Упражнение 3

Обща и канонична задача на линейното оптимиране. Канонично многостенно множество

1. Обща и канонична задача на ЛО

Произволна задачата на ЛО може да се запише в следния вид:

Търси се минимумът на функцията

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при ограничения (условия)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = s+1, \ldots, m, \tag{3}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, p \quad (p \leq n). \tag{4}$$

Функцията (1) се нарича *целева функция*. Променливите, на които не е наложено условие за неотрицателност, се наричат *свободни променливи*. В случая такива са $x_{p+1}, \ldots, x_n$.

Определение 1. *Допустима точка* на задачата се нарича всяко решение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ на системата (2)–(4).

Определение 2. *Допустимо множество* на задачата се нарича множеството P от всички решения на системата (2)–(4).

P е изпъкнало затворено многостенно множество.

Ако задачата е за търсене на максимум на функцията (1) в множеството (2)–(4), тя е еквивалентна на задачата за търсене на минимум на $-z = \sum\limits_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$ в същото множество. Двете задачи имат едно и също допустимо множество, като търсената максимална стойност на целевата функция се получава чрез умножаване с -1 на намерената минимална стойност на $-z$. Ако има ограничение от вида $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$, то е еквивалентно на $\sum\limits_{j=1}^{n}(-a_{ij})x_j \leq -b_i$.

В случай че $s = 0$ и $p = n$, т. е. когато всички ограничения са равенства и всички променливи са неотрицателни, задачата на линейното оптимиране

$$
\text{(K)} \qquad
\begin{aligned}
\min z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &= b_i, \qquad i = 1, \dots, m, \\
x_j &\geq 0, \qquad j = 1, \dots, n,
\end{aligned}
$$

където $b_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, се нарича *канонична задача* (КЗ). Нека $\mathbf{A}$ е матрицата с елементи a_{ij}, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^{\mathrm{T}}$ е векторът с коефициентите в целевата функция, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ е векторът с неизвестните, а $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^{\mathrm{T}}$ е векторът с десните страни на ограниченията. Тогава каноничната задача на линейното оптимиране има следния вид: $\min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

2. Алгоритъм за свеждане на произволна задача на ЛО към канонична задача на ЛО

Нека е дадена задачата (1)–(4). Всяко ограничение неравенство (2) се свежда към ограничение равенство чрез добавяне на нова неотрицателна допълнителна променлива $x_{n+i} \geq 0$, $i = 1, \dots, s$, в лявата му страна

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1, \dots, s.
$$

Ограничение от тип $\geq$ се превръща директно в равенство (без да се умножава предварително с -1) чрез *изваждане* на допълнителната променлива от лявата му страна. Така броят на променливите се увеличава с s, защото всяко ограничение неравенство води до нова допълнителна променлива.

Ако някоя дясна страна b_i, $i = 1, \dots, m$, е отрицателна, равенството се умножава с -1.

Всяка *свободна променлива* се замества с разликата на две неотрицателни променливи по един от следните два начина:

1. $x_j = x_j^+ - x_j^-$, $x_j^+ \geq 0$, $x_j^- \geq 0$, $j = p + 1, \dots, n$. При този начин броят на променливите се увеличава с $n - p$.

2. $x_j = x_j^+ - \xi$, $x_j^+ \geq 0$, $\xi \geq 0$, $j = p + 1, \dots, n$. При този начин броят на променливите се увеличава с 1 независимо от това колко е $n - p$.

