	M	0
x_4	M	$\boxed{1}$	-1	2	1	0	2
x_5	M	1	-2	-4	0	1	2
$\bar{\mathbf{c}}$		$-2M+2$	$3M-1$	$2M-1$	0	0	$-4M$

Таблица 5

$\mathbf{x}_M^{(1)}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		2	-1	-1	M	0
x_1	2	1	-1	2	0	2
x_5	M	0	$\boxed{-1}$	$\boxed{-6}$	1	0
$\bar{\mathbf{c}}$		0	$M+1$	$6M-5$	0	-4

ното решение $\mathbf{x}^*$, можем да изключим изкуствената променлива x_5, като в базиса на нейно място въведем коя да е от променливите x_2, x_3. След въвеждането на x_2 в базиса (ключовото число е -1), получаваме табл. 6, а при въвеждане на x_3 (ключовото число е -6) — табл. 7. Те съдържат базисния

Таблица 6

$\mathbf{x}^*$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		2	-1	-1	0
x_1	2	1	0	8	2
x_2	-1	0	1	$\boxed{6}$	0
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	-11	-4

Таблица 7

$\mathbf{x}^*$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		2	-1	-1	0
x_1	2	1	$-4/3$	0	2
x_3	-1	0	$1/6$	1	0
$\overline{\mathbf{c}}$		0	$11/6$	0	-4

вид на каноничната задача спрямо $\mathbf{x}^*$ съответно при базиси $[x_1, x_2]$ и $[x_1, x_3]$. Понеже $\mathbf{x}^*$ е изроден, критерият за оптималност не е необходимо условие и се удовлетворява при базиса на табл. 7.

Пример 3. Да се реши, като се използва симплекс метода, задачата

$$z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 \qquad\quad &\geq 2, \\ x_2 \qquad\quad &\leq 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.& \end{aligned} \tag{3}$$

От последната симплексна таблица да се извлече възможната информация за оптималните решенията на задачата (ако има такива).

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид чрез допълнителните променливи x_4 и x_5 и чрез полагането $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, $x_3^+ \geq 0$, $x_3^- \geq 0$

$$\overline{z}(\mathbf{x}) = -2x_1 + 7x_2 - 3x_3^+ + 3x_3^- \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_4 \qquad &= 2, \\ x_2 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3^+ - x_3^- \qquad\qquad &= 3, \\ x_1,\ x_2,\ x_3^+,\ x_3^-,\ x_4,\ x_5 \geq 0.& \end{aligned} \tag{4}$$

Съответната M-задача е

$$\overline{z}_M(\mathbf{x}_M) = -2x_1 + 7x_2 - 3x_3^+ + 3x_3^- + Mx_6 \to \min,$$

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad\quad - x_4 \qquad + x_6 &= 2,\\ x_2 \qquad\qquad\qquad + x_5 \qquad &= 4,\\ x_1 - 2x_2 + x_3^+ - x_3^- \qquad\qquad\qquad &= 3,\\ x_1,\ x_2,\ x_3^+,\ x_3^-,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0. \end{aligned}$$

На табл. 8 се вижда информацията за началното бдр на M-задачата $\mathbf{x}_M^{(0)} = (0, 0, 3, 0, 0, 4, 2)^{\mathrm{T}}$, $z_M(\mathbf{x}_M^{(0)}) = 2M-9$. Относителните оценки на променливите

Таблица 8

$\mathbf{x}_M^{(0)}$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-2	7	-3	3	0	0	M	0
x_6	M	$\boxed{1}$	1	0	0	-1	0	1	2
x_5	0	0	1	0	0	0	1	0	4
x_3^+	-3	1	-2	1	-1	0	0	0	3
$\overline{\mathbf{c}}$		$-M+1$	$-M+1$	0	0	M	0	0	$-2M+9$

Таблица 9

$\mathbf{x}_M^{(1)} = \mathbf{x}^*$

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-2	7	-3	3	0	0	0
x_1	-2	1	$\boxed{1}$	0	0	-1	0	2
x_5	0	0	1	0	0	0	1	4
x_3^+	-3	0	-3	1	-1	1	0	1
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	0	7

x_1 и x_2 са отрицателни (и равни). Нека x_1 да влезе в базиса. Тогава от базиса излиза изкуствената променлива x_6 и относителните оценки вече няма да зависят от M. След елементарно преобразование получаваме симплексната таблица, съответна на съседното бдр $\mathbf{x}_M^{(1)} = (2, 0, 1, 0, 0, 4, 0)^{\mathrm{T}}$, $z_M(\mathbf{x}_M^{(1)}) = -7$, което е оптимално решение (вж. табл. 9). Изкуствената променлива x_6 е небазисна, следователно $\mathbf{x}^* = (2, 0, 1, 0, 0, 4)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на каноничната задача (4). Оптималното решението $\mathbf{x}_{\text{и}}^*$ на изходната задача (3) получаваме от $\mathbf{x}^*$, като вземем предвид полагането $x_3 = x_3^+ - x_3^-$: $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ и оптималната стойност на целевата функция е $z^* = -\overline{z}(\mathbf{x}^*) = -z_M(\mathbf{x}_M^{(1)}) = 7$.

