Упражнение 5

Симплекс метод за решаване на КЗЛО при известен начален базис

Изучаването на симплекс метода започва при известен начален базис. Намирането на начално бдр (начален връх) при неизвестен начален базис ще бъде предмет на някое от следващите упражнения.

Алгоритъм на симплекс метода

(0) Нека е дадено базисно допустимо решение (връх) $\overline{\mathbf{x}}$ на КЗЛО

$$\text{(K)} \qquad \min z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \qquad \operatorname{rank} \mathbf{A} = m,$$

съответстващо на базисна матрица $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{j_1}, \ldots, \mathbf{A}_{j_m}]$. Нека с $\mathcal{B}$ е означено множеството $\{j_1, \ldots, j_m\}$ от индексите на базисните променливи, т. е. x_{j_i} е i-та базисна променлива.

(1) Привеждаме задачата в **базисен вид спрямо базиса B**

$$\text{(1)} \qquad \min z = \overline{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_N + \overline{c}_0, \qquad \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

където *относителните оценки* са пресметнати по формулите

$$\text{(2)} \qquad \overline{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{w}_j, \qquad j \notin \mathcal{B}.$$

(2) **Проверка за оптималност.** Ако $\overline{c}_j \geq 0$ за всяко $j \notin \mathcal{B}$, КРАЙ; текущото бдр е оптимално.

(3) **Проверка за неограничен ръб, по който целевата функция намалява неограничено.** Ако съществува $j \notin \mathcal{B}$, за който $\overline{c}_j < 0$ и $\mathbf{w}_j \leq \mathbf{0}$, КРАЙ; има неограничен ръб в допустимото множество, по който $z \to -\infty$.

(4) **Определяне на небазисна променлива x_q за влизане в базиса.** Ако за всеки индекс $j \notin \mathcal{B}$, за който $\overline{c}_j < 0$, съответният стълб $\mathbf{w}_j \nleq \mathbf{0}$, то от $\overline{\mathbf{x}}$ излизат само ограничени ръбове на допустимото множество, по които стойността на целевата функция намалява. Избираме един такъв индекс $q \in \{j \notin \mathcal{B} : \overline{c}_j < 0\}$. Стълбът с номер q се нарича *ключов* (*водещ*) стълб. Ако има повече от един индекс, който е кандидат за ключов стълб, препоръчва се да се избира този, за който $|\overline{c}_q|$ е максимална (известно като правило на Бил).

(5) Определяне на базисна променлива x_{j_p} за излизане от базиса. Пресмята се числото

$$\bar{t} = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}} = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \frac{\bar{x}_{j_i}}{w_{iq}} : w_{iq} > 0 \right\}. \tag{3}$$

Редът с номер j_p се нарича *ключов* (*водещ*) ред, а числото w_{pq} — *ключово число* (*водещ елемент*).

(6) Обновяване на текущото бдр и на базисната матрица $\mathbf{B}$.

- На мястото на досегашната базисна променлива x_{j_p} влиза x_q. Следователно $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{j_p\} \cup \{q\}$. На мястото на стълба $\mathbf{A}_{j_p}$ в досегашния базис влиза стълба $\mathbf{A}_q$. На практика това означава, че новото базисно представяне на задачата се получава от (1), като системата $\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ се реши по метода на Гаус-Жордан спрямо новата базисна променлива x_q. С други думи, в j_p-тото уравнение коефициентът пред x_q става равен на $+1$ след делене на това уравнение с ключовото число w_{pq}, след което x_q се изключва от останалите уравнения на системата и от целевата функция. Формулите за това така наречено *елементарно преобразование на системата* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *с ключово число* w_{pq} са следните

$$w'_{pj} = \frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad w'_{ij} = w_{ij} - w_{iq}\frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad i \ne p, \; j = 1, \dots, n. \tag{4}$$

- Координатите на новия връх $\bar{\mathbf{x}}'$, който е съседен на $\bar{\mathbf{x}}$, са

$$\bar{x}'_q = \bar{t} = \frac{\bar{x}_{j_p}}{w_{pq}}, \quad \bar{x}'_{j_i} = \bar{x}_{j_i} - \bar{t} w_{iq}, \; i \ne p. \tag{5}$$

и се получават при елементарното преобразование с ключово число w_{pq}.

- Стойността на целевата функция и относителните оценки на небазисните променливи при новия базис могат да бъдат пресметнати по следния начин

$$\bar{c}'_0 = \bar{c}_0 + \bar{c}_q \bar{t}, \qquad \bar{c}'_j = \bar{c}_j - \bar{c}_q \frac{w_{pj}}{w_{pq}}, \quad j \notin \mathcal{B}'. \tag{6}$$

Преминаваме на стъпка (1).