Така от задача (1)–(4) се получава следната задача

$$\text{(5)} \qquad \min\ z = \sum_{j=1}^{p} c_j x_j + \sum_{j=p+1}^{n} c_j (x_j^+ - x_j^-)$$

при ограничения (условия)

$$\text{(6)} \quad \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij}(x_j^+ - x_j^-) + x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1, \dots, s,$$

$$\text{(7)} \quad \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij}(x_j^+ - x_j^-) = b_i, \qquad i = s+1, \dots, m,$$

$$\text{(8)} \quad x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, p,\ x_j^+, x_j^- \geq 0,\ j = p+1, \dots, n, \quad x_{n+i} \geq 0,\ i = 1, \dots, s.$$

Задачите (1)–(4) и (5)–(8) са *еквивалентни*. Това означава, че те едновременно са разрешими или неразрешими (доказва се с допускане на противното). Ако $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{x}_{p+1}^+, \bar{x}_{p+1}^-, \dots, \bar{x}_n^+, \bar{x}_n^-, \bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_{n+s})^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на задача (5)–(8), то $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$ е оптимално решение на (1)–(4), където

$$x_j^* = \bar{x}_j, \quad j = 1, \dots, p, \qquad x_j^* = \bar{x}_j^+ - \bar{x}_j^-, \quad j = p+1, \dots, n.$$

Така на всяка задача (1)–(4) по единствен начин се съпоставя еквивалентна на нея канонична задача (5)–(8).

Пример 1. Да се приведе в каноничен вид задачата

$$\begin{aligned} z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\to \max, \\ 2x_1 - x_2 \qquad\quad &= -3, \\ x_1 \qquad - x_3 &\geq 1, \\ x_1 \qquad + 4x_3 &\leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Свободната променлива се замества с разликата на две неотрицателни променливи $x_2 = x_2^+ - x_2^-$, $x_2^+ \geq 0$, $x_2^- \geq 0$, както в целевата функция, така и в ограниченията. Целевата функция се умножава с -1, а критерият става минимум. Първото ограничение също се умножава с -1 заради отрицателната му дясна страна. Изважда се допълнителна променлива $x_4 \geq 0$ от лявата страна на второто ограничение. Прибавя се допълнителна променлива $x_5 \geq 0$ в лявата страна на третото ограничение. Така второто и третото ограничение се превръщат в равенства. Търсената канонична задача е

$$
\begin{aligned}
\bar{z} = -z = -3x_1 + x_2^+ - x_2^- - 2x_3 \to \min,\\
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
-2x_1 & + & x_2^+ & - & x_2^- & & & & & = & 3,\\
x_1 & & & & & - & x_3 & - & x_4 & = & 1,\\
x_1 & & & & & + & 4x_3 & & + x_5 & = & 4,
\end{array}\\
x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 \ge 0.
\end{aligned}
$$

3. Канонично многостенно множество

Определение 3. Допустимо множество M на канонична задача на линейното оптимиране се нарича *канонично* (*многостенно*) *множество*. С други думи нека $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$, където $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ е матрица $m \times n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m_+$. Ще предполагаме, че $M \ne \emptyset$ и $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$, т. е. между ограниченията няма линейно зависими. Ясно е също така, че $m \le n$.

Определение 4. Нека M е непразно канонично множество и $\mathbf{B}$ е неособена $m{\times}m$ матрица, съставена от m линейно независими стълба на матрицата $\mathbf{A}$. Векторът $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix}$, където $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m_+$, $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-m}$ се нарича *базисно решение* спрямо базис (базисна матрица) $\mathbf{B}$.

За всяко базисно решение е изпълнено $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, но то може да не бъде точка от M, ако има отрицателна(и) координата(и).

Определение 5. Ако $\bar{\mathbf{x}}_B \ge \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{x}}$ се нарича *базисно допустимо решение* (бдр) (защото $\bar{\mathbf{x}}$ тогава е допустима точка).

Теорема 1. Ако $M \ne \emptyset$, следните твърдения са еквивалентни:

а) $\bar{\mathbf{x}}$ е връх на M, т. е. $\bar{\mathbf{x}}$ не е вътрешна точка за нито една отсечка, чиито краища са различни точки от множеството M.

б) $\bar{\mathbf{x}}$ е бдр.

в) $\bar{\mathbf{x}}$ е допустима точка, като на ненулевите (положителните) ѝ координати съответстват линейно независими стълбове на матрицата $\mathbf{A}$.