Таблица 10

$\mathbf{x}_M^{(2)} = \mathbf{x}^{**}$

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3^+	x_3^-	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
		-2	7	-3	3	0	0	0
x_2	7	1	1	0	0	-1	0	2
x_5	0	-1	0	0	0	1	1	2
x_3^+	-3	3	0	1	-1	-2	0	7
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	0	7

Табл. 9 е симплексната таблица на $\mathbf{x}^*$. Понеже $\overline{c}_2 = 0$, $\overline{c}_3{}^- = 0$, то $\mathbf{x}^*$ не е единствено оптимално решение на задача (4). След въвеждането на x_2 в базиса се преминава към съседно бдр (табл. 10) $\mathbf{x}^{**} = (0, 2, 7, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$. Следователно оптимални решения са и всички точки

$$\mathbf{x}^{\lambda} = \lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**} = (2\lambda, 2-2\lambda, 7-6\lambda, 0, 0, 2+2\lambda)^{\mathrm{T}} \text{ за } \lambda \in [0,1].$$

Понеже елементите на стълба $\mathbf{w}_3^-$ са неположителни, от $\mathbf{x}^*$ излиза неограничен ръб (при $x_3^- = t \geq 0$) с направляващ вектор $\mathbf{p}^* = (0, 0, 1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, чиито точки $\mathbf{x}^t = \mathbf{x}^* + t\mathbf{p}^* = (2, 0, 1+t, t, 0, 4)^{\mathrm{T}}$ са също оптимални решения на задача (4) при $t \geq 0$. Тогава оптимални решения на каноничната задача (4) са

$$\mathbf{x}^{\lambda t} = \lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**} + t\mathbf{p}^* = (2\lambda, 2-2\lambda, 7-6\lambda+t, t, 0, 2+2\lambda)^{\mathrm{T}}$$

за $\lambda \in [0,1]$, $t \geq 0$. Съответните решения $\mathbf{x}_\lambda^*$ за изходната задача (3) са $\mathbf{x}_\lambda^* = (2\lambda, 2-2\lambda, 7-6\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0,1]$. При $\lambda = 0$ имаме бдр $\mathbf{x}_{\text{и}}^{**} = (0, 2, 7)^{\mathrm{T}}$, а при $\lambda = 1$ — бдр $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Оптималните решения на задача (3) са точките от отсечката, съединяваща върховете $\mathbf{x}_{\text{и}}^*$ и $\mathbf{x}_{\text{и}}^{**}$.

Пример 4. Да се реши задачата

$$z(\mathbf{x}) = -5x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$(5) \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 2, \\ x_1 - 2x_2 &\geq 0, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Каноничната задача е ($x_2 = x_2^+ - x_2^-$ и второто ограничение е умножено с -1, за да може допълнителната променлива в КЗ да се използва за базисна)

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
&\widetilde{z}(\mathbf{x}) = -5x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- \to \min,\\
&\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
x_1 & - & x_2^+ & + & x_2^- & - & x_3 & & & & & = & 2,\\
-x_1 & + & 2x_2^+ & - & 2x_2^- & & & + & x_4 & & & = & 0,\\
2x_1 & - & x_2^+ & + & x_2^- & & & & & + & x_5 & = & 1,
\end{array}\\
&x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Системата уравнения (6) е решена спрямо x_4 и x_5, затова въвеждаме само една изкуствена променлива x_6. Получаваме M-задачата

$$
\begin{aligned}
&z_M(\mathbf{x}_M) = -5x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + Mx_6 \to \min,\\
&\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
x_1 & - & x_2^+ & + & x_2^- & - & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 2,\\
-x_1 & + & 2x_2^+ & - & 2x_2^- & & & + & x_4 & & & & & = & 0,\\
2x_1 & - & x_2^+ & + & x_2^- & & & & & + & x_5 & & & = & 1,
\end{array}\\
&x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Табл. 11 съдържа хода на решаването на задачата. Базисното допустимо решение $\mathbf{x}_M^{(1)} = (0, 0, 1, 0, 2, 1)^{\mathrm{T}}$ е оптимално за M-задачата, но изкуствената променлива x_6 има ненулева стойност, следователно каноничната задача (6) няма решение, понеже допустимото ѝ множество е празно. Това означава, че и изходната задача (5) няма решение по същата причина (проверете геометрично!).

Таблица 11

B	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$	
		-5	2	-2	0	0	0	M	0	
x_6	M	1	-1	1	-1	0	0	1	2	
x_4	0	-1	2	-2	0	1	0	0	0	$\mathbf{x}_M^{(0)}$
x_5	0	2	-1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	1	
$\overline{\mathbf{c}}$		$-M-5$	$M+2$	$-M-2$	M	0	0	0	$-2M$	
x_6	M	-1	0	0	-1	0	-1	1	1	
x_4	0	3	0	0	0	1	2	0	2	$\mathbf{x}_M^{(1)}$
x_2^-	-2	2	-1	1	0	0	1	0	1	
$\overline{\mathbf{c}}$		$M-1$	0	0	M	0	$M+2$	0	$-M+2$	

