Упражнение 2

Двумерна задача на линейното оптимиране. Геометричен метод за решаване

Задачата на линейното оптимиране има просто геометрично тълкуване в двумерното пространство. При $n = 2$ тя има вида

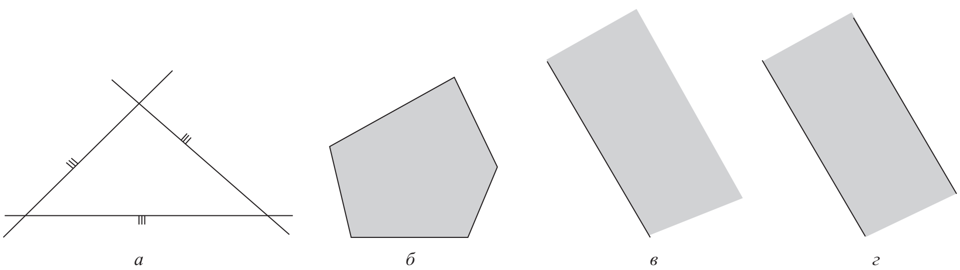
$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max\,(\min), \tag{1}$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2}$$

Ако има условия за неотрицателност на x_1 и x_2, те са включени в (2).

Нека в равнината е фиксирана координатна система x_1Ox_2. Допустимото множество P на задачата е сечението на полуравнините (2). То е изпъкнало, затворено многоъгълно множество и може да бъде празно (системата (2) е несъвместима, фиг. 1*а*), ограничено (изпъкнал многоъгълник, фиг. 1*б*) и неограничено (фиг. 1*в*, *г*, фиг. 2). Когато P е ограничено, контурът му се състои само от отсечки (ограничени ръбове), а когато е неограничено, той съдържа още и лъчи или прави (неограничени ръбове на P).

Ако $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$ и Oc е директрисата на вектора $\mathbf{c}$, разглеждана като числова ос с нула в точката O, положителна посока посоката на вектора $\mathbf{c}$ и единична отсечка за измерване, равна на тази в координатната система x_1Ox_2, то $z = \mathbf{cx} = \|\mathbf{c}\|\|\mathbf{x}\| \cos \sphericalangle(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{c}\|\lambda_{\mathbf{x}'}$, където $\mathbf{x}'$ е ортогоналната проекция на $\mathbf{x}$ върху оста Oc, а $\lambda_{\mathbf{x}'}$ е алгебричната мярка на тази проекция, т. е. $\lambda_{\mathbf{x}'}$ е реалното число, което съответства на точката $\mathbf{x}'$, разглеждана като точка от оста Oc. Тук и навсякъде по-нататък дадена точка и



Фиг. 1. Примери на двумерни допустими множества:
а) празно допустимо множество, б) ограничено допустимо множество,
в) и г) неограничени допустими множества без върхове

нейният радиус-вектор се означават по един и същи начин. Освен това всички вектори се разглеждат като вектор-стълбове. В повечето случаи векторите ще бъдат писани като вектор-редове, последвани от знак за транспониране (за икономия на място).

Задача (1)–(2) може да се изкаже геометрично така: търси се точка $\mathbf{x} \in P$, чиято проекция $\mathbf{x}'$ върху оста Oc има най-голяма (най-малка) алгебрична мярка $\lambda_{\mathbf{x}'}$. Задачата може да се реши така:

1. Построява се допустимото множество P на задачата. Ако $P = \emptyset$, задачата няма решение.

2. Построяват се векторът $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$ и директрисата му Oc. Проектира се множеството P върху оста Oc. Проекцията P' на P е отсечка (ако P е ограничено), лъч или права.

3. Определят се точките, чиито проекции имат максимална (минимална) алгебрична мярка. Те са решение на задачата.

   - Ако P' е отсечка, това са точките, чиито проекции съвпадат с втория (първия) край на отсечката. Тогава задачата има решение при търсене както на максимум, така и на минимум.
   - Ако P' е лъч, еднопосочен (противоположен) на вектора $\mathbf{c}$, алгебричните мерки на проекциите растат (намаляват) неограничено в P и задачата за търсене на максимум (минимум) няма решение (фиг. 2). Точките, чиито проекции съвпадат с началната точка на лъча, имат най-малка (най-голяма) алгебрична мярка на проекцията си и са решение на задачата за минимум (максимум).
   - Ако P' е права, алгебричните мерки на проекциите растат и намаляват неограничено отгоре и отдолу в P' и задачата няма решение при търсене и на максимум, и на минимум.