Забележка. Като се има предвид, че $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$, броят на ненулевите (положителните) координати на един връх $\bar{\mathbf{x}}$ на непразно канонично множеството M не може да бъде по-голям от m.

Теорема 2. Ако $M \ne \emptyset$ е канонично множество, то M има връх.

Определение 6. Нека $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_B \\ \bar{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ е връх на M и $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$. Матрицата $\mathbf{B}$ се нарича *базис* на $\bar{\mathbf{x}}$, а представянето на множеството M във вида $\{\mathbf{x} : \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ — *базисно представяне* спрямо върха $\bar{\mathbf{x}}$ (спрямо базиса $\mathbf{B}$). Тогава $\mathbf{x}_B$ се наричат *базисни координати*, а $\mathbf{x}_N$ — *небазисни координати*.

Определение 7. Един връх $\bar{\mathbf{x}}$ на непразно канонично множество се нарича *неизроден*, ако $\bar{\mathbf{x}}_B > \mathbf{0}$. В противен случай $\bar{\mathbf{x}}$ се нарича *изроден*.

Следствие 1. Всеки неизроден връх $\bar{\mathbf{x}}$ има *единствен базис*, състоящ се от онези m стълба на матрицата $\mathbf{A}$, които съответстват на положителните му координати. Един изроден връх $\bar{\mathbf{x}}$ в общия случай има повече от един базис. Всеки такъв базис включва стълбовете на матрицата $\mathbf{A}$, съответстващи на ненулевите координати на $\bar{\mathbf{x}}$, допълнени до m на брой с някои от другите стълбове на $\mathbf{A}$ по такъв начин, че получената съвкупност от стълбове да бъде линейно независима.

При изроден връх някои от базисните му координати са равни на нула. Прието е те да се наричат *базисни нули*.

При направените предположения $M \neq \emptyset$, $\operatorname{rank}\mathbf{A} = m$, от всеки връх на M излизат точно $n - m$ ръба на M. Ръбовете, излизащи от върха $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, се представят във вида

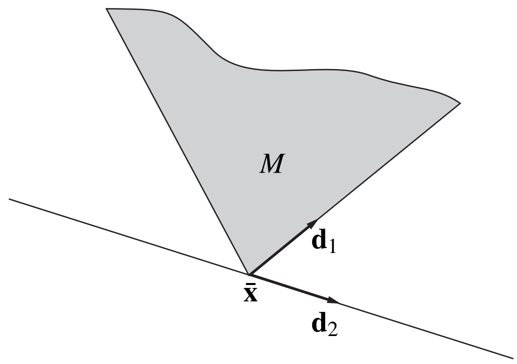
$$(9) \qquad \{\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_j,\ t \geq 0\} \subset M, \qquad \mathbf{d}_j = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_j \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}, \quad j \in N,$$

където N е множеството от индексите на небазисните променливи и $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^{n-m}$ е j-тият единичен вектор.

Ако $\bar{\mathbf{x}}$ е неизроден връх, той има единствен базис $\mathbf{B}$. Това позволява еднозначно да се определят $n - m$-те посоки на ръбовете, излизащи от $\bar{\mathbf{x}}$, като на небазисната променлива x_j, $j \in N$, се съпостави векторът $\mathbf{d}_j$ от (9). При движение по посока на вектора $\mathbf{d}_j$ небазисната променлива x_j, $j \in N$, нараства от 0 до някакво число $\bar{t} > 0$. За построяването на вектора $\mathbf{d}_j$ се използва стълбът от коефициенти $\mathbf{w}_j = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}]_j$ в базисното представяне $\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ спрямо $\bar{\mathbf{x}}$.

Ако $\bar{\mathbf{x}}$ е изроден връх, възможно е числото $\bar{t} = 0$. Тогава можем да кажем, че освен действителни посоки от $\bar{\mathbf{x}}$ излизат и фиктивни, т. е. такива, за които $\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_j \notin M$ за $t > 0$. Този факт геометрично е представен на фиг. 1. Там $\mathbf{d}_1$ е действителна посока, а $\mathbf{d}_2$ — фиктивна.