Пример 5. Да се реши задачата

$$\begin{aligned} & z(\mathbf{x}) = x_1 \to \max, \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ (7) \qquad & -x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1 + x_2 \geq 1, \\ & x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Каноничната задача е

$$\begin{aligned} & \bar{z}(\mathbf{x}) = -x_1 \to \min, \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ (8) \qquad & -x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ & x_1 + x_2 - x_5 = 1, \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5, \end{aligned}$$

а M-задачата —

$$\begin{aligned} & z_M(\mathbf{x}_M) = -x_1 + Mx_6 \to \min, \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ & x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 1, \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

M-задачата е решена на табл. 12. От последната симплексна таблица се вижда, че $\bar{c}_5 > 0$, $\mathbf{w}^5 < \mathbf{0}$, т. е. M-задачата няма решение, защото $z_M(\mathbf{x}_M)$ намалява неограничено в допустимото ѝ множество. Следователно каноничната задача (8), а оттам и изходната задача (7) нямат решение. В случая е ясна причината за това. Втората и третата симплексни таблици не съдържат изкуствената променлива x_6 и могат да се разглеждат като симплексни таблици на каноничната задача (8) за бдр $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 1, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}^{(2)} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3}, 0)^{\mathrm{T}}$. От третата симплексна таблица е ясно, че целевата функция $\bar{z}(\mathbf{x})$ е неограничена в допустимото ѝ множество. Следователно и задача (7) няма решение по същата причина (проверете геометрично!).

Задачи

1. Да се решат със симплекс-метода дадените задачи. Ако задачата е разрешима, да се намерят:

Таблица 12

$\mathbf{B}$	$\mathbf{c}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{\mathbf{x}}_B$	
		-1	0	0	0	0	M	0	
x_3	0	1	-2	1	0	0	0	0	
x_4	0	-1	1	0	1	0	0	1	$\mathbf{x}_M^{(0)}$
x_6	M	1	$\boxed{1}$	0	0	-1	1	1	
$\overline{\mathbf{c}}$		$-M-1$	$-M$	0	0	M	0	$-M$	
x_3	0	$\boxed{3}$	0	1	0	-2		2	
x_4	0	-2	0	0	1	1		0	$\mathbf{x}_M^{(1)}; \mathbf{x}^{(1)}$
x_2	0	1	1	0	0	-1		1	
$\overline{\mathbf{c}}$		-1	0	0	0	0		0	
x_1	-1	1	0	$1/3$	0	$-2/3$		$2/3$	
x_4	0	0	0	$2/3$	1	$-1/3$		$4/3$	$\mathbf{x}_M^{(2)}; \mathbf{x}^{(2)}$
x_2	0	0	1	$-1/3$	0	$-1/3$		$1/3$	
$\overline{\mathbf{c}}$		0	0	$1/3$	0	$-2/3$		$2/3$	

а) всички съседни оптимални бдр;

б) оптималните решения, които лежат върху неограничени ръбове, излизащи от намереното оптимално бдр;

в) оптималните решения, които следват от а) и б):

1.1. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 16x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\geq -4, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 6, \\ -x_1 - 8x_2 &= -8, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1,2; \end{aligned}$$

1.2. $z(\mathbf{x}) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1, \\ x_1 \qquad - 2x_3 &\geq 3, \\ -x_1 \qquad + x_3 &\geq -2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.3. $z(\mathbf{x}) = 6x_1 + 4x_2 - 14x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3, \\ x_2 + x_3 &\geq 2, \\ 0 \leq x_3 &\leq 4, \\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.4. $z(\mathbf{x}) = 4x_1 - 10x_2 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq -1, \\ -4x_1 + 2x_2 &\geq 0, \\ -x_1 - x_2 &\leq -2, \\ x_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.5. $z(\mathbf{x}) = 2x_2 - x_3 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}+x_3} &\geq 6, \\ -x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &\leq 1, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 \geq 0&; \end{aligned}$$

1.6. $z(\mathbf{x}) = -2x_1 - 6x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\geq -9, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\ -3x_1 + 7x_2 &\leq 61; \end{aligned}$$

1.7. $z(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 &\geq 1, \\ x_1 - 3x_2 \phantom{{}-2x_3} &= 2, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3&; \end{aligned}$$

1.8. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq -1, \\ x_1 + x_2 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 2; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0&; \end{aligned}$$

1.9. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &\geq 1, \\ 2x_1 - x_2 \phantom{{}+x_3} &\geq -2, \\ x_j \geq 0,\ j = 1,2,3&; \end{aligned}$$

1.10. $z(\mathbf{x}) = 4x_1 + 6x_2 \to \max,$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\geq -4, \\ 5x_1 - 3x_2 &\geq 5, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 23; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0&; \end{aligned}$$

1.11. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 8x_2 \to \min,$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\leq 9, \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4, \\ x_1 - 4x_2 &\geq -17; \\ x_1 &\geq 0; \end{aligned}$$

1.12. $z(\mathbf{x}) = -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ -x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &\geq -4, \\ -x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} &\leq -3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0&. \end{aligned}$$

2. По дадените симплексни таблици на бдр $\mathbf{x}_M$ на M-задача да се напише M-задачата, изходната канонична задача, координатите на $\mathbf{x}_M$ и да се намери за кои стойности на параметрите a и b:

а) $\mathbf{x}_M$ е оптимално решение на задачата;

б) $\mathbf{x}_M$ не е единствено оптимално решение. Да се намерят съседните на $\mathbf{x}_M$ оптимални бдр (ако има такива). Да се напише аналитичният израз на тези решения на M-задачата, които следват от намерените бдр и информацията в таблицата;

в) каноничната задача няма оптимално решение — да се посочи причината;

г) каноничната задача има оптимално решение в случаите а) и б). Да се напише вида на решенията;

д) M-задачата е изродена.