В общия случай задачата на линейното оптимиране има вида

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min\,(\max)$$

при ограничения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \lesseqqgtr b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p \ (p \leq n).$$

Тук знакът $\lesseqqgtr$ означава някой от знаците $\le$, $\ge$ или $=$. Тази задача може да бъде сведена до двумерната задача (1)–(2) и да бъде решена геометрично, ако сред ограниченията ѝ има r линейно независими уравнения и $n - r \le 2$ (вж. пример 1).

Пример 1. Да се реши геометрично задачата

$$z = x_2 - x_3 + x_4 \to \max\,(\min), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &\le 4, \\ 3x_2 - x_3 - x_4 &= -3, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ x_3 \ge 0,\ x_4 &\ge 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Решение. Тук $n = 4$ и $r = 2$, което позволява да изразим две от променливите чрез другите две и така да сведем задачата до двумерния случай:

$$\begin{aligned} x_4 &= -x_1 + 2x_2 + 2, \\ x_3 &= x_1 + x_2 + 1. \end{aligned} \tag{5}$$

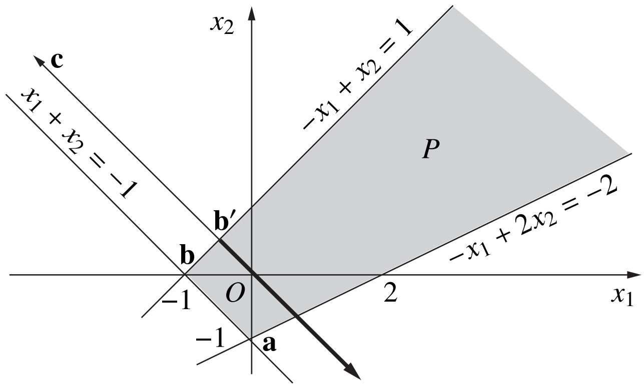
Заместваме x_3, x_4 в (3), (4) и получаваме двумерната задача

$$\bar{z} = -2x_1 + 2x_2 + 1 \to \max\,(\min),$$

$$P : \left| \begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1 + x_2 &\ge -1 \\ -x_1 + 2x_2 &\ge -2. \end{aligned} \right.$$

Допустимото множество на задачата е дадено на фиг. 2. То има два върха $\mathbf{a} = (0, -1)^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{b} = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$. Константата в целевата функция е без значение при търсенето на точките, в които функцията достига максимум или минимум. Тя се взема предвид само при пресмятане на стойността на функцията след намирането на тези точки.

Построяваме вектора $\mathbf{c} = (-2, 2)^{\mathrm{T}}$ и оста Oc и проектираме множеството P върху нея (фиг. 2). Множеството от проекциите на точките от P е лъч с начало точката $\mathbf{b}'$. На фиг. 2 той е начертан по-плътно. Точката $\mathbf{b}'$ е проекция на върха $\mathbf{b}$ и на всички точки от неограничения ръб, излизащ от $\mathbf{b}$. Тъй като $\mathbf{b}'$ има най-голяма алгебрична мярка (Oc е числова ос), то точките от този неограничен ръб са оптимални решения на задачата при търсене на максимум. В частност оптимално решение е върхът $\mathbf{b} = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$. Общият вид на решенията е $\bar{\mathbf{x}}_\lambda = \mathbf{b} + \lambda\mathbf{p} = (\lambda - 1, \lambda)^{\mathrm{T}}$, където $\mathbf{p} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ е направляващ вектор на ръба и $\lambda \ge 0$, т. е. двумерната задача има безбройно много решения



Фиг. 2

$\overline{\mathbf{x}}_\lambda$ и $\overline{z}^* = 3$. Изходната задача има също безбройно много решения $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda - 1, \lambda, 2\lambda, 3 + \lambda)^\mathrm{T}$, $\lambda \geq 0$, където последните две координати са пресметнати от (5).

При търсене на минимум задачата няма решение: алгебричните мерки намаляват неограничено, следователно целевата функция е неограничена отдолу в P ($\underline{z}^* = -\infty$).