За да определим действителните посоки $\mathbf{d}_j$, $j = 1, \ldots, n - m$, на изроден връх $\bar{\mathbf{x}}$, се налага да се изследват посоките, които се получават от всички



Фиг. 1. Действителна и фиктивна посоки от изроден връх

базисни представяния на $\bar{\mathbf{x}}$.

Ръбовете на допустимото множество могат да бъдат ограничени или неограничени. Ако един ръб е ограничен, това е отсечка, която свързва два върха на допустимото множество. Разпознаването на това дали един ръб на допустимото множество е ограничен или неограничен става лесно. Ако $\mathbf{d}_j \geq \mathbf{0}$, тогава $\bar{\mathbf{x}} + t\mathbf{d}_j \geq \mathbf{0}$ за всяко $t \geq 0$. Но $\mathbf{d}_j \geq \mathbf{0}$ точно когато $\mathbf{w}_j \leq \mathbf{0}$. В последния случай векторът $\mathbf{d}_j$ е *посока* за допустимото множество.

Пример 2. Да се определи кои от векторите

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^1 &= (4, 0, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}},\\
\mathbf{x}^2 &= \left(1, 0, 0, \tfrac{6}{5}, \tfrac{1}{5}\right)^{\mathrm{T}},\\
\mathbf{x}^3 &= (0, 1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}},\\
\mathbf{x}^4 &= (0, 2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

са върхове на множеството

$$M : \left|\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2\\
-x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2\\
x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5.
\end{array}\right.$$

Решение. За да се установи кои от дадените вектори са върхове на даденото канонично многостенно множество M, се използва Теорема 1. Чрез непосредствена проверка се установява, че и четирите точки са допустими. Тъй като матрицата $\mathbf{A}$ в този случай има вида

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

очевидно е, че $\operatorname{rank}\mathbf{A} = 2$ (има неособена квадратна подматрица от ред 2, например тази, получена от първите два стълба на $\mathbf{A}$). Тъй като векторът $\mathbf{x}^2$ има три ненулеви (положителни) координати, той не може да бъде връх, защото трите стълба $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$ на матрицата $\mathbf{A}$ са линейно зависими.

Векторът $\mathbf{x}^1$ има две ненулеви координати и съответните стълбове $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ на матрицата $\mathbf{A}$ са линейно независими. Следователно $\mathbf{x}^1$ е неизроден връх с базис $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{x}_B^1 = [x_1, x_5]$.

Векторът $\mathbf{x}^3$ има две ненулеви координати и съответните стълбове $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ на матрицата $\mathbf{A}$ са линейно зависими. Следователно $\mathbf{x}^3$ не е връх.

Векторът $\mathbf{x}^4$ има една ненулева координата и съответният ѝ стълб от матрицата $\mathbf{A}$ е $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Следователно $\mathbf{x}^4$ е изроден връх. Лесно се проверява, че $\mathbf{x}^4$ има три базиса: $\mathbf{B}_1 = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$, $\mathbf{B}_2 = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4]$, $\mathbf{B}_3 = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_5]$.

Пример 3. Да се намерят всички върхове и ръбовете, излизащи от тях, на множеството

$$M: \left|\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ -x_1 & + & 3x_2 & & & & & = & 0 \\ \multicolumn{9}{l}{x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.} \end{array}\right. \tag{10}$$

Решение. Всички възможни базиси (съответните подматрици са неособени) са: $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$, $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3]$, $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4]$, $[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3]$, $[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4]$.

Последователно се построяват съответните базисни представяния на множеството M спрямо изброените по-горе базиси.