2.1. $\mathbf{x}_M$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
	-2	0	-4	0	M	0
x_5	0	a	-2	0	1	b
x_1	1	$-a$	-1	0	0	1
x_4	0	1	1	1	0	2

2.2. $\mathbf{x}_M$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{\mathbf{x}}_B$
	0	-1	1	M	0
x_1	1	$-3b$	0	0	b
x_4	0	$2a$	0	1	a
x_3	0	$-b$	1	0	3

2.3. $\mathbf{x}_M$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{\mathbf{x}}_B$
	0	0	$-b$	M	0
x_2	1	1	$1-b$	0	1
x_4	$a-1$	0	0	1	$a-1$

2.4. $\mathbf{x}_M$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
	0	-1	$-b$	0	M	0
x_3	b	a	1	0	0	a
x_4	1	0	0	1	0	1
x_5	b	b	0	0	1	b

3. Да се намерят всички точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ от множеството

$$P : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ \quad x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4, \end{cases}$$

за които функцията $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2$ има стойност 20.

4. В задача 1.4 да се намерят всички точки $\mathbf{x}$, за които целевата функция $z(\mathbf{x})$ има стойност -100.

5. Във всяка от следващите задачи е дадена симплексната таблица на бдр $\mathbf{x}_M$ на M-задача, в чийто базис участват изкуствени променливи. Да се напишат M-задачата, изходната канонична задача и координатите на $\mathbf{x}_M$.

а) Можете ли (от таблицата) да се посочи бдр $\overline{\mathbf{x}}$ на каноничната задача?

б) С най-малко колко елементарни преобразования може да се премине към базис, в който няма изкуствени променливи? Да се направят тези елементарни преобразования (ако има такива). Да се напишат координатите на полученото бдр.

5.1. $\mathbf{x}_M$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{\mathbf{x}}_B$
	0	-2	-1	M	0
x_1	1	2	1	0	3
x_4	0	-1	-3	1	0

5.2. $\mathbf{x}_M$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{\mathbf{x}}_B$
	-1	-1	-1	M	0
x_3	1	2	1	0	2
x_4	-1	0	0	1	0

5.3. $\mathbf{x}_M$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
	-1	-1	0	M	M	0
x_1	1	2	0	0	0	5
x_4	0	-1	0	1	0	0
x_5	0	-2	-4	0	1	0

5.4. $\mathbf{x}_M$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
	-1	-1	0	M	M	0
x_1	1	2	1	0	0	5
x_4	0	-1	1	1	0	0
x_5	0	-2	0	0	1	0

6. *Спомагателна задача* на каноничната задача (K) се нарича задачата

$$\begin{aligned} &\bar{z}(\mathbf{x}_M) = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min, \\ (9) \qquad &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \ i = 1, \ldots, m, \\ &x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n+m. \end{aligned}$$

Променливите x_{n+i}, $i = 1, \ldots, m$, се наричат *изкуствени променливи*. Да се докаже, че:

а) задача (9) е разрешима;

б) ако оптималната стойност $\bar{z}^* > 0$, допустимото множество $\overline{P}$ на задача (K) е празно;

в) ако оптималната стойност $\bar{z}^* = 0$ и $\mathbf{x}_M^* = (x_1^*, \ldots, x_{n+m}^*)^{\mathrm{T}}$ е бдр на задачата (9), то $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$ е бдр на задача (K).

7. Да се опише процедура за решаване на канонична задача без известен начален базис, като вместо M-задача се използва спомагателната задача (9).

8. Да се обоснове забележка 3.

Отговори и решения

1.1. Допълнителни променливи x_3, x_4. Начален базис $[x_3, x_4, x_5]$, x_5 е изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата $(0, 1, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (0, 1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 16$. а) За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ бдр ($\overline{c}_1 = 0$) $\mathbf{x}^{**} = \left(\frac{56}{17}, \frac{10}{17}, \frac{104}{17}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, за изходната задача $\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = \left(\frac{56}{17}, \frac{10}{17}\right)^{\mathrm{T}}$. б) Няма. в) $\mathbf{x}^{\lambda}_{\text{и}} = \lambda\mathbf{x}^*_{\text{и}} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = \left(\frac{56}{17} - \lambda\frac{56}{17}, \frac{10}{17} + \lambda\frac{7}{17}\right)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$.

