

Упражнение 6

Таблична форма на симплекс метода

Симплекс методът се основава на свойствата на върховете на каноничната задача, разгледани в предишните две упражнения.

Нека $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{x}}_B, \bar{\mathbf{x}}_N)^T = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})^T$ е връх с базис \mathbf{B} на каноничната задача

$$(K) \quad \min z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Ако $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$ и съответно $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_N)^T$, съответстващият на $\bar{\mathbf{x}}$ базисен вид на задачата (K) при базисна матрица \mathbf{B} е

$$(1) \quad z(\mathbf{x}) = \bar{c}_0 + \bar{\mathbf{c}}_N \mathbf{x}_N, \quad \mathbf{x}_B + \mathbf{W}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)^T \geq \mathbf{0},$$

където

$$(2) \quad \mathbf{W} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}, \quad \bar{c}_0 = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad \bar{\mathbf{c}}_N = \mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B^T \mathbf{W}.$$

Числената схема на алгоритъма се реализира с помощта на *симплексни таблици* от вида на табл. 1. Симплексната таблица на даден връх $\bar{\mathbf{x}}$ съдържа съответния базисен вид (1) на задачата и координатите на $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$ в първоначалния ѝ вид (K). В стълбовете \mathcal{B} , \mathbf{c}_B и $\bar{\mathbf{x}}_B$ са нанесени съответно базисните променливи x_{j_i} (i -тото уравнение на $\mathbf{x}_B + \mathbf{W}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ е решено спрямо x_{j_i}), техните коефициенти c_{j_i} и стойности \bar{x}_{B_i} , $i = 1, \dots, m$.

Таблица 1

\mathcal{B}	\mathbf{c}_B	x_1	...	x_j	...	x_q	...	x_n	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		c_1	...	c_j	...	c_q	...	c_n	$\mathbf{0}$
x_{j_1}	c_{j_1}	w_{11}	...	w_{1j}	...	w_{1q}	...	w_{1n}	\bar{x}_{j_1}
...
x_{j_i}	c_{j_i}	w_{i1}	...	w_{ij}	...	w_{iq}	...	w_{in}	\bar{x}_{j_i}
...
x_{j_p}	c_{j_p}	w_{p1}	...	w_{pj}	...	w_{pq}	...	w_{pn}	\bar{x}_{j_p}
...
x_{j_m}	c_{j_m}	w_{m1}	...	w_{mj}	...	w_{mq}	...	w_{mn}	\bar{x}_{j_m}
$\bar{\mathbf{c}}$		\bar{c}_1	...	\bar{c}_j	...	\bar{c}_q	...	\bar{c}_n	$-\bar{c}_0$

Стълбовете на x_j съдържат коефициентите пред едноименните променливи в (1). За небазисните променливи x_j това са елементите на съответния стълб на \mathbf{W} , а за базисните — координатите на съответния единичен вектор $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, в който $w_{ij_i} = 1$. В примерите по-долу единичните стълбове са попълнени за прегледност. В последния (индексния) ред на таблицата са нанесени относителните оценки: това са координатите \bar{c}_j на $\bar{\mathbf{c}}_N$, а за базисните променливи $\bar{c}_{j_i} = 0$, $i = 1, \dots, m$. Там, където индексният ред пресича стълба $\bar{\mathbf{x}}_B$, се вписва $-\bar{c}_0$.

Една реализация на симплекс метода е следната:

1. **Проверка за оптималност на върха.** Ако $\bar{\mathbf{c}}_N \geq 0$, върхът е оптимален и задачата е решена. В противен случай се изпълнява следващата точка.
2. **Проверка за неограниченост (отдолу) на целевата функция.** Ако съществува относителна оценка $\bar{c}_j < 0$ и $\mathbf{w}_j = (\mathbf{w}_{1j}, \dots, \mathbf{w}_{mj})^T \leq \mathbf{0}$, където \mathbf{w}_j е стълбът на \mathbf{W} от коефициентите пред небазисната променлива x_j , то функцията е неограничена отдолу в допустимото множество и задачата е решена. В противен случай се изпълнява следващата точка.
3. **Преход към съседен връх, при което стойността на целевата функция намалява или се запазва.** Извършва се на три етапа:
 - а) *Избор на нова базисна променлива.* Избира се x_q с отрицателна относителна оценка $\bar{c}_q < 0$. Стълбът x_q в таблицата се нарича *ключов стълб*. Препоръчва се да се избира променлива с максимална по абсолютна стойност отрицателна оценка (правило на Бил).
 - б) *Определяне на променливата, която излиза от базиса.* Пресмята се числото \bar{t} по формулата

$$(3) \quad \bar{t} = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{x}_{j_i}}{w_{iq}} : w_{iq} > 0 \right\}.$$

От базиса излиза x_{j_p} . Редът с номер p се нарича *ключов ред*. *Ключовото число* w_{pq} е заградено с правоъгълна рамка.