а) За построяването на базисното представяне на M спрямо базиса $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$ системата (10) се решава спрямо променливите x_1 и x_2, като се използва методът на Гаус-Жордан. Най-напред се преписва първото уравнение, а на мястото на второто се записва сборът на двете уравнения. При тази операция променливата x_1 е елиминирана от второто уравнение, а в първото уравнение коефициентът пред нея е $+1$

$$M: \left|\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ & & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ \multicolumn{9}{l}{x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4,} \end{array}\right.$$

т. е. пред променливата x_1 е първият стълб на единичната матрица от ред 2. Така системата е решена спрямо променливата x_1. След това системата се решава и спрямо другата базисна променлива x_2. За целта второто уравнение се разделя на 2 и се прибавя към първото уравнение. Така пред променливата x_2 се получава вторият стълб на единичната матрица. Окончателно

$$M:\left|\begin{array}{l} x_1 \qquad - 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ \quad x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = 3 \\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \dots, 4. \end{array}\right. \tag{11}$$

Тъй като десните страни в полученото представяне са неотрицателни, намерен е връх (бдр) на допустимото множество, като на мястото на небазисните променливи x_3 и x_4 се слагат нули. Веднага се получава $x_1 = 9$ и $x_2 = 3$. Намерен е върхът $\mathbf{x}^1 = (9, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

От $\mathbf{x}^1$ излизат два ръба, съответстващи на небазисните променливи x_3 и x_4. Най-напред да разгледаме стълба пред x_3 в представянето (11). От него се получава векторът $\mathbf{d}_3^1 = (3, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ по следния начин:

- коефициентът -3 пред x_3 в първото уравнение се записва с обратен знак на мястото на x_1 (базисната променлива в първото уравнение);
- коефициентът -1 пред x_3 във второто уравнение се записва с обратен знак на мястото на x_2 (базисната променлива във второто уравнение);
- останалите две координати на $\mathbf{d}_3^1$ са тези на единичния вектор с размерност $n - m = 4 - 2 = 2$, в който единицата е точно пред небазисната променлива x_3, с чийто стълб работим.

Координатите на точките от ръба, излизащ от $\mathbf{x}^1$, се получават по формулата

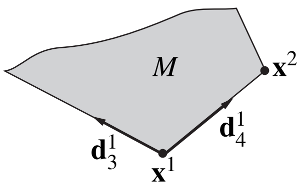
$$\mathbf{x}^1 + t\mathbf{d}_3^1 = \begin{bmatrix} 9 + 3t \\ 3 + \ \ t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

за всяко $t \geq 0$. Така ръбът, излизащ от $\mathbf{x}^1$ и съответстващ на небазисната променлива x_3, е неограничен.

Аналогично се намира векторът $\mathbf{d}_4^1 = (-3, -1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, а след това и представянето на съответния ръб

$$\mathbf{x}^1 + t\mathbf{d}_4^1 = \begin{bmatrix} 9-3t \\ 3-\ \ t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

при $0 \leq t \leq 3$. Полученият ръб е ограничен. Геометрично той представлява отсечка. Единият край на отсечката (при $t = 0$) е върхът $\mathbf{x}^1$. При $t = 3$ се получава другият край на отсечката, който е съседен на $\mathbf{x}^1$ връх $\mathbf{x}^2 = (0, 0, 0, 3)^\mathrm{T}$. Базисите на два съседни върха се различават само на едно място. Една от базисните променливи на $\mathbf{x}^1$ (в този случай или x_1, или x_2) е небазисна за $\mathbf{x}^2$, а една от небазисните променливи на $\mathbf{x}^1$ (x_4) е базисна за $\mathbf{x}^2$.



Фиг. 2. Задача 3, а)

б) За получаването на базисното представяне на даденото канонично множество спрямо базиса $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3]$ системата (10) се решава спрямо неизвестните x_1 и x_3, като се използва методът на Гаус-Жордан. Така се стига до

$$M : \left| \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 \qquad\qquad\quad = \ \ 0 \\ \quad\ - \ \ x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \ldots, 4. \end{array} \right.$$

В този случай базисното решение $(0, 0, -3, 0)^\mathrm{T} \ngeq \mathbf{0}$ не е допустимо и следователно не е връх на множеството M.