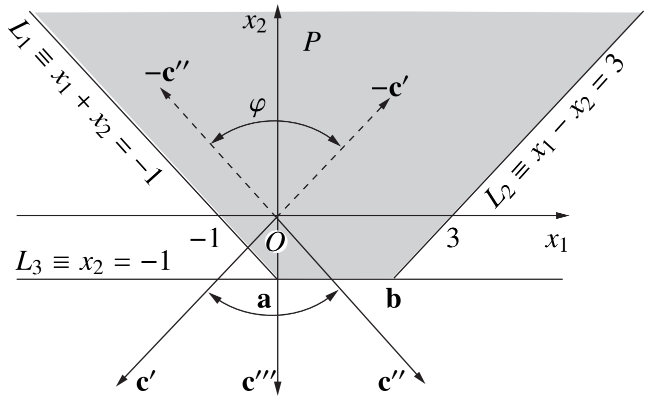
Пример 2. Да се изследва при какви стойности на ъгъла между оста Ox_1 и вектора $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^\mathrm{T}$ задачата за намиране на максимум (минимум) на функцията $z = c_1x_1 + c_2x_2$ в множеството

$$P : \left| \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \geq & -1 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & & x_2 & \geq & -1 \end{array} \right.$$

има оптимално решение.

Решение. Множеството P (фиг. 3) е неограничено с върхове $\mathbf{a} = (0, -1)^\mathrm{T}$ и $\mathbf{b} = (2, -1)^\mathrm{T}$. Неограничени ръбове на P са лъчите съответно с начало точките $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Ако векторът $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^\mathrm{T}$ сключва остър ъгъл с някой от неограничените ръбове, алгебричните мерки на проекциите ще растат неограничено, т. е. z ще бъде неограничена отгоре в множеството P. На фиг. 3 са дадени двете гранични положения за вектора $\mathbf{c}$, при които задачата има решение: при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'$ имаме $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}') = \frac{5}{4}\pi$, а при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}''$ съответно $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}'') = \frac{7}{4}\pi$. Векторите $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$ са перпендикулярни съответно на правите L_1, L_2 и сочат навън от множеството P.

Задачата за максимум има оптимално решение за $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}') \in \left[\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right]$. При $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'$ ($c_1 = c_2 < 0$) оптимални решения са всички точки $\mathbf{x}_\lambda = (-\lambda, \lambda - 1)^\mathrm{T}$, $\lambda \geq 0$, от лъча с начало точката $\mathbf{a}$ и направляващ вектор $(-1, 1)^\mathrm{T}$ и



Фиг. 3

$z^* = -c_2$. При $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}''$ ($c_1 = -c_2 > 0$) оптимални решения са всички точки $\mathbf{x}_\lambda = (2+\lambda, \lambda-1)^\mathrm{T}$, $\lambda \geq 0$, от лъча с начало точката $\mathbf{b}$ и направляващ вектор $(1,1)^\mathrm{T}$ и $z^* = 3c_1$. При $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'''$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$) решения са всички точки $\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b} = (2-2\lambda, -1)^\mathrm{T}$ на отсечката $\mathbf{ab}$ и $z^* = -c_2$. Когато $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}) \in \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, оптимално решение е само върхът $\mathbf{a}$. Когато $\sphericalangle(Ox_1, \mathbf{c}) \in \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$, решение е само върхът $\mathbf{b}$.

Аналогични разсъждения показват, че при търсене на минимум трябва да се вземат вектори, перпендикулярни на неограничените ръбове, но сочещи навътре в множеството P — в нашия случай това са векторите $-\mathbf{c}'$ и $-\mathbf{c}''$, начертани на фиг. 3 с пунктир. Задачата за минимум има оптимално решение при $\sphericalangle(Ox_1, c) \in \left[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right]$.

