Упражнение 4

Базисно представяне на каноничната задача на линейното оптимиране. Идея на симплекс метода

1. Базисно представяне на каноничната задача на линейното оптимиране

Нека е дадена канонична задача (КЗ) на линейното оптимиране (ЛО)

$$
\text{(K)}\qquad
\begin{aligned}
&\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \dots, m,\\
&x_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, n
\end{aligned}
$$

или в матричен вид $\min z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in M = \{\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, където $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ е матрица $m \times n$ с ранг m, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m_+$.

Нека $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ е връх на M с базис $\mathbf{B}$, а

$$
(1)\qquad \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
$$

е базисното представяне на M относно базиса $\mathbf{B}$ на $\bar{\mathbf{x}}$. Сега базисните променливи се изключват от целевата функция. Най-напред от (1)

$$
\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N,
$$

а след това

$$
\begin{aligned}
z(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N) + \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_N\\
&= \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N = \bar{c}_0 + \bar{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_N,
\end{aligned}
$$

където $\bar{c}_0 = \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\bar{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}} = \mathbf{c}_N^{\mathrm{T}} - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$.

Представянето на КЗ във вида

$$
(2)\qquad \min z = \bar{c}_0 + \bar{\mathbf{c}}_N^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_N, \quad \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},
$$

се нарича *базисно представяне* на КЗ, съответстващо на базиса $\mathbf{B}$. Коефициентите

$$\overline{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j = c_j - \mathbf{c}_B^{\mathrm{T}} \mathbf{w}_j, \qquad j \in N,$$

се наричат *относителни оценки* или *редуцирани цени* на небазисните променливи. Знакът на относителната оценка $\overline{c}_j$ дава възможност да се определи поведението на целевата функция по ръба, съответстващ на x_j:

- ако $\overline{c}_j > 0$, целевата функция z расте по ръба;
- ако $\overline{c}_j < 0$, целевата функция z намалява по ръба;
- ако $\overline{c}_j = 0$, целевата функция z не променя стойността си по ръба.

Теорема 1. Ако $M \neq \emptyset$, то минимумът на z върху M се достига поне в един връх или минимумът е $-\infty$.

Теорема 2 (Критерий за оптималност)**.** Върхът $\overline{\mathbf{x}}$ на M е оптимален, ако съществува базис на $\overline{\mathbf{x}}$, за който $\overline{c}_j \geq 0$, $j \in N$.

Теорема 3 (Критерий за неограниченост на целевата функция)**.** Ако съществува небазисна променлива x_q, за която $\overline{c}_q < 0$ и $\mathbf{w}_q = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_q \leq \mathbf{0}$, то $\min\limits_M z = -\infty$.

2. Идея за симплекс метода

Нека $\overline{\mathbf{x}}$ е връх на M. С помощта на относителните оценки на небазисните променливи се определя поведението на z по ръбовете, излизащи от $\overline{\mathbf{x}}$.

1. Ако за всички небазисни j относителните оценки $\overline{c}_j \geq 0$, то $\overline{\mathbf{x}}$ е оптимален връх (Теорема 2).

2. Ако съществува небазисна променлива x_q, за която $\overline{c}_q < 0$ и $\mathbf{w}_q \leq \mathbf{0}$, целевата функция z намалява неограничено върху M (Теорема 3).

3. Ако за всяка небазисна променлива x_j, за която $\overline{c}_j < 0$, съответният стълб $\mathbf{w}_j \nleq \mathbf{0}$, тогава съществува (ограничен) ръб, излизащ от $\overline{\mathbf{x}}$, по който целевата функция z намалява. Придвижвайки се по този ръб, се стига до съседен връх $\overline{\mathbf{x}}'$, за който $z(\overline{\mathbf{x}}') \leq z(\overline{\mathbf{x}})$. Ако $\overline{\mathbf{x}}$ е неизроден, неравенството е строго. При изроден връх е възможно да се получи фиктивен ръб и тогава придвижване по ръба е невъзможно, т. е. $\overline{\mathbf{x}}' = \overline{\mathbf{x}}$. Тези случаи ще бъдат изяснени по-късно с примери. Тъй като върховете са краен брой и при неизродена задача (такава, чиито върхове са неизродени) стойността на целевата функция намалява монотонно при преминаване от един връх към съседен на него, след краен брой

стъпки се стига до оптимален връх или до заключение, че целевата функция е неограничена отдолу върху M.