Забележка 1. Ако в (3) $\bar{t} = 0$ ($\bar{x}_{j_p} = 0$), то $\bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{x}}$, т. е. описаната процедура сменя само базиса на изроденото бдр $\bar{\mathbf{x}}$.

Забележка 2. Ако минимумът в (3) се достига за няколко частни $\dfrac{\overline{x}_{j_p}}{w_{pq}}$, то само една от съответните базисни променливи ще напусне базиса — останалите ще бъдат базисни нули за $\overline{\mathbf{x}}'$, т. е. $\overline{\mathbf{x}}'$ е изродено бдр.

Забележка 3. Ако след намирането на оптимално бдр се окаже, че има небазисна(и) променлива(и) с нулева относителна оценка, това означава, че задачата може да има и други оптимални базиси. Нека $\overline{c}_j = 0$, $j \notin \mathcal{B}$. Тук възникват два случая:

- ако стълбът $\mathbf{w}_j \leq \mathbf{0}$, тогава съществува неограничен ръб на допустимото множество, чиито точки също са оптимални решения.
- ако стълбът $\mathbf{w}_j$ има поне един положителен елемент, тогава съществува съседен оптимален базис.

Пример 1. Дадена е каноничната задача

$$z(\mathbf{x}) = ax_1 - x_2 + ax_3 \to \min,$$

$$M: \left| \begin{array}{l} ax_1 - x_2 + (1-a)x_3 = a - 1 \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad\quad\; = 0 \\ \qquad x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, \end{array} \right.$$

и бдр $\overline{\mathbf{x}} = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. За кои стойности на $a \neq 1$

а) $\overline{\mathbf{x}}$ е единствено оптимално бдр на задачата?

б) $\overline{\mathbf{x}}$ не е единствено оптимално бдр на задачата? Да се определи общият вид на оптималните решения.

в) целевата функция z намалява неограничено в M?

г) има съседно бдр на $\overline{\mathbf{x}}$, за което функцията има по-голяма стойност?

Решение. Векторът $\overline{\mathbf{x}}$ е бдр на задачата при $a \neq 1$, защото стълбовете от коефициентите пред положителните му координати x_1 и x_2 са линейно независими ($\det \|\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\| = -a + 1 \neq 0$ за $a \neq 1$). Привеждаме задачата в базисен вид спрямо базиса $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$ на $\overline{\mathbf{x}}$ (като първо изключим x_2 от първото уравнение, а след това и x_1 от второто):

$$z(\mathbf{x}) = a - 1 + (2a - 1)x_3,$$

$$M: \left| \begin{array}{l} x_1 \qquad - x_3 = 1 \\ \quad x_2 - x_3 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

а) $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимално бдр, ако $\bar{c}_3 = 2a - 1 \geq 0$ и ще бъде единствено, ако $\bar{c}_3 = 2a - 1 > 0$, т. е. за $a > \frac{1}{2}$, $a \neq 1$.

б) $\overline{\mathbf{x}}$ не е единствено оптимално бдр, ако $\bar{c}_3 = 2a - 1 = 0$, т. е. $a = \frac{1}{2}$. Понеже $\mathbf{w}_3 = (-1, -1)^{\mathrm{T}} < \mathbf{0}$, от $\overline{\mathbf{x}}$ излиза неограничен ръб на M, за чиито точки

$$\mathbf{x}_t = (1 + t, 1 + t, t)^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

имаме $z(\mathbf{x}_t) = z(\overline{\mathbf{x}}) + 0.t = z(\overline{\mathbf{x}})$, т. е. те са оптимални решения на задачата.

в) Понеже $\mathbf{w}_3 < \mathbf{0}$, то трябва $\bar{c}_3 = 2a - 1 < 0$, т. е. $a < \frac{1}{2}$. Тогава за точките $\mathbf{x}_t$ на неограничения ръб (7) имаме

$$z(\mathbf{x}_t) = z(\overline{\mathbf{x}}) + (2a - 1)t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \text{ за } a < \frac{1}{2}.$$

г) Не може да се премине към съседно бдр: $\overline{\mathbf{x}}$ е единственото бдр на M, защото $\mathbf{w}_3 < \mathbf{0}$ и при $x_3 = t \geq 0$ получаваме точките $\mathbf{x}_t \in M$ от (7).