- в) Извършва се *елементарно преобразование с ключово число* w_{pq} , т. е. попълва се симплексна таблица за новия връх $\bar{\mathbf{x}}'$, съседен на $\bar{\mathbf{x}}$:

- в стълбовете \mathcal{B} и \mathbf{c}_B се прави само една смяна: вместо x_{j_p} се вписва новата базисна променлива x_q , а вместо c_{j_p} — числото c_q ;
- останалата част от таблицата се попълва с числата w'_{ij} , \bar{x}'_i , \bar{c}'_j , \bar{c}'_0 , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, пресметнати по формулите

$$(4) \quad w'_{pj} = \frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad w'_{ij} = w_{ij} - w_{iq} \frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad i \neq p,$$

$$(5) \quad \bar{x}'_q = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}}, \quad \bar{x}'_{ji} = \bar{x}_{ji} - \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}} w_{iq}, \quad i \neq p,$$

$$(6) \quad -\bar{c}'_0 = -\bar{c}_0 - \bar{c}_q \bar{t}, \quad \bar{c}'_j = \bar{c}_j - \bar{c}_q \frac{w_{pj}}{w_{pq}}.$$

С изключение на елементите от p -тия ред, където всички числа се делят на ключовото число w_{pq} , всеки елемент на новата таблица се получава по *правилото на правоъгълника*: от съответния елемент в старата таблица w_{ij} се изважда произведението на елемента от същия ред в ключовия стълб w_{iq} с елемента от същия стълб в ключовия ред w_{pj} , разделено на ключовото число w_{pq} (вж. табл. 1). След попълването на новата симплексна таблица се преминава към стъпка 1.

При тази процедура, ако задачата е неизродена, на всяка стъпка се преминава към нов връх, в който стойността на целевата функция е по-малка. След краен брой стъпки се стига до оптимален връх или се установява неограниченост (отдолу) на функцията в допустимото множество.

При изродени задачи обаче теоретично е възможно зацикляне: минаване през различни базиси на един и същ връх. На практика вероятността за зацикляне е минимална, но се е случвала в практически задачи, решавани с компютър. Затова са разработени процедури за избягване на зациклянето. Една проста такава е разработена от Бленд.

Забележка 1. При ръчно решаване на задачата може да се контролират сметките, ако след попълването на новата таблица относителните оценки се пресмятат и по формули (2).

Забележка 2. Ако минимумът в (3) се достига на повече от едно място, новият връх ще бъде изроден: ще се анулират и други базисни променливи (освен x_{j_p}) и те ще бъдат базисни нули за него.

Забележка 3. Ако в (3) се получи $\bar{t} = 0$, т.е. $\bar{\mathbf{x}}$ е изроден и $\bar{x}_{j_p} = 0$ е негова базисна нула, то елементарното преобразование (4)–(6) не води до нов връх, а само до смяна на базиса на $\bar{\mathbf{x}}$. Сред базисите на един изроден връх обаче винаги има базис, от който чрез елементарно преобразование може да се премине към нов връх.

Пример 1. Да се реши задачата

$$\begin{aligned}
 z(\mathbf{x}) &= 3x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \max, \\
 2x_1 - x_2 &= -3, \\
 x_1 - x_3 &\leq 1, \\
 x_1 + 4x_3 &\leq 4, \\
 x_1 &\geq 0, \quad x_3 \geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид

$$\begin{aligned}
 z_K(\mathbf{x}_K) &= -3x_1 + x_2^+ - x_2^- - 2x_3 \rightarrow \min, \\
 -2x_1 + x_2^+ - x_2^- &= 3, \\
 x_1 - x_3 + x_4 &= 1, \\
 x_1 + 4x_3 + x_5 &= 4, \\
 x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Положили сме $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, $x_2^+ \geq 0$, $x_2^- \geq 0$. Системата уравнения (9) е решена спрямо променливите x_2^+ , x_4 , x_5 и десните ѝ страни са неотрицателни, следователно $\mathbf{x}_K^{(0)} = (0, 3, 0, 0, 1, 4)^T$ е връх на каноничната задача с базис $\mathbf{B}_{x_K^{(0)}} = [x_2^+, x_4, x_5]$.