Пример 1. Дадена е задачата

$$
\min_M z(\mathbf{x}) = -2x_1 + 3x_3 - 5x_4 + 3x_5,
$$

$$
(3) \qquad M : \left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 10x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + \ \ 7x_4 \qquad\quad = 4 \\ \qquad x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5 \end{array} \right.
$$

и върховете $\overline{\mathbf{x}}' = (4, 0, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{x}}'' = (0, 2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ на M. Да се приведе дадената задача в базисен вид спрямо базисите на $\overline{\mathbf{x}}'$ и $\overline{\mathbf{x}}''$ и да се провери дали тези върхове са оптимални. Да се изследва поведението на целевата функция върху ръбовете на допустимото множество, излизащи от $\overline{\mathbf{x}}'$ и $\overline{\mathbf{x}}''$.

Решение. Лесно се проверява (как?), че $\overline{\mathbf{x}}'$ е неизроден, а $\overline{\mathbf{x}}''$ е изроден връх на M.

а) Базисът на $\overline{\mathbf{x}}'$ е $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_5]$. Системата е решена спрямо x_5, защото x_5 присъства с коефициент $+1$ само в първото уравнение. За да се реши системата спрямо x_1, второто уравнение се изважда от първото. Така базисното представяне на ограниченията на задачата спрямо базиса на $\overline{\mathbf{x}}'$ е

$$
\begin{aligned}
x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2, \\
x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 \qquad &= 4, \\
x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5&.
\end{aligned}
$$

Оттук базисните променливи се изразяват чрез небазисните

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
x_1 &= 4 - 2x_2 + 3x_3 - 7x_4, \\
x_5 &= 2 - \ \ x_2 + 2x_3 - 3x_4.
\end{aligned}
$$

Изразите за x_1 и x_5 от (4) се заместват в целевата функция и така се стига до базисното представяне на задачата за неизродения връх $\overline{\mathbf{x}}'$

$$
\min z(\mathbf{x}) = x_2 + 3x_3 - 2,
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2, \\
x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 \qquad &= 4, \\
x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 5&.
\end{aligned}
$$

Следователно относителните оценки на небазисните променливи са $\overline{c}_2 = 1$, $\overline{c}_3 = 3$, $\overline{c}_4 = 0$, $\overline{c}_0 = z(\overline{\mathbf{x}}') = -2$. Вижда се, че относителните оценки на небазисните променливи на $\overline{\mathbf{x}}'$ са неотрицателни, което означава, че $\overline{\mathbf{x}}'$ е оптимален връх. Минималната стойност на целевата функция е -2.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_2, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}' + t\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4-2t\\t\\0\\0\\2-\ \ t\end{bmatrix}, \qquad t \in [0,2].$$

Този ръб е ограничен (отсечка) и за $t = 2$ се получава съседният връх $\overline{\mathbf{x}}'' = (0,2,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. Тъй като $\overline{c}_2 > 0$, $z(\overline{\mathbf{x}}'') > z(\overline{\mathbf{x}}')$ и следователно целевата функция расте по ръба от $\overline{\mathbf{x}}'$ до $\overline{\mathbf{x}}''$.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_3, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}' + t\begin{bmatrix}3\\0\\1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+3t\\0\\t\\0\\2+2t\end{bmatrix}, \qquad t \in [0,\infty).$$

Този ръб е неограничен и тъй като $\overline{c}_3 > 0$, целевата функция расте неограничено върху него.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_4, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}' + t\begin{bmatrix}-7\\0\\0\\1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4-7t\\0\\0\\t\\2-3t\end{bmatrix}, \qquad t \in [0,4/7].$$

Този ръб е ограничен (отсечка) и за $t = 4/7$ се получава съседният връх $\overline{\mathbf{x}}''' = (0,0,0,4/7,2/7)^{\mathrm{T}}$. Тъй като $\overline{c}_4 = 0$, $z(\overline{\mathbf{x}}''') = z(\overline{\mathbf{x}}')$ и следователно целевата функция е постоянна по ръба от $\overline{\mathbf{x}}'$ до $\overline{\mathbf{x}}'''$. Вече установихме, че $\overline{\mathbf{x}}'$ е оптимален връх. Следователно както за $\overline{\mathbf{x}}'''$, така и за всички точки от отсечката, която свързва $\overline{\mathbf{x}}'$ и $\overline{\mathbf{x}}'''$, е изпълнено

$$\min_M z = z(\overline{\mathbf{x}}') = z(\overline{\mathbf{x}}''') = z\Big(\alpha\overline{\mathbf{x}}' + (1-\alpha)\overline{\mathbf{x}}'''\Big) = -2, \qquad \alpha \in [0,1].$$

б) Изроденият връх $\overline{\mathbf{x}}''$ има четири базиса: $\mathbf{B}_1 = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$, $\mathbf{B}_2 = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3]$, $\mathbf{B}_3 = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4]$, $\mathbf{B}_4 = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_5]$.