1.2. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_3 = x_3^+ - x_3^-$. Начален базис $[x_2, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата $\mathbf{x}^*_M = (1, 3, 0, 1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 3, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (1, 3, -1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 4$. а) Няма. б) Няма. Оптимален неограничен ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$ ($\overline{c}_3^+ = 0$) $\mathbf{x}^t = (1, 3, t, 1 + t, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, но за изходната задача $\mathbf{x}^t_{\text{и}} = (1, 3, t - (1 + t))^{\mathrm{T}} = (1, 3, -1)^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}^*_{\text{и}}$.

1.3. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_1 = x_1^+ - x_1^-$. Начален базис $[x_1^+, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата $\mathbf{x}^*_M = (1, 0, 2, 0, 0, 2, 0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 0, 2, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 14$. а) За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ бдр ($\overline{c}_3 = 0$) $\mathbf{x}^{**} = (7, 0, 0, 2, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, а на $\mathbf{x}^*_{\text{и}}$ е $\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = (7, 0, 2)^{\mathrm{T}}$. б) Няма. Оптимален неограничен ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$ ($\overline{c}_1^- = 0$) $\mathbf{x}^t = (1 + t, t, 2, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, но за изходната задача $\mathbf{x}^t_{\text{и}} = (1+t-t, 2, 0)^{\mathrm{T}} = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}^*_{\text{и}}$. в) $\mathbf{x}^{\lambda}_{\text{и}} = \lambda\mathbf{x}^*_{\text{и}} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = (7-6\lambda, 2\lambda, 2-2\lambda)^{\mathrm{T}}$.

1.4. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_1 = x_1^+ - x_1^-$. Начален базис $[x_6, x_4, x_7]$, x_6, x_7 изкуствени променливи. M-задачата няма крайно решение (вж. например стълба x_5 от табл. 13 за $\tilde{\mathbf{x}}$), следователно КЗ и изходната задача са неразрешими. От стълба x_5 от табл. 13 за бдр $\overline{\mathbf{x}} = (0, 0, 2, 3, 4, 0)^{\mathrm{T}}$ на КЗ е ясно, че $z(\mathbf{x}) \to +\infty$ в допустимото множество.

1.5. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. Начален базис $[x_3, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимално решение на M-задачата

Таблица 13

$\tilde{\mathbf{x}}$; $\overline{\mathbf{x}}$

B	x_1^+	x_1^-	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
x_2	1	−1	−1	2
x_4	6	−6	−2	4
x_3	3	−3	−2	3
	14	−14	−10	20

(табл. 14) $\mathbf{x}_M^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 0, \frac{36}{5}, 0, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $z_M(x) = -4$, на КЗ $\mathbf{x}^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, 0, \frac{36}{5}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$,

Таблица 14

$\tilde{\mathbf{x}}^*$; $\mathbf{x}^*$

B	x_2^-	x_4	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
x_3	0	−2/5	9/5	36/5
x_1	0	−1/5	−3/5	3/5
x_2^+	−1	−1/5	2/5	8/5
	0	0	1	4

на изходната задача $\mathbf{x}_и^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{36}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -4$. а) Няма. б) Оптимални неограничени ръбове на КЗ, излизащи от $\mathbf{x}^*$ ($\overline{c}_2^- = 0$) $\mathbf{x}^t = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5} + t, t, \frac{36}{5}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$ и ($\overline{c}_4 = 0$), $\mathbf{x}^r = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}r, \frac{8}{5} + \frac{1}{5}r, 0, \frac{36}{5} + \frac{2}{5}r, r, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $r \geq 0$. За изходната задача оптимален неограничен ръб $\mathbf{x}_и^r = \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{5}r, \frac{8}{5} + \frac{1}{5}r, \frac{36}{5} + \frac{2}{5}r\right)^{\mathrm{T}}$, $r \geq 0$. в) Точките $\mathbf{x}_и^r$, $r \geq 0$.

1.6. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_1 = x_1' - \xi$, $x_2 = x_2' - \xi$. Начален базис $[x_3, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата (табл. 15) $\mathbf{x}_M^* = (6, 0, 0, 33, 0, 79, 0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (6, 0, 0, 33, 0, 79)^{\mathrm{T}}$,

Таблица 15

$\tilde{\mathbf{x}}^*$; $\mathbf{x}^*$

B	x_2'	ξ	x_4	$\overline{\mathbf{x}}_B$
x_3	11	−11	−4	33
x_1'	3	−4	−1	6
x_5	16	−16	−3	79
	0	0	2	−12

на изходната задача $\mathbf{x}^* = (6, 0)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -12$. а) За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ бдр ($\overline{c}_2' = 0$) $\mathbf{x}^{**} = (0, 2, 0, 11, 0, 47)^{\mathrm{T}}$, за изходната задача $\mathbf{x}_и^{**} = (0, 2)^{\mathrm{T}}$. б) Оптимален неограничен ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$ ($\overline{c}_\xi = 0$) с направляващ вектор $\overline{\mathbf{p}} = (4, 0, 1, 11, 0, 16)^{\mathrm{T}}$, съответно за изходната задача $\mathbf{p} = (3, -1)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$. в) $\mathbf{x}_и^{\lambda t} = \lambda \mathbf{x}_и^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}_и^{**} + t\mathbf{p} = (6\lambda + 3t, 2 - 2\lambda - t)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$, $t \geq 0$.