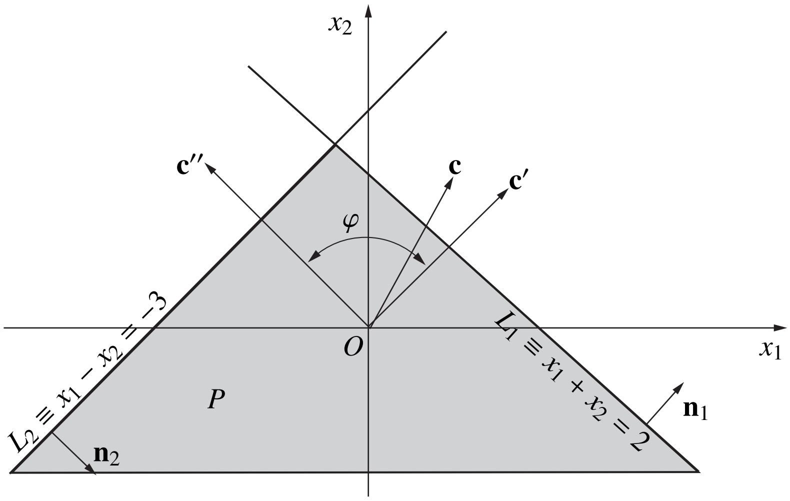
Пример 3. За кои стойности на параметъра λ задачата

$$z = \lambda x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$P : \left| \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & - & x_2 & \geq & -3. \end{array} \right.$$

има оптимално решение?

Решение. Множеството P е дадено на фиг. 4. Построяваме векторите $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$, съответно перпендикулярни на неограничените ръбове и сочещи навън от множеството P. Задачата има оптимално решение, когато векторът $\mathbf{c} = (\lambda, 2)^\mathrm{T}$ се мени от $\mathbf{c}'$ до $\mathbf{c}''$ в ъгъла φ. Векторът $\mathbf{c}'$ е еднопосочен с нормалния вектор $\mathbf{n}_1 = (1,1)^\mathrm{T}$ на правата L_1 и при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}'$ ще имаме $\mathbf{c}' = k\mathbf{n}_1$, $k > 0$. Векторът $\mathbf{c}''$ е противоположен на нормалния вектор $\mathbf{n}_2 = (1,-1)^\mathrm{T}$ на правата L_2 и при $\mathbf{c} \equiv \mathbf{c}''$ получаваме $\mathbf{c}'' = -k\mathbf{n}_2$, $k > 0$, откъдето $\mathbf{c}'' = (-2, 2)^\mathrm{T}$. Следователно задачата има оптимално решение за $-2 \leq \lambda \leq 2$.



Фиг. 4

Задачи

1. Да се решат геометрично следващите задачи за намиране на максимум и минимум на функцията z. Да се намерят всички оптимални решения.

1.1.
$$\begin{array}{l} z = 2x_1 + x_2, \\ \begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12, \\ 2x_1 & - & x_2 & \leq & 6, \end{array} \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{array}$$

1.2.
$$\begin{array}{l} z = x_2, \\ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \geq & 1, \\ 3x_1 & & & \geq & -6, \\ 2x_1 & - & x_2 & \leq & 4, \\ & & x_2 & \geq & 0; \end{array} \end{array}$$

1.3.
$$\begin{array}{l} z = 3(x_2 - x_1), \\ \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & \leq & 0, \\ x_1 & - & x_2 & \geq & -1, \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 1; \end{array} \end{array}$$

1.4.
$$\begin{array}{l} z = x_1, \\ \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & \leq & 0, \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\ x_1 & + & x_2 & \geq & 1; \end{array} \end{array}$$

1.5.
$$\begin{array}{l} z = x_1 - x_2 + x_3, \\ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & & & & & \geq & 4, \\ x_1 & & & & & - & x_4 & = & 4, \\ & & x_2 & + & x_3 & & & = & 1, \\ x_1 & & & & & + & x_4 & \leq & 2, \end{array} \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{array}$$

1.6.
$$\begin{array}{l} z = x_1 + 2x_2 - x_3, \\ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5, \\ x_1 & & & + & 3x_3 & \geq & 3, \\ -4x_1 & & & + & x_3 & \leq & 4, \end{array} \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \end{array}$$

1.7. $z = 2x_1 - 2x_2,$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1, \\ x_1 - x_2 &\le 1; \end{aligned}$$

1.8. $z = x_1 - x_2 + x_3,$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= -2, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, 4; \end{aligned}$$

1.9. $z = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n,$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n &= n, \\ x_2 + x_3 + \dots + x_n &= n - 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &= 3, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

2. Да се определят границите на изменение на ъгъла α, който трябва да сключва векторът $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$ с абсцисната ос Ox_1, за да има функцията $z = c_1x_1 + c_2x_2$ максимум (минимум) в дадените по-долу множества. Да се определи общият вид на всички оптимални решения при търсене на максимум в зависимост от α.