в) За получаването на базисното представяне на даденото канонично множество спрямо базиса $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4]$ системата (10) се решава спрямо неизвестните x_1 и x_4, като се използва методът на Гаус-Жордан

$$M : \left| \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 \qquad\qquad\quad = 0 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_j \geq 0,\ \ j = 1, \ldots, 4. \end{array} \right.$$

След анулиране на небазисните променливи x_2 и x_3 се стига до бдр (връх) $\mathbf{x}^2 = (0, 0, 0, 3)^\mathrm{T}$. Този връх е изроден, защото в случая x_1 е базисна нула.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_2, е

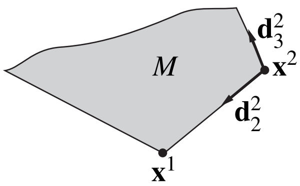
$$\mathbf{x}^2 + t\mathbf{d}_2^2 = \mathbf{x}^2 + t\begin{bmatrix}3\\1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3t\\t\\0\\3-t\end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

за $0 \leq t \leq 3$. При $t = 3$ се попада в съседния връх $\mathbf{x}^1$.

Ръбът, съответстващ на небазисната променлива x_3, е

$$\mathbf{x}^2 + t\mathbf{d}_3^2 = \mathbf{x}^2 + t\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\t\\3+t\end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

за всяко $t \geq 0$. Следователно този ръб е неограничен (за него $\mathbf{w}_3 = (0, -1)^{\mathrm{T}} \leq \mathbf{0}$).



Фиг. 3. Задача 3, в)

г) За получаването на базисното представяне на даденото канонично множество спрямо базиса $[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3]$ системата (10) се решава спрямо неизвестните x_2 и x_3, като се използва методът на Гаус-Жордан

$$M : \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \qquad\qquad = \ 0 \\ -\frac{1}{3}x_1 \qquad + x_3 - x_4 = -3 \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

Базисното решение $(0, 0, -3, 0)^{\mathrm{T}}$ не е допустимо и следователно не е връх.

д) За получаването на базисното представяне на даденото канонично множество спрямо базиса $[\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4]$ системата (10) се решава спрямо неизвестните x_2 и x_4, като се използва метода на Гаус-Жордан

$$M : \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{3}x_1 + x_2 \qquad\qquad = 0 \\ \ \ \frac{1}{3}x_1 \qquad - x_3 + x_4 = 3 \\ x_j \geq 0, \ \ j = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

Базисното решение $(0,0,0,3)^{\mathrm{T}}$ е допустимо и следователно е връх. Това е изроденият връх $\mathbf{x}^2$, получен в подточка в), но сега базисната му нула е x_2. Следователно $\mathbf{x}^2$ има два базиса — $[\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_4]$ и $[\mathbf{A}_2,\mathbf{A}_4]$. Посоките на ръбовете, излизащи от $\mathbf{x}^2$, в този случай са $\mathbf{d}_1^2 = \left(1,\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{d}_3^2 = (0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$. Първата не е съществено различна от получената в подточка в) $\mathbf{d}_2^2$, защото $3\mathbf{d}_1^2 = \mathbf{d}_2^2$, а втората съвпада с вече определената в подточка в).

В този пример изроденият връх $\mathbf{x}^2$ няма фиктивни посоки.

Задачи

1. Да се приведат в каноничен вид следните задачи:

1.1.
$$\begin{aligned} &x_1 - x_5 \to \min,\\ &-4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \le 8,\\ &x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \ge 1,\\ &x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 3; \end{aligned}$$

1.2.
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + \cdots + x_n \to \max,\\ &x_1 + x_2 \le 1,\\ &x_2 + x_3 \le 1,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &x_{n-1} + x_n \le 1; \end{aligned}$$

1.3.
$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,\\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,\dots,m,\\ &0 \le x_j \le d_j, \quad j = 1,\dots,n; \end{aligned}$$

1.4.
$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,\\ &b_i \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le d_i, \quad i = 1,\dots,m. \end{aligned}$$

2. Симетричната задача на ЛО

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i = 1,\dots,m,\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n\right\}$$

се привежда в каноничен вид след въвеждане на допълнителните променливи $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$. Получава се каноничната задача

$$\min\left\{-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1,\dots,m,\right.$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, n+m \Big\}.$$

Нека $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{y} = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})^{\mathrm{T}}$. Да се докаже, че ако $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)^{\mathrm{T}}$ е решение на каноничната задача, то $-\mathbf{x}^*$ е решение на изходната симетрична задача.