1.7. Допълнителна променлива x_4. Изкуствен начален базис $[x_5, x_6, x_7]$.

M-задачата няма оптимално решение, следователно КЗ и изходната задача са неразрешими.

1.8. Допълнителни променливи x_3, x_4. Начален базис $[x_3, x_5, x_4]$, x_5 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата $\mathbf{x}^*_M = (1,0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 1$. а) За КЗ съседно на $\mathbf{x}^*$ бдр ($\overline{c}_2 = 0$) $\mathbf{x}^{**} = (0, 1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$, съответно $\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$. б) Няма. в) $\mathbf{x}^{\lambda}_{\text{и}} = \lambda\mathbf{x}^*_{\text{и}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = (\lambda, 1 - \lambda)^{\mathrm{T}}$.

1.9. Допълнителни променливи x_4, x_5. Начален базис $[x_3, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. M-задача: стига се до едно от двете оптимални бдр $\mathbf{x}^*_M = (1, 0, 2, 0, 4, 0)^{\mathrm{T}}$ или $\mathbf{x}^{**}_M = (0, 1, 6, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $z^*_M = -4$. а) Съответни оптимални бдр на КЗ $\mathbf{x}^* = (1, 0, 2, 0, 4)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^{**} = (0, 1, 6, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, $x^{**}_{\text{и}} = (0, 1, 6)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 4$. б) Няма. в) $\mathbf{x}^{\lambda}_{\text{и}} = \lambda\mathbf{x}^*_{\text{и}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = (\lambda, 1 - \lambda, 6 - 4\lambda)^{\mathrm{T}}$.

1.10. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5. Начален базис $[x_3, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. M-задача: стига се до едно от двете оптимални бдр $\mathbf{x}^*_M = (4, 5, 5, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ или $\mathbf{x}^{**}_M = (7, 3, 0, 21, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. а) Съответни оптимални бдр на КЗ $\mathbf{x}^* = (4, 5, 5, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^{**} = (7, 3, 0, 21, 0)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (4, 5)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = (7, 3)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 46$. б) Няма. в) $\mathbf{x}^{\lambda}_{\text{и}} = \lambda\mathbf{x}^*_{\text{и}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**}_{\text{и}} = (7 - 3\lambda, 3 + 2\lambda)^{\mathrm{T}}$.

1.11. Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$. Начален базис $[x_3, x_6, x_5]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата (табл. 16) $\mathbf{x}^*_M = (3, 5, 0, 0, 9, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $z^*_M = 34$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (3, 5, 0, 0, 9, 0)^{\mathrm{T}}$, на

Таблица 16

$\tilde{\mathbf{x}}^*$; $\mathbf{x}^*$

B	x_2^-	x_3	x_5	$\overline{\mathbf{x}}_B$
x_4	0	$-6/5$	$7/5$	9
x_2	-1	$-1/5$	$2/5$	5
x_1	0	$-4/5$	$3/5$	3
	0	0	2	34

изходната задача $\mathbf{x}^*_{\text{и}} = (3, 5)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -34$. а) Няма. б) Оптимални неограничени ръбове на КЗ, излизащи от $\mathbf{x}^*$ ($\overline{c}_2^- = 0$) $\mathbf{x}^t = (3, 5 + t, t, 0, 9, 0)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, и ($\overline{c}_3 = 0$) $\mathbf{x}^r = \left(3 + \frac{4}{5}r, 5 + \frac{1}{5}r, 0, r, 9 + \frac{6}{5}r, 0\right)$, $r \geq 0$; за изходната задача оптимален неограничен ръб $\mathbf{x}^r_{\text{и}} = \left(3 + \frac{4}{5}r, 5 + \frac{1}{5}r\right)^{\mathrm{T}}$, $r \geq 0$. в) Точките $\mathbf{x}^r_{\text{и}}$, $r \geq 0$.

1.12. Допълнителни променливи x_4, x_5, $x_3 = x_3^+ - x_3^-$. Начален базис $[x_3^+, x_4, x_6]$, x_6 изкуствена променлива. Оптимални решения: на M-задачата (табл. 17) $\mathbf{x}_M^* = (3,0,0,2,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, на КЗ $\mathbf{x}^* = (3,0,0,2,1,0)^{\mathrm{T}}$, на изходната задача $\mathbf{x}_{\text{и}}^* = (3,0,-2)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -22$. а) Няма. б) Няма; оптимален неограничен

Таблица 17

$\tilde{\mathbf{x}}^*; \mathbf{x}^*$

B	x_2	x_3^+	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
x_1	-2	0	-1	3
x_4	1	0	1	1
x_3^-	-5	-1	-1	2
	18	0	8	-22

ръб на КЗ, излизащ от $\mathbf{x}^*$ ($\bar{c}_3^+ = 0$) $\mathbf{x}^t = (3,0,t,2+t,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, но за изходната задача $\mathbf{x}_{\text{и}}^t = (3,0,t-(2+t))^{\mathrm{T}} = (3,0,-2)^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}_{\text{и}}^*$.