Пример 2. Да се приложи алгоритъмът на симплекс метода за решаване на задачите:

а) $\min z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5$ при ограничения

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1, \\ x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 1, \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2, \end{array} \tag{8}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 5.$$

б) $\max z = 3x_3 + 4x_4$ при ограничения

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & & & = & 1, \\ -5x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \end{array} \tag{9}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 4.$$

Решение. а) Системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ на ограниченията е в базисен вид с базис $[x_3, x_4, x_5]$, т. е. матрицата $\mathbf{A}$ съдържа в себе си единичната матрица от ред 3 (в случая това са стълбовете пред променливите x_3, x_4 и x_5). Това базисно представяне отговаря на бдр $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 1, 1, 2)^{\mathrm{T}}$. Изразяваме базисните променливи чрез небазисните

$$x_3 = 1 + x_1 - x_2,$$
$$x_4 = 1 - x_1 + x_2,$$
$$x_5 = 2 - x_1 - x_2.$$

Заместваме базисните променливи в целевата функция и след приведение получаваме

$$z = -3 - 6x_1 + 7x_2. \tag{10}$$

Така относителните оценки на небазисните променливи са $\overline{c}_1 = -6 < 0$, $\overline{c}_2 = 7 > 0$ и $z(\mathbf{x}^{(1)}) = \overline{c}_0 = -3$. Критерият за оптималност не е изпълнен, тъй като относителната оценка на променливата x_1 е отрицателна. Стълбът $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ съдържа положително число и следователно целевата функция засега не личи да е неограничена. Преминаваме към съседно бдр чрез въвеждане на x_1 в базиса. Да видим коя от променливите с положителни коефициенти в стълба $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ще напусне базиса. Кандидати за напускане на базиса са x_4 и x_5, тъй като имат положителни коефициенти в стълба $\mathbf{w}_1$. Намираме числото

$$\bar{t} = \min\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\right\} = 1.$$

Тогава променливата x_4 напуска базиса и нейното място се заема от x_1. Новият базис е $[x_3, x_1, x_5]$. Да получим базисното представяне на системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. За целта решаваме системата (8) спрямо x_1, като най-напред разделяме втория ред на коефициента пред x_1. Този коефициент е 1 и затова нищо не се променя във второто уравнение. След това x_1 се елиминира от първото и третото уравнение, като второто уравнение се прибавя към първото, а след това второто уравнение се изважда от третото. Окончателно получаваме

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
 & & & & x_3 & + & x_4 & & & = & 2, \\
x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 1, \\
 & & 2x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 1,
\end{array}$$
$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 5.$$

Това базисно представяне отговаря на бдр $\mathbf{x}^{(2)} = (1, 0, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$. Изразяваме новата базисна променлива x_1 чрез небазисните

$$x_1 = 1 + x_2 - x_4.$$

Заместваме я в целевата функция (10) и след приведение получаваме

$$z = -9 + x_2 + 6x_4.$$

Относителните оценки на небазисните променливи са $\bar{c}_2 = 1 > 0$, $\bar{c}_4 = 6 > 0$ и $z(\mathbf{x}^{(2)}) = \bar{c}_0 = -9$. Критерият за оптималност е изпълнен. Следователно $\mathbf{x}^{(2)} = (1, 0, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на задачата и оптималната стойност на целевата функция е $z^* = -9$.

б) Системата $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ на ограниченията е в базисен вид с базис $[x_3, x_4]$, т. е. матрицата $\mathbf{A}$ съдържа в себе си единичната матрица от ред 2 (в случая това са стълбовете пред променливите x_3 и x_4). Това базисно представяне отговаря на бдр $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. Изразяваме базисните променливи чрез небазисните

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 - 2x_1 + 3x_2, \\ x_4 &= 1 + 5x_1 - 2x_2. \end{aligned}$$

Понеже задачата е за максимум, привеждаме я към задачата за минимум, като умножаваме целевата функция с -1. След това заместваме базисните променливи в целевата функция и правим приведение. Получаваме

$$z = -7 - 14x_1 - x_2. \tag{11}$$

Относителните оценки $\bar{c}_1 = -14$ и $\bar{c}_2 = -1$ на небазисните променливи са отрицателни. Стълбовете $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ пред x_1 и $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ пред x_2 съдържат положително число и поне от този базис не личи целевата функция да е неограничена. Понеже абсолютната стойност на относителната оценка на x_1 е по-голяма от абсолютната стойност на относителната оценка на x_2, вкарваме в базиса x_1. Тъй като в стълба $\mathbf{w}_1$ само първата координата е положителна, а в първото уравнение базисна променлива е x_3, от базиса излиза x_3. Така новият базис е $[x_1, x_4]$. Решаваме системата (9) спрямо новата базисна променлива x_1. За целта делим първото уравнение на 2 и така полученото уравнение умножаваме с 5 и прибавяме към второто уравнение. Получаваме

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & & & = & \frac{1}{2}, \\ & - & \frac{11}{2}x_2 & + & \frac{5}{2}x_3 & + & x_4 & = & \frac{7}{2}, \\ & & \multicolumn{7}{l}{x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, 4.} \end{array} \tag{12}$$