Базисното представяне на задачата спрямо базиса $\mathbf{B}_1$ е

$$\min z(\mathbf{x}) = 5x_3 - 3x_4 - x_5,$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = 0, \\ & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = 2, \end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5.$$

Следователно относителните оценки са $\overline{c}_3 = 5$, $\overline{c}_4 = -3$, $\overline{c}_5 = -1$, $\overline{c}_0 = 0 = z(\overline{\mathbf{x}}'') > z(\overline{\mathbf{x}}') = -2$ и следователно $\overline{\mathbf{x}}''$ не е оптимален.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_3, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}'' + t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 2 + 2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и е фиктивен, защото само за $t = 0$ се получава допустима точка (именно $\overline{\mathbf{x}}''$).

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_4, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}'' + t \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ 2 - 3t \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

и също е фиктивен.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_5, има представянето

$$\overline{\mathbf{x}}'' + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 2 - t \\ 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 2].$$

Този ръб е ограничен (отсечка) и за $t = 2$ се получава съседният връх $\overline{\mathbf{x}}' = (4, 0, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$. Тъй като $\overline{c}_5 < 0$, $z(\overline{\mathbf{x}}'') > z(\overline{\mathbf{x}}')$ и следователно целевата функция намалява по ръба от $\overline{\mathbf{x}}''$ до $\overline{\mathbf{x}}'$. Този факт напълно съответства на полученото в подточка а).

От това базисно представяне се получи само един от действителните ръбове, излизащи от $\overline{\mathbf{x}}''$. Останалите два действителни ръба се получават от базисните представяния спрямо другите базиси на $\overline{\mathbf{x}}''$.

Базисното представяне на задачата спрямо базиса $\mathbf{B}_2$ е

$$\min z(\mathbf{x}) = -5x_1 - 8x_4 + 9x_5,$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + x_3 + \ \ x_4 - 2x_5 &= 0,\\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad + 5x_4 - 3x_5 &= 2,\\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Следователно относителните оценки са $\overline{c}_1 = -5$, $\overline{c}_4 = -8$, $\overline{c}_5 = 9$.

Ръбовете, съответстващи на небазисните променливи x_1 и x_4, имат съответно представянията

$$\begin{bmatrix} t \\ 2-2t \\ -t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2-5t \\ -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

И двата са фиктивни.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_5, е неограничен (защото $\mathbf{w}_5 < \mathbf{0}$): $\begin{bmatrix} 0 \\ 2+3t \\ 2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$, $t \in [0, \infty)$. Тъй като $\overline{c}_5 > 0$, стойностите на целевата функция растат неограничено по този ръб. Така се получава още един действителен ръб, излизащ от $\overline{\mathbf{x}}''$.

Базисното представяне на задачата спрямо базиса $\mathbf{B}_3$ е

$$\min z(\mathbf{x}) = 3x_1 + 8x_3 - 7x_5,$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + \ \ x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0,\\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 \qquad\quad + 7x_5 &= 2,\\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \ldots, 5. \end{aligned}$$

Следователно относителните оценки са $\bar{c}_1 = 3$, $\bar{c}_3 = 8$, $\bar{c}_5 = -7$.

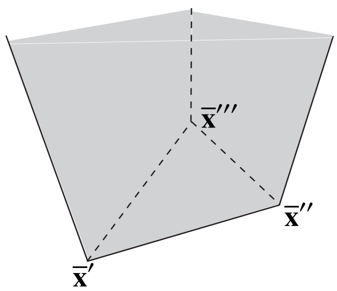
Лесно се проверява, че ръбовете, съответстващи на небазисните променливи x_1 и x_3, са фиктивни.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_5, е ограничен (отсечка)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2-7t \\ 0 \\ 2t \\ t \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 2/7]$$

Тъй като $\bar{c}_5 < 0$, целевата функция намалява по този ръб. За $t = 2/7$ се получава съседният връх $\bar{\mathbf{x}}''' = (0, 0, 0, 4/7, 2/7)^{\mathrm{T}}$.

Трите ръба, излизащи от изродения връх $\bar{\mathbf{x}}''$, са вече получени с помощта на базисите $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$. Затова другите му базиси не ни интересуват. Видът на многостенното канонично множество M е показан на фиг. 1.



Фиг. 1. Множеството M от Пример 1

Задачи

1. Да се приведе дадената задача в базисен вид спрямо базисите на $\bar{\mathbf{x}}'$ и да се провери дали този връх е оптимален. Да се изследва поведението на целевата функция върху ръбовете на допустимото множество, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}'$.