2.1. $\mathbf{x}_M = (1,0,0,2,b)^{\mathrm{T}}$, $b \geq 0$. За x_2, x_3: $\bar{c}_2 = 2a - aM$, $\bar{c}_3 = 6 - 2M$. а) $a \leq 0$. б) $a = 0$. Съседно бдр $\mathbf{x}'_M = (1,2,0,0,b)^{\mathrm{T}}$. Оптимални решения: $\mathbf{x}_M^\lambda = \lambda\mathbf{x}_M + (1-\lambda)\mathbf{x}'_M = (1, 2-2\lambda, 0, 2\lambda, b)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0,1]$. в) За $b \neq 0$, $a \leq 0$ допустимото множество на КЗ е празно. г) $b = 0$, $a \leq 0$. При $a = 0$ $\mathbf{x}_M^\lambda = (1, 2-2\lambda, 0, 2\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0,1]$; при $a < 0$ $\mathbf{x}_M^* = (1,0,0,2)^{\mathrm{T}}$. д) $b = 0$.

2.2. $\mathbf{x}_M = (b,0,3,a)^{\mathrm{T}}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. За x_2: $\bar{c}_2 = -1 + b - 2aM$. а) $\bar{c}_2 \geq 0$, т. е. $a = 0$, $b \geq 1$. б) $a = 0$, $b = 1$; оптимален неограничен ръб $\mathbf{x}^t = (1+3t, t, 3+t, 0)^{\mathrm{T}}$. в) $a = 0$, $0 \leq b < 1$: M-задачата и следователно и КЗ нямат оптимално решение. г) $a = 0$, $b \geq 1$. При $b = 1$ $\mathbf{x}^t = (1+3t, t, 3+t)^{\mathrm{T}}$, при $b > 1$ $\mathbf{x}^* = (1,0,3)^{\mathrm{T}}$. д) $a = 0$ и/или $b = 0$.

2.3. $\mathbf{x}_M = (0,1,0,a-1)^{\mathrm{T}}$, $a \geq 1$. За x_1, x_3: $\bar{c}_1 = (a-1)M$, $\bar{c}_3 = b$. а) $a = 1$, $b \leq 0$; б) $a = 1$, $b \leq 0$. При $a = 1$, $b < 0$ съседно бдр $\mathbf{x}'_M = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$; оптимални решения: $\mathbf{x}_M^\lambda = \lambda\mathbf{x}_M + (1-\lambda)\mathbf{x}'_M = (1-\lambda, \lambda, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0,1]$. При $a = 1$, $b = 0$ бдр: $\mathbf{x}'_M$ и $\mathbf{x}''_M = (0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$; оптимални решения: $\mathbf{x}_M^\lambda = \lambda_1\mathbf{x}_M + \lambda_2\mathbf{x}'_M + \lambda_3\mathbf{x}''_M = (\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3, 0)^{\mathrm{T}}$ за $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$. в) $b > 1$. M-задачата и КЗ нямат оптимално решение. д) $a = 1$.

2.4. $\mathbf{x}_M = (0,0,a,1,b)^{\mathrm{T}}$, $a, b \geq 0$. За x_1, x_2: $\bar{c}_1 = -b^2 + bM$, $\bar{c}_2 = (1-ab) + bM$. а), б) Няма такива a, b. в) $b = 0$, $a = 0$. M-задачата и КЗ нямат оптимално решение. г) a, b не могат да се определят от таблицата, понеже $\mathbf{x}_M$ не е оптимално решение за никои a, b. д) $a = 0$ и/или $b = 0$.

3. Решава се задачата

$$z(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_2 \to \max,$$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 \quad &= 4, \\ -x_1 - x_2 \quad + x_4 &= 3, \\ 2x_1 - x_2 \quad &= 20, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

M-задача: начален базис $[x_5, x_4, x_6]$, x_5 и x_6 изкуствени променливи. Достига се до едно от двете оптимални съседни бдр $\mathbf{x}^* = (16, 12, 0, 31)^{\mathrm{T}}$ или $\mathbf{x}^{**} = (10, 0, 6, 13)^{\mathrm{T}}$. Всички оптимални решения са $\mathbf{x}^\lambda = \lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**} = (10 + 6\lambda, 12\lambda, 6 - 6\lambda, 13 + 18\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$ и за тях $z^* = z(\mathbf{x}^\lambda) = 20$.

4. Решава се задачата

$$\overline{z}(\mathbf{x}) = -4x_1 + 10x_2 \to \max,$$
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq -1, \\ -4x_1 + 2x_2 &\geq 0, \\ -x_1 - x_2 &\leq -2, \\ -4x_1 + 10x_2 &= 100, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Допълнителни променливи x_3, x_4, x_5, $x_1 = x_1^+ - x_1^-$. Начален базис $[x_6, x_4, x_7, x_8]$, x_6, x_7, x_8 изкуствени променливи. При решаване на M-задачата се достига до две оптимални съседни бдр $\mathbf{x}'_M = (0,0,10,19,20,8,0,0,0)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}''_M = \left(0, \frac{40}{7}, \frac{54}{7}, \frac{141}{7}, \frac{268}{7}, 0, 0, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$. Съответните бдр на КЗ са $\mathbf{x}^* = (0, 0, 10, 19, 20, 8)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{x}^{**} = \left(0, \frac{40}{7}, \frac{54}{7}, \frac{141}{7}, \frac{268}{7}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\overline{z}^* = 100$. Всички оптимални решения на КЗ са

