Устен изпит по диференциална геометрия при Богдан Александров,

специалност “Приложна математика”, III курс, януари 2017г.

Правила за провеждане на изпита:

Използва се само син или черен химикал. Забранено е използването на молив, червен и зелен химикал. Продължителността на изпита е 120 минути. Максималният брой точки е 120. Изпитът се състои от 4 части всяка със съответен максимален брой точки:

първа част – 30 точки

втора част – 45 точки

трета част – 15 точки

четвърта част – 30 точки

За успешно полагане на изпита са необходими 48 точки.

Оценяването е по скалата (от 48 т. нагоре през 12 т. е +0.50 към оценката):

48 т. – 3.00

60 т. – 3.50

72 т. – 4.00

84 т. – 4.50

96т. – 5.00

108 т. – 5.50

120 т. – 6.00

ЧАСТ I

Да се докажат двете дадени твърдения. Всяко доказателство е по 15 точки.

1) Нека $c\colon x = x(s), s \in I$ е гладка крива в равнината от клас $C^2(I)$, параметризирана относно естествен параметър. Нека $s_0 \in I$, а $\theta_0 \in \mathbb{R}$ е такова, че единичният допирателен вектор $t(s_0)$ има координати $t(s_0)(cos\theta_0, sin\theta_0)$. Тогава съществува единствена функция $\theta\colon I \to \mathbb{R}$ от клас $C^1(I)$, за която $t(s)$ има координати $t(s)(cos\theta(s), sin\theta(s))$ за всяко $s \in I$ и $\theta(s_0) = \theta_0$. За тази функция θ е изпълнено също $\theta' = K$, където K е ориентираната кривина на c.

2) Нека $S\colon x = x(u, v), (u, v) \in D$ е свързана (тоест дефиниционната област D е свързана) гладка повърхнина от клас $C^3(D)$, всички точки на която са омбилични, тоест $II = \nu . I$. Тогава ν е константа и при $\nu = 0$ повърхнината S е (част от) равнина, а при

$\nu \neq 0$ повърхнината S е (част от) сфера с радиус $\frac{1}{|\nu|}$.

ЧАСТ II

9 дефиниции и формулировки на теореми, всяка по 5 точки.

Дайте дефиниция за:

1) гладка параметризирана крива в пространството;

2) торзия на параметризирана крива;

3) първа основна форма на параметризирана повърхнина;

4) изображение на Вайнгартен;

5) средна кривина на параметризирана повърхнина;

6) геодезична линия върху параметризирана повърхнина.

Формулировки на теореми

7) Напишете формулите на Френе за крива в пространството, като поясните участващите в тях обекти.

8) Формулирайте основната теорема на диференциалната геометрия на криви в пространството