2.1. $\left| \begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 0 \\ x_1 &\le 0 \\ x_2 &\le 1; \end{aligned} \right.$ **2.2.** $\left| \begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 1 \\ x_1 &\le 1 \\ x_2 &\ge -1; \end{aligned} \right.$ **2.3.** $\left| \begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 1 \\ &0 \le x_2 \le 1; \end{aligned} \right.$

2.4. $\left| \begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 0 \\ x_1 - x_2 &\ge 0; \end{aligned} \right.$ **2.5.** $\left| \begin{aligned} x_1 - x_2 &\ge 0 \\ x_1 + x_2 &\ge 1 \\ x_2 &\ge 0; \end{aligned} \right.$ **2.6.** $\left| \begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_2 &\ge 1. \end{aligned} \right.$

3. За дадените множества P и функцията $z = c_1x_1 + c_2x_2$ да се определят:

а) границите на изменение на ъгъла α между абсцисната ос Ox_1 и вектора $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$, за който z е неограничена едновременно отгоре и отдолу в P;

б) c_1 и c_2 така, че z да достига максимума си в два върха на P; да се намери общия вид на оптималните решения.

3.1. $P:\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4 \\ -x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$

3.2. $P:\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &\le -2 \\ -x_1 - x_2 &\le 4 \\ x_1 - 2x_2 &\le -4. \end{aligned}$

4. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които следващите задачи имат оптимално решение. В задачи 4.4 и 4.6 да се определи при кои стойности на a множеството, определено от ограниченията, е празно.

4.1. $z = ax_1 - 2x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 3,\\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 0,\\ x_2 &\ge -1; \end{aligned}$$

4.2. $z = ax_1 - 2x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 2,\\ x_1 - x_2 &\le 1; \end{aligned}$$

4.3. $z = 2x_1 + x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\le 4,\\ x_1 - x_2 &\le 6,\\ ax_1 + x_2 &\le 3,\\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

4.4. $z = x_1 + 2x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\ge 9,\\ x_1 - 3x_2 &\le 1,\\ ax_1 - x_2 &\le -2,\\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0; \end{aligned}$$

4.5. $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1,\\ 2x_1 + ax_2 + x_3 &= 2,\\ x_3 &\ge 0; \end{aligned}$$

4.6. $z = x_1 - x_2 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le a,\\ 0 \le x_1 &\le 1,\\ x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

5. Да се определи за кои стойности на параметъра a функцията $z = x_1 + ax_2$ има максимална стойност нула в множеството

$$P : \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} : x_1 + x_2 \le 0,\ x_1 \le 0,\ x_2 \le 1\}.$$

Да се намерят всички оптимални решения.

6. Да се реши задачата за посочените стойности на параметъра a:

6.1. $z = ax_1 - x_2 \to \min,$
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\ge -7,\\ x_1 + x_2 &\le 5,\\ x_1 - x_2 &\ge -1,\\ a \in \left[\tfrac{1}{3}, +\infty\right)&; \end{aligned}$$

6.2. $z = ax_1 - x_2 \to \max,$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4,\\ x_1 - 3x_2 &\le 5,\\ x_1 - 2x_2 &\le 6,\\ a \in \left(-\infty, \tfrac{1}{3}\right]&. \end{aligned}$$

7. За кои стойности на параметъра a:

а) оптималното решение остава в един и същ връх на P;

б) задачата няма оптимално решение;

в) задачата има безбройно много оптимални решения?

7.1. $z = 2x_1 + ax_2 \to \max,$

$$P: \left| \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0; \end{array} \right.$$

7.2. $z = -x_1 + ax_2 \to \max,$

$$P: \left| \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{array} \right.$$

8. Да се съставят задачи на ЛО, които да имат едно от следните свойства (с P и z са отбелязани съответно допустимото множество и целевата функция):

а) задачата има единствено оптимално решение;

б) задачата има безбройно много оптимални решения;

в) $z \to +\infty$ в P, но задачата за минимум на z в P има единствено оптимално решение;

г) $z \to -\infty$ и $z \to +\infty$ в P;

д) $P = \emptyset$;

е) $z \to -\infty$ в P, но задачата за максимум на z в P има безбройно много оптимални решения.

Отговори и решения

1.1. max: $\left(\frac{15}{4}, \frac{3}{2}\right)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 9$; min: $(0, 0)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 0$.