Върхът $\mathbf{x}_K^{(0)}$ (табл. 2) не е оптимален: $\bar{c}_1 = -1 < 0$, $\bar{c}_3 = -2 < 0$. Не се проявява неограниченост на целевата функция – в стълбовете на x_1 и x_3 има положителни коефициенти. За нова базисна променлива е избрана x_3 . Тя влиза в базиса на мястото на x_5 (само $w_{33} = 4 > 0$). След елементарно преобразование с ключово число $w_{33} = 4$, получаваме табл. 3. Новият връх е $\mathbf{x}_K^{(1)} = (0, 3, 0, 1, 2, 0)^T$ и $z_K(\mathbf{x}_K^{(1)}) = 1$. Той също не е оптимален: $\bar{c}_1 = -\frac{1}{2} < 0$.

Таблица 2

		$\mathbf{x}^{(0)}$						
\mathcal{B}	\mathbf{c}_B	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		-3	1	-1	-2	0	0	0
x_2^+	1	-2	1	-1	0	0	0	3
x_4	0	1	0	0	-1	1	0	1
x_5	0	1	0	0	4	0	1	4
$\bar{\mathbf{c}}$		-1	0	0	-2	0	0	-3

Упражнение 6

Таблица 3

$$\mathbf{x}^{(1)}$$

\mathcal{B}	\mathbf{c}_B	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		-3	1	-1	-2	0	0	0
x_2^+	1	-2	1	-1	0	0	0	3
x_4	0	5/4	0	0	0	1	1/4	2
x_3	-2	1/4	0	0	1	0	1/4	1
$\bar{\mathbf{c}}$		-1/2	0	0	0	0	1/2	-1

Сега в базиса влиза x_1 на мястото на x_4 , защото

$$\bar{t} = \min \left[\frac{2}{\frac{1}{5}}, \frac{1}{\frac{1}{4}} \right] = \min \left(\frac{8}{5}, 4 \right) = \frac{8}{5}.$$

След елементарно преобразование с ключово число $w_{21} = \frac{5}{4}$ получаваме (табл. 4) върха $\mathbf{x}_K^{(2)} = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0, 0 \right)^T$, който е оптимален и $z_K^* = z_K(\mathbf{x}_K^{(2)}) = \frac{1}{5}$.

Таблица 4

$$\mathbf{x}^{(2)}$$

\mathcal{B}	\mathbf{c}_B	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$
		-3	1	-1	-2	0	0	0
x_2^+	1	0	1	-1	0	8/5	2/5	31/5
x_1	-3	1	0	0	0	4/5	1/5	8/5
x_3	-2	0	0	0	1	-1/5	1/5	3/5
$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	2/5	3/5	-1/5

Понеже $\bar{c}_2^- = 0$ и останалите елементи от стълба x_2^- са неположителни ($\mathbf{w}_2^- = (-1, 0, 0)^T \leq \mathbf{0}$), то от върха $\mathbf{x}_K^{(2)}$ излиза неограничен ръб на допустимото множество (9), чиито точки са от вида

$$\mathbf{x}_K^{(t)} = \mathbf{x}_K^{(2)} + t(0, 1, 1, 0, 0, 0)^T = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5} + t, t, \frac{3}{5}, 0, 0 \right)^T, \quad t \geq 0$$

и също са оптимални решения на каноничната задача. Решенията на първоначалната задача се получават от първите четири координати на $\mathbf{x}_K^{(t)}$

$(x_2 = x_2^+ - x_2^-)$: $\mathbf{x}^* = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, \frac{3}{5}\right)^T$ и $z^* = -\frac{1}{5}$. Виждаме, че решението на дадената задача е единствено, въпреки че съответната канонична задача има оптимален неограничен рѣб. Затова в бъдеще няма да обръщаме внимание на тези оптимални решения на каноничната задача, защото те не водят до нови оптимални решения на дадената задача.

Пример 2. Да се реши задачата

$$\begin{aligned} z(\mathbf{x}) &= -3x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ -2x_1 + x_2 &\leq 4, \\ -x_1 + x_2 &\geq -2, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 22, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Привеждаме задачата в каноничен вид, като предварително умножим второто ограничение с -1

$$\begin{aligned} z_K(\mathbf{x}_K) &= -3x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 &= 22, \\ x_j \geq 0, j &= 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

Задачата е в базисен вид (с базис само от допълнителни променливи) спрямо върха $\mathbf{x}_K^{(0)} = (0, 0, 4, 2, 22)^T$ и $z(\mathbf{x}_K^{(0)}) = 0$. В таблица 5 са последователните симплексни таблици за $\mathbf{x}_K^{(0)}$, $\mathbf{x}_K^{(1)} = (2, 0, 8, 0, 16)^T$, $\mathbf{x}_K^{(2)} = \mathbf{x}_K^* = (6, 4, 12, 0, 0)^T$, $z_K(\mathbf{x}_K^{(1)}) = -6$, $z_K^* = z(\mathbf{x}_K^*) = -22$.