1.1. $z(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \max,$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + x_4 - 2x_5 &= 0, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 2, \qquad \bar{\mathbf{x}}' = (0, 0, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}; \\ x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, 5, & \end{aligned}$$

1.2. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6, \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3, \end{array} \qquad \bar{\mathbf{x}}' = (9, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}};$$

$x_j \geq 0, \;\; j = 1, \dots, 4,$

1.3. $z(\mathbf{x}) = -x_1 + x_2 \to \min,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 3, \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1, \\ x_1 & & & + & 4x_3 & & & + & x_5 & = & 4, \end{array} \qquad \bar{\mathbf{x}}' = (0, 3, 0, 1, 4)^{\mathrm{T}};$$

$x_j \geq 0, \;\; j = 1, \dots, 5,$

1.4. $z(\mathbf{x}) = -5x_1 - 2x_4 + 2x_5 \to \max,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4, \\ -x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 1, \end{array} \qquad \bar{\mathbf{x}}' = (0, 0, 4, 0, 1)^{\mathrm{T}};$$

$x_j \geq 0, \;\; j = 1, \dots, 5,$

1.5. Задача 1.4, но при $z(\mathbf{x}) = x_1 \to \min;$

1.6. Задача 1.4, но при $z(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max;$

1.7. $z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 6x_2 \to \min,$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 6, \\ -3x_1 & + & 7x_2 & & & + & x_4 & = & 61, \end{array} \qquad \bar{\mathbf{x}}' = (6, 0, 0, 79)^{\mathrm{T}}.$$

$x_j \geq 0, \;\; j = 1, \dots, 4,$

Отговори и решения

1.1. Съседни върхове: $\overline{\mathbf{x}}'' = (4, 0, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{x}}''' = (0, 2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ — неоптимални.

1.2. Неограничен ръб $\mathbf{x}_t = (9 + 3t, 3 + t, t, 0)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, $z(\mathbf{x}_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. Ограничен ръб $\mathbf{x}_u = (9 - 3u, 3 - u, 0, u)^{\mathrm{T}}$, $u \in [0, 3]$. Съседен връх $\overline{\mathbf{x}}'' = (0, 0, 0, 3)^{\mathrm{T}}$. Стойностите на целевата функция намаляват при придвижване от $\overline{\mathbf{x}}'$ към $\overline{\mathbf{x}}''$.

1.3. Съседни върхове: $\overline{\mathbf{x}}'' = (1, 5, 0, 0, 3)^{\mathrm{T}}$, $\overline{\mathbf{x}}''' = (0, 3, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Оптимални решения $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}}' + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{x}}'''$, $\lambda \in [0, 1]$ и $z^* = 3$.

1.4. Съседен връх $\overline{\mathbf{x}}'' = (0, 1, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Неограничен оптимален ръб $\mathbf{x}_t = (0, 0, 4, t, 1 + t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, $z^* = 2$. Неограничен ръб $\mathbf{x}_u = (u, 0, 4 + 2u, 0, 1 + u)^{\mathrm{T}}$, $u \geq 0$, $z(\mathbf{x}_u) \xrightarrow[u\to+\infty]{} -\infty$.

1.5. Векторът $\overline{\mathbf{x}}'$ е оптимално решение. Съседно оптимално решение $\overline{\mathbf{x}}'' = (0, 1, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Неограничен ръб $\mathbf{x}_t = (t, 0, 4{+}2t, 0, 1{+}t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, $z(\mathbf{x}_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$. Неограничен оптимален ръб $\mathbf{x}_u = (0, 0, 4, u, 1 + u)$, $u \geq 0$. Общ вид на оптималните решения $\mathbf{x}_{\lambda u} = \lambda\overline{\mathbf{x}}'{+}(1{-}\lambda)\overline{\mathbf{x}}''{+}u\mathbf{p}$, $\lambda \in [0, 1]$, $u \geq 0$, $\mathbf{p} = (0, 0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

1.6. Съседен връх $\overline{\mathbf{x}}'' = (0, 1, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Неограничен ръб $\mathbf{x}_t = (t, 0, 4 + 2t, 0, 1 + t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, $z(\mathbf{x}_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

1.7. Съседен връх $\overline{\mathbf{x}}'' = (0, 2, 0, 47)^{\mathrm{T}}$. Оптимални решения $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\overline{\mathbf{x}}' + (1 - \lambda)\overline{\mathbf{x}}''$, $\lambda \in [0, 1]$ и $z^* = 12$. Неограничен ръб $\mathbf{x}_t = (6 + t, 0, t, 79 + 3t)^{\mathrm{T}}$, $t \geq 0$, $z(\mathbf{x}_t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.