$$\lambda\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{x}^{**} = (0, \tfrac{40}{7} - \tfrac{40}{7}\lambda, \tfrac{54}{7} + \tfrac{16}{7}\lambda, \tfrac{141}{7} - \tfrac{8}{7}\lambda, \tfrac{268}{7} - \tfrac{128}{7}\lambda, 8\lambda)^{\mathrm{T}}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Оптималните решения на изходната задача са $\mathbf{x}^\lambda = \left(-\frac{40}{7} + \frac{40}{7}\lambda, \frac{54}{7} + \frac{16}{7}\lambda\right)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$ и за тях $z^* = z(\mathbf{x}^\lambda) = -100$.

5.1. $\mathbf{x}_M = (3, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. а) $\overline{\mathbf{x}} = (3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. б) Едно: въвеждане на x_2 или x_3 в базиса; и в двата случая само се сменя базисът на $\mathbf{x}_M$ ($\mathbf{x}'_M = \mathbf{x}_M$).

5.2. $\mathbf{x}_M = (0, 0, 2, 0)^{\mathrm{T}}$. а) $\overline{\mathbf{x}} = (0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$. б) Едно: въвеждане на x_1 в базиса; сменя се само базисът на $\mathbf{x}_M$ ($\mathbf{x}'_M = \mathbf{x}_M$).

5.3. $\mathbf{x}_M = (5,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. а) $\overline{\mathbf{x}} = (5,0,0)^{\mathrm{T}}$; б) Две: въвеждат се x_2 (ключово число -1) и x_3 (ключово число -4): получават се само други базиси на $\mathbf{x}_M$ ($\mathbf{x}''_M = \mathbf{x}'_M = \mathbf{x}_M$).

5.4. $\mathbf{x}_M = (3,0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. а) $\overline{\mathbf{x}} = (3,0,0)^{\mathrm{T}}$. б) Две: въвеждат се x_3 на мястото на x_4 ($\mathbf{x}'_M = \mathbf{x}_M$) и x_2 на мястото на на x_5 (ключово число -2): $\mathbf{x}''_M = \mathbf{x}'_M = \mathbf{x}_M$.

6. а) Допустимото множество не е празно, защото $\mathbf{x}'_M = (0,\dots,0,b_1,\dots,b_m) \in \overline{P}$. Освен това целевата функция е ограничена отдолу, защото $z(\mathbf{x}_M) \geq 0$. б) От допускането $\mathbf{x}' = (x'_1,\dots,x'_n) \in P \neq \emptyset$ следва, че $\mathbf{x}'_M = (x'_1,\dots,x'_n,0,\dots,0) \in \overline{P}$, откъдето се стига до противоречието $\overline{z}(\mathbf{x}_M) = 0 < \overline{z}^*$. в) $\mathbf{x}^* \in P$ и освен това $\mathbf{x}^*$ е бдр, защото на ненулевите му координати съответстват линейно независими стълбове на матрицата $\mathbf{A}$ (допускането, че тези стълбове са линейно зависими, води до противоречие с факта, че $\mathbf{x}^*_M$ е бдр).

7. Решаваме задача (9) при начално бдр $\mathbf{x}^{(0)}_M = (0,\dots,0,b_1,\dots,b_m)^{\mathrm{T}}$ с базис $\mathcal{B}_{\mathbf{x}^{(0)}_M} = [x_{n+1},\dots,x_{n+m}]$.

- Ако оптималната стойност $\overline{z}^* > 0$, задачата (K) няма решение.
- $\overline{z}^* = 0$, $\mathbf{x}^*_M = (x^*_1,\dots,x^*_{n+m})^{\mathrm{T}}$. Ако в $\mathcal{B}_{\mathbf{x}^*_M}$ има изкуствени променливи, те са базисни нули, които изключваме от базиса (вж. забележка 3). Решаваме задача (K) при начално бдр $\mathbf{x}^{(0)} = (x^*_1,\dots,x^*_n)$ и $\mathcal{B}_{\mathbf{x}^{(0)}} = \mathcal{B}_{\mathbf{x}^*_M}$. За начална симплексна таблица може да се използва тази на $\mathbf{x}^*_M$ (в нея стълбовете x_{n+i}, $i = 1,\dots,m$, са премахнати), като се впишат коефициентите $c_1,\dots,c_n$ (вместо нулите) в стълба $\mathbf{c}_B$ и над стълбовете x_j, $j = 1,\dots,n$. След това се пресмятат относителните оценки на $\mathbf{x}^{(0)}$.

8. Имаме $x_{n+p} = \overline{x}_{j_p} = 0$. В този случай (от формулите за елементарно преобразование на симплексната таблица) следва, че $\overline{x}'_{j_i} = \overline{x}_{j_i}$, $i = 1,\dots,m$, за всяко $w_{pq} \neq 0$ (сменя се само базисът на бдр).