Оптималното решение \mathbf{x}_K^* не е единствено, понеже $\bar{c}_4 = 0$. При въвеждане на x_4 в базиса се получава (вж. последната симплексна таблица в табл. 5) оптималното решение $\mathbf{x}_K^{**} = \left(\frac{18}{5}, \frac{56}{5}, 0, \frac{48}{5}, 0\right)^T$. Други оптимални върхове няма. Тогава всички оптимални решения на каноничната задача са $\mathbf{x}_K^{(\lambda)} = \lambda \mathbf{x}_K^* + (1 - \lambda) \mathbf{x}_K^{**} = \left(\frac{18+12\lambda}{5}, \frac{56-36\lambda}{5}, 12\lambda, \frac{48-48\lambda}{5}, 0\right)^T$, $\lambda \in [0, 1]$. Изходната задача има оптимални решения $\mathbf{x}^{(\lambda)} = \left(\frac{18+12\lambda}{5}, \frac{56-36\lambda}{5}\right)^T$, $\lambda \in [0, 1]$, и $z^* = -22$.

Пример 3. Да се реши задачата

$$\begin{aligned} z(\mathbf{x}) &= -x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 &= 2, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_j \geq 0, j &= 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Упражнение 6

Таблица 5

\mathcal{B}	\mathbf{c}_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{\mathbf{x}}_B$	
		-3	-1	0	0	0	0	
x_3	0	-2	1	1	0	0	4	$\mathbf{x}_K^{(0)}$
x_4	0	1	-1	0	1	0	2	
x_5	0	3	1	0	0	1	22	
$\bar{\mathbf{c}}$		-3	-1	0	0	0	0	
x_3	0	0	-1	1	2	0	8	$\mathbf{x}_K^{(1)}$
x_1	-3	1	-1	0	1	0	2	
x_5	0	0	4	0	-3	1	16	
$\bar{\mathbf{c}}$		0	-4	0	3	0	6	
x_3	0	0	0	1	5/4	1/4	12	$\mathbf{x}_K^{(2)} = \mathbf{x}_K^*$
x_1	-3	1	0	0	1/4	1/4	6	
x_2	-1	0	1	0	-3/4	1/4	4	
$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	22	
x_4	0	0	0	4/5	1	1/5	48/5	\mathbf{x}_K^{**}
x_1	-3	1	0	-1/5	0	1/5	18/5	
x_2	-1	0	1	3/5	0	2/5	56/5	
$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	0	0	1	22	

Решение. Дадената задача е в каноничен вид с очевиден начален базис $[x_1, x_2]$, на който отговаря изроден връх $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 0, 0, 0)^T$. Симплексните

Таблица 6

\mathcal{B}	\mathbf{c}_B	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{\mathbf{x}}_B$	
		-1	-1	-5	4	0	
x_1	-1	1	0	3	1	2	$\mathbf{x}^{(0)}$
x_2	-1	0	1	1	-2	0	
$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	-1	3	2	
x_1	-1	1	-3	0	7	2	$\mathbf{x}^{(0)}$
x_3	-5	0	1	1	-2	0	
$\bar{\mathbf{c}}$		0	1	0	1	2	

таблицы за решаване на задачата са дадени в таблица 6. Те съдържат базисния вид на задачата спрямо два базиса на този изроден връх. Критерият за оптималност се проявява само при втория базис. Оптималната стойност на целевата функция е $z^* = -2$.

Задачи

Да се решат чрез симплекс метода дадените задачи. От симплексната таблица на последния връх $\bar{\mathbf{x}}$ да се определи:

- а) ако $\bar{\mathbf{x}}$ е оптимален, дали е единствено оптимално решение и ако не е, да се намерят всички съседни оптимални върхове, а също и оптималните решения (ако има такива), които лежат върху неограничени ръбове, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$; да се напише общият вид на допустимите вектори, за които от получената информация следва, че са оптимални решения на задачата;
- б) общият вид на точките, лежащи върху неограничените ръбове, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$, по които $z(\mathbf{x})$ расте или намалява неограничено (в зависимост от критерия).