3. Общата задача на ЛО (1)–(4) се свежда към следната канонична задача

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p} c_j x_j + \sum_{j=p+1}^{n} c_j (x'_j - \xi) \to \min,\\
&\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij} (x'_j - \xi) + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, s,\\
&\sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j + \sum_{j=p+1}^{n} a_{ij} (x'_j - \xi) \qquad\quad = b_i, \quad i = s+1, \dots, m,\\
&\xi \geq 0, \ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, p, \ x'_k \geq 0, \ k = p+1, \dots, n,\\
&\qquad\quad x_{n+i} \geq 0, \ i = 1, \dots, s.
\end{aligned}$$

Да се докаже, че ако $\widetilde{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{x}'_{p+1}, \dots, \bar{x}'_n, \bar{\xi}, \bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_{n+m})^{\mathrm{T}}$ е решение на каноничната задача, то $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{x}'_{p+1} - \bar{\xi}, \dots, \bar{x}'_n - \bar{\xi})^{\mathrm{T}}$ е решение на изходната задача (1)–(4).

4. Като се използва Теорема 1, да се провери кои от зададените вектори са върхове на съответните канонични множества и да се посочат изродените между тях.

4.1. $\left|\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 3 \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 4, \end{aligned}\right.$ $\quad \bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = \left(\frac{14}{13}, 0, \frac{3}{13}, 0\right)^{\mathrm{T}}$;

4.2. $\left|\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, 4, \end{aligned}\right.$ $\quad \bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (1, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$;

4.3. $\left|\begin{aligned} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \end{aligned}\right.$ $\quad \bar{\mathbf{x}} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$;

4.4. $\left|\begin{aligned} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \end{aligned}\right.$ $\quad \bar{\mathbf{x}} = (0, 0)^{\mathrm{T}}$;

4.5. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & 9 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & & & + & x_4 & & & = & 31 \\ 3x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 21 \\ \multicolumn{11}{l}{x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5,} \end{array}\right.$ $\quad$ $\bar{\mathbf{x}} = (4, 0, 17, 23, 9)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (3, 5, 0, 0, 17)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{z}} = (0, 0, 9, 31, 21)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{u}} = (1, 1, 8, 24, 19)^{\mathrm{T}}$;

4.6. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & & + & x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 12 \\ \multicolumn{11}{l}{x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5,} \end{array}\right.$ $\quad$ $\bar{\mathbf{x}} = (0, 12, 0, 12, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (5, 9, 2, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{z}} = (4, 0, 4, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{u}} = (6, 18, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{v}} = (0, 0, 3, 9, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{w}} = (0, 0, 0, 0, 12)^{\mathrm{T}}$.

5. Да се намерят всички базиси на върховете на дадените множества и съответстващия им базисен вид на системата уравнения:

5.1. $\left|\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{array}\right.$ $\quad$ $\bar{\mathbf{x}} = (0, \frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (\frac{1}{3}, 0)^{\mathrm{T}}$;

5.2. $\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{array}\right.$ $\quad$ $\bar{\mathbf{x}} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$;

5.3. $\left|\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ \multicolumn{7}{l}{x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3,} \end{array}\right.$ $\quad$ $\bar{\mathbf{x}} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$;

5.4. $\left|\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ \multicolumn{7}{l}{x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3,} \end{array}\right.$ $\quad$ $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$;

5.5. По условието на зад. 4.1;

5.6. По условието на зад. 4.2.