Това базисно представяне отговаря на бдр $\mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{7}{2}\right)^{\mathrm{T}}$. Изразяваме новата базисна променлива x_1 чрез небазисните

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3.$$

Заместваме в (11). След приведение получаваме

$$z = -14 - 22x_2 + 7x_3.$$

Относителните оценки на небазисните променливи са $\overline{c}_2 = -22 < 0$, $\overline{c}_3 = 7 > 0$ и $z(\mathbf{x}^{(2)}) = \overline{c}_0 = -14$. Критерият за оптималност не е изпълнен. Променливата x_2 трябва да влезе в базиса, но стълбът $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -11/2 \end{bmatrix}$ пред x_2 в представянето (12) не съдържа положително число. Следователно от $\mathbf{x}^{(2)}$ излиза неограничен ръб на допустимото множество, по който целевата функция намалява неограничено. Поради това задачата няма оптимално решение.

Задачи

1. Да се приложи алгоритъмът на симплекс метода да решаване на задачите:

1.1. $\max z = 3x_1 - x_2 + 2x_3$ при ограничения

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \phantom{{}+4x_3} &= -3, \\ x_1 \phantom{{}-x_2} - x_3 &\le 1, \\ x_1 \phantom{{}-x_2} + 4x_3 &\le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 &\ge 0. \end{aligned}$$

1.2. $\min z = -3x_1 - x_2$ при ограничения

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\le 4, \\ -x_1 + x_2 &\ge -2, \\ 3x_1 + x_2 &\le 22, \\ x_1 &\ge 0. \end{aligned}$$

1.3. $\min z = -x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4$ при ограничения

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} + 3x_3 + x_4 &= 2, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

2. Решете чрез симплекс метода следващите задачи, като използувате даденото бдр $\mathbf{x}^{(0)}$. Намерете всички решения в зависимост от стойностите на параметъра a.

2.1. $z(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + ax_3 \to \max, \qquad a \ne 0,\ \mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}};$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (a+2)x_3 &= a + 3, \\ x_1 - x_2 + (a-2)x_3 &= a - 3, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

2.2. $z(\mathbf{x}) = x_1 + ax_2 + ax_3 \to \max, \qquad a \neq 0,\ \mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}};$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (a+1)x_3 &= a + 2, \\ x_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= a - 2, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

2.3. $z(\mathbf{x}) = x_1 + ax_2 + ax_3 \to \max, \qquad 1 - 4ab \neq 0,\ \mathbf{x}^{(0)} = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}};$

$$\begin{aligned} x_1 - (1+2a)x_2 + 2ax_3 &= 1 - 2a, \\ 2bx_1 - (1+2b)x_2 + x_3 &= 2b - 1, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

2.4. $z(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + ax_3 \to \max, \qquad a \neq 1,\ \mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}};$

$$\begin{aligned} ax_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= a - 2, \\ x_1 + ax_2 + (a+1)x_3 &= 2a + 1, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

2.5. $z(\mathbf{x}) = ax_1 + x_2 + x_3 \to \max, \qquad a \neq 0,\ \mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= a - 2, \\ x_1 + x_2 + (a+1)x_3 &= a + 2, \\ x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

Отговори и решения

1.1. $z^* = \frac{1}{5}$, $\mathbf{x}^* = \left(\frac{8}{5}, \frac{31}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

1.2. $z^* = -22$, $\mathbf{x}^* = (6, 4)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^{**} = \left(\frac{18}{5}, \frac{56}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}^\lambda = \left(\frac{18+12\lambda}{5}, \frac{56-36\lambda}{5}\right)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$.

1.3. $z^* = -2$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(0)} = (2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

2.1. $a > 0$: $z^* = a + 3$, $\mathbf{x}^* = (3, a, 0)^{\mathrm{T}}$; $a < 0$: $z^* = a + 1$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

2.2. $a > 0$: $z^* = 3a$, $\mathbf{x}^* = (a, 2, 0)^{\mathrm{T}}$; $a < 0$: $z^* = a$, $\mathbf{x}^* = (-a, 0, 2)^{\mathrm{T}}$.

2.3. $2a + 1 > 0$: $z(\mathbf{x})$ расте неограничено в допустимото множество; $2a + 1 < 0$: $z^* = a+2$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(0)} = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$; $2a+1 = 0$: $z^* = a+2$, $\mathbf{x}^t = (2+t, 1+t, t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$.

2.4. $a \leq 2$: $z^* = -1$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$; $a > 2$: $z^* = a - 3$, $\mathbf{x}^* = (0, 1, 1)$.

2.5. $a > 0$: $z^* = a + 2$, $\mathbf{x}^* = (a, 2, 0)^{\mathrm{T}}$; $a < 0$: $z^* = 2$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.