1. $z(\mathbf{x}) = 3 - x_4 - x_5 \rightarrow \min,$

$$x_1 + x_4 + x_5 = 2,$$

$$x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7,$$

$$x_3 - x_4 - 3x_5 = 2,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

2. $z(\mathbf{x}) = 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 - x_6 \rightarrow \max,$

$$-x_2 + x_3 + x_4 - 6x_5 = 5,$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 - x_6 = 3,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6.$$

3. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 - 12x_5 \rightarrow \max,$

$$x_1 + 2x_2 - x_4 - 5x_5 = 7,$$

$$x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 2,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.$$

4. Зад. 3, но при целева функция $z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 - 12x_5$.

Упражнение 6

5. $z(\mathbf{x}) = x_2 - x_3 \rightarrow \max,$

$$-x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -2,$$

$$x_2 - x_3 \geq 1,$$

$$3x_2 + x_3 \leq 5,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

6. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max,$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 2,$$

$$16x_2 + x_3 - 2x_4 = 8,$$

$$5x_2 \leq 3,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

7. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4,$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4,$$

$$0 \leq x_1 \leq 3, \quad 0 \leq x_2 \leq 3,$$

$$0 \leq x_3 \leq 7, \quad 0 \leq x_4.$$

8. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$2x_1 + 6x_2 \leq 6,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

9. $z(\mathbf{x}) = 9x_1 + 14x_2 + 5x_3 \rightarrow \max,$

$$9x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 54,$$

$$9x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 63,$$

$$0 \leq x_2 \leq 5, \quad x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Отговори и решения

1. $z^* = 1$. При влизане на x_4 в базиса оптимално решение е $\mathbf{x}^* = (0, 3, 4, 2, 0)^T$. При влизане на x_5 в базиса оптимално решение е $\mathbf{x}^{**} = (0, 1, 8, 0, 2)^T$. Всички оптимални решения са $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}^{**} = (0, 2\lambda + 1, 8 - 4\lambda, 2\lambda, 2 - 2\lambda)^T$, $\lambda \in [0, 1]$.

2. От $\bar{\mathbf{x}} = (3, 0, 5, 0, 0)^T$ излиза неограничен ръб $\mathbf{x}_t = (3 + t, 0, 5, 0, 0, t)^T$, $t \geq 0$; $z(\mathbf{x}_t) = 50 + 4t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$.

3. $\bar{\mathbf{x}} = (7, 0, 2, 0, 0)^T$ е оптимално решение, $z^* = 16$. Оптимални неограничени ръбове ($\bar{c}_4 = 0$) $\mathbf{x}_t = (7 + t, 0, 2 + 3t, t, 0)^T$, $t \geq 0$, с направляващ вектор $\mathbf{p} = (1, 0, 3, 1, 0)^T$ и ($\bar{c}_5 = 0$) $\mathbf{x}_r = (7 + 5r, 0, 2 + 2r, 0, r)^T$, $r \geq 0$, с направляващ вектор $\mathbf{q} = (5, 0, 2, 0, 1)^T$. Всички оптимални решения са $\mathbf{x}_\mu = \bar{\mathbf{x}} + \mu_1\mathbf{p} + \mu_2\mathbf{q} = (7 + \mu_1 + 5\mu_2, 0, 2 + 3\mu_1 + 2\mu_2, \mu_1, \mu_2)^T$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$.

4. $\bar{\mathbf{x}} = (7, 0, 2, 0, 0)^T$ е оптимално решение, $z^* = 16$. Неограничени ръбове ($\bar{c}_4 = 0$) \mathbf{x}_t и ($\bar{c}_5 = 0$) \mathbf{x}_r от вида в задача 3. $\bar{\mathbf{x}}$ има съседен оптимален връх ($\bar{c}_2 = 0$) $\bar{\mathbf{y}} = (3, 2, 0, 0, 0)^T$. Оптимални решения са $\mathbf{x}_{\lambda\mu} = \lambda\bar{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\bar{\mathbf{y}} + \mu_1\mathbf{p} + \mu_2\mathbf{q} = (3 + 4\lambda + \mu_1 + 5\mu_2, 2 - 2\lambda, 2\lambda + 3\mu_1 + 2\mu_2, \mu_1, \mu_2)^T$, $\lambda \in [0, 1]$, $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ (това не са всички решения – от $\bar{\mathbf{y}}$ също излиза неограничен оптимален ръб).

5. $z^* = \frac{5}{3}$, $\mathbf{x}^* = \left(\frac{17}{6}, \frac{5}{3}, 0\right)^T$.

6. $z^* = 0$, $\mathbf{x}^* = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)^T$.

7. $z^* = 6$, $\mathbf{x}^* = (3, 3, 1, 1)^T$.

8. $z^* = 3$, $\mathbf{x}^* = (3, 0, 1)^T$.

9. $z^* = 108$, $\mathbf{x}^* = (2, 5, 4)^T$.