1.2. max: $z \to +\infty$ в допустимото множество; min: $\mathbf{x}_\lambda = (2 - \lambda, 0)^{\mathrm{T}}$ за $0 \le \lambda \le 1$, $z^* = 0$.

1.3. max: $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda, 1 + \lambda)^{\mathrm{T}}$ за $\lambda \ge 0$, $z^* = 3$; min: $z \to -\infty$ в допустимото множество.

1.4. max: $z \to +\infty$ в допустимото множество; min: $(0, 1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 0$.

1.5. max: $(3, 0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 4$; min: $(3, 2, -1, -1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = 0$.

1.6. max: $\mathbf{x}_\lambda = (6 - 6\lambda, 4\lambda, 2\lambda - 1)^{\mathrm{T}}$, $0 \le \lambda \le 1$; min: $\left(\frac{1}{5}, 0, \frac{24}{5}\right)$, $z^* = -\frac{23}{5}$.

1.7. max: оптимални решения са всички точки от правата $x_1 - x_2 = 1$, в частност $\overline{\mathbf{x}} = (1, 0)^{\mathrm{T}}$; при направляващ вектор $\mathbf{p} = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ на тази права оптималните решения са $\mathbf{x}_\lambda = \overline{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{p} = (1 + \lambda, \lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, $z^* = 2$; min: оптимални решения са всички точки от правата $-x_1 + x_2 = 1$, в частност $\overline{\mathbf{y}} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$; общият вид на оптималните решенията е $\mathbf{x}_\lambda = \overline{\mathbf{y}} + \lambda\mathbf{p} = (\lambda, 1 + \lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, $z^* = -2$.

1.8. max: $z \to +\infty$ в P; min: $\left(0, \frac{1}{2}, 0, 2\right)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -\frac{1}{2}$.

1.9. От системата уравнения имаме $x_{n-2} = 3 - (x_{n-1} + x_n)$ и $x_k = 1$ за $k = 1, \dots, n - 3$; двумерната задача е

$$\max\left\{\overline{z} = \frac{1}{2}(n^2 + n - 6) + x_{n-1} + 2x_n : x_{n-1} + x_n \le 3,\ x_{n-1} \ge 0,\ x_n \ge 0\right\},$$

откъдето получаваме оптимално решение за максимум $(1, 1, \dots, 1, 0, 0, 3)^{\mathrm{T}}$, $z^* = \frac{1}{2}(n^2 + n + 6)$ и за минимум — $(1, 1, \dots, 1, 3, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $z^* = \frac{1}{2}(n^2 + n - 6)$.

2.1. max: $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; при $\alpha = 0$ ($c_2 = 0$, $c_1 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (0, -\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \ge 0$, $z^* = 0$; при $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$: $(0, 0)^{\mathrm{T}}$; при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($c_1 = c_2 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (-\lambda, \lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \in [0, 1]$, $z^* = 0$; при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$: $(-1, 1)^{\mathrm{T}}$, $z^* = -c_1 + c_2$; при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (-1 - \lambda, 1)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \ge 0$, $z^* = c_2$; min: $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

2.2. max: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; при $\alpha = 0$ ($c_2 = 0$, $c_1 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (1, \lambda)^\mathrm{T}$, $\lambda \geq 0$, $z^* = c_1$; при $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$: $(1, 0)^\mathrm{T}$, $z^* = c_1$; при $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ ($c_1 = -c_2 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda, \lambda - 1)^\mathrm{T}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $z^* = c_1$; при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right]$: $(0, 1)^\mathrm{T}$, $z^* = -c_2$; при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (-\lambda, -1)^\mathrm{T}$, $\lambda \geq 0$, $z^* = -c_2$; min: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

2.3. max: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (1 - \lambda, 0)^\mathrm{T}$, $\lambda \geq 0$, $z^* = 0$; при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$: $(1, 0)^\mathrm{T}$, $z^* = c_1$; при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($c_1 = c_2 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda, 1 - \lambda)^\mathrm{T}$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $z^* = c_1$; при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$: $(0, 1)^\mathrm{T}$, $z^* = c_2$; при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 > 0$) $\mathbf{x}_\lambda = (-\lambda, 1)^\mathrm{T}$, $\lambda \geq 0$, $z^* = c_2$; min: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