6. Да се намерят върховете, като се използват дадените им базиси:

6.1. $\left|\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{array}\right.$ $\quad$ $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [x_2]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [x_1]$;

6.2. $\left|\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & & & = & 11 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & - & 3x_6 & = & -2 \\ \multicolumn{13}{l}{x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 6,} \end{array}\right.$ $\quad$ $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [x_1, x_3]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [x_2, x_3]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{z}}} = [x_3, x_4]$;

6.3. $\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 4, \end{array}\right.$ $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [x_1, x_2, x_3]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [x_2, x_3, x_4]$;

6.4. $\left|\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\ \quad - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ \quad - 4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, 6, \end{array}\right.$ $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [x_1, x_4, x_6]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [x_1, x_3, x_6]$, $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{z}}} = [x_2, x_3, x_6]$.

7. Да се докаже, че $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\} = -\max\{-f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\}$ за произволна функция $f(\mathbf{x})$ и произволно множество Q.

8. Да се докаже, че ако $\widetilde{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+m})^{\mathrm{T}}$ с координати $\bar{x}_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, и $\bar{x}_j = 0$, $j = n+1, \dots, n+m$, е връх на множеството

$$\widetilde{M} : \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, & i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n+m, \end{cases}$$

то $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ е връх на множеството

$$M : \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Отговори и решения

4.1. $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ са неизродени върхове.

4.2. $\bar{\mathbf{x}}$ е изроден връх, $\bar{\mathbf{y}}$ е неизроден връх.

4.3. $\bar{\mathbf{x}}$ е неизроден връх.

4.4. $\bar{\mathbf{x}}$ е изроден връх.

4.5. $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ не са върхове; $\bar{\mathbf{y}}$, $\bar{\mathbf{z}}$ са неизродени върхове.

4.6. $\bar{\mathbf{y}}$ не е връх; $\bar{\mathbf{w}}$ е изроден връх; останалите са неизродени върхове.

5.1. $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_2]$: $\frac{3}{2}x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$; $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [\mathbf{A}_1]$: $x_1 + \frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{3}$.

5.2. $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$: $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

5.3.

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcl} & & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & = & \frac{1}{2} \\ x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & & = & \frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & = & 0. \end{array} \right.$$

5.4. $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$ и $\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3]$: $x_1 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$.

5.5.

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} \frac{5}{7}x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 \\ \frac{13}{14}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} & - & \frac{5}{13}x_2 & + & x_3 & - & \frac{10}{13}x_4 & = & \frac{3}{13} \\ x_1 & + & \frac{7}{13}x_2 & & & + & \frac{14}{13}x_4 & = & \frac{14}{13}. \end{array} \right.$$

5.6.

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 0, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & & & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{x}}} = [\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & & & + & x_4 & = & 1 \\ -x_1 & & & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{B}_{\bar{\mathbf{y}}} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] : \quad \left| \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & & & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1. \end{array} \right.$$

6.1. $\bar{\mathbf{x}} = (0, 2)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$.

6.2. $\bar{\mathbf{x}} = (3, 0, 5, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (0, 3, 8, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{z}} = (0, 0, 2, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$.

6.3. $\bar{\mathbf{x}} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = \left(0, \frac{15}{7}, \frac{25}{7}, \frac{15}{7}\right)^{\mathrm{T}}$.

6.4. $\bar{\mathbf{x}} = (7, 0, 0, 12, 0, 10)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (10, 0, 3, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{z}} = (0, 4, 5, 0, 0, 11)^{\mathrm{T}}$.

7. Ако $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\} = f(\mathbf{x}^*)$ за всяко $\mathbf{x} \in Q$, тогава $-f(\mathbf{x}) \leq -f(\mathbf{x}^*)$ за всяко $\mathbf{x} \in Q$, т. е. $\max\{-f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in Q\} = -f(\mathbf{x}^*)$; аналогично е и доказателството в обратната посока.