2.4. max: $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$; при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$: $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda, \lambda)^\mathrm{T}$, $\lambda \geq 0$; при $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$: $(0, 0)^\mathrm{T}$; при $\alpha = \frac{5\pi}{4}$: $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda, -\lambda)^\mathrm{T}$ за $\lambda \geq 0$; във всички случаи $z^* = 0$; min: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

2.5. max: $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$; при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ($c_1 = -c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = \left(\frac{1}{2} + \lambda, \frac{1}{2} + \lambda\right)$, $\lambda \geq 0$; $z^* = 0$; при $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $z^* = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$; при $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ ($c_1 = c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = \left(1 - \frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}\lambda\right)^\mathrm{T}$, $\lambda \in [0, 1]$, $z^* = c_1$; при $\alpha \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$: $(1, 0)^\mathrm{T}$, $z^* = c_1$; при $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (1 + \lambda, 0)^\mathrm{T}$, $\lambda \geq 0$, $z^* = 0$; min: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2.6. max: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$; при $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ ($c_1 = 0$, $c_2 < 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (-\lambda, 1)^\mathrm{T}$, $\lambda \geq 0$, $z^* = c_2$; при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$: $(1, 0)^\mathrm{T}$, $z^* = c_1$; при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ($c_1 = c_2 > 0$): $\mathbf{x}_\lambda = (1 - \lambda, \lambda)^\mathrm{T}$, $\lambda \geq 0$, $z^* = c_2$; min: $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

3.1. а) $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$; б) при $c_1 = c_2 = k < 0$, т. е. $\mathbf{c} = (k, k)^\mathrm{T}$: $\mathbf{x}_\lambda = \left(4 - \frac{9}{2}\lambda, \frac{9}{2}\lambda\right)^\mathrm{T}$, $\lambda \in [0, 1]$.

3.2. а) $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$; б) при $c_1 = -\frac{c_2}{2} = k > 0$, т. е. $\mathbf{c} = (k, -2k)^\mathrm{T}$ за $k > 0$: $\mathbf{x}_\lambda = (-4\lambda, 2 - 2\lambda)^\mathrm{T}$, $\lambda \in [0, 1]$.

4.1. $-\frac{4}{3} \leq a \leq 2$.

4.2. $a \geq 2$.

4.3. $a > -1$.

4.4. $-\frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{3}$; $P = \emptyset$ за $-\infty < a < \frac{1}{4}$.

4.5. $\frac{1}{2} \leq a < 2$.

4.6. $a = 0$; $P = \emptyset$ за $a < 0$.

5. $0 \leq a \leq 1$; при $a = 0$; $\mathbf{x}_\lambda = (0, -\lambda)^{\mathrm{T}}$, $\lambda \geq 0$; при $a = 1$: $\mathbf{x}_\lambda = (\lambda - 1, 1 - \lambda)^{\mathrm{T}}$, за $\lambda \in [0, 1]$; при $a \in (0, 1)$: $(0, 0)^{\mathrm{T}}$.

6.1. $a \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$: $z^* = 2a - 3$, $\mathbf{x}^* = (2, 3)^{\mathrm{T}}$; $a \in (1, \infty)$: $z^* = -\infty$.

6.2. $a \in (-\infty, -1)$: $z^* = +\infty$; $a \in \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$: $z^* = 2a + 1$, $\mathbf{x}^* = (2, -1)^{\mathrm{T}}$.

7.1. а) върховете: $(5, 0)^{\mathrm{T}}$ за $a \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$, $(6, 3)^{\mathrm{T}}$ за $a \in \left[-\frac{2}{3}, 4\right]$, $(2, 5)^{\mathrm{T}}$ за $a \in [4, +\infty)$; б) няма такива a; в) $a = -\frac{2}{3}$, $a = 4$.

7.2. а) върховете: $(0, 0)^{\mathrm{T}}$ за $a \in (-\infty, 0)$, $(0, 2)^{\mathrm{T}}$ за $a \in [0, 1]$; б) $a \in (1, +\infty)$; в) $a = 0$, $a = 1$.

8. а) например зад. 1.1; б) например зад. 1.6 за максимум; в) например зад. 1.4; г) например зад. 1.7, но с $c_1 \neq -c_2$ в z: например $z = 2x_1 + 3x_2$; д) например $P = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} : -x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 - x_2 \geq 1\}$; е) например зад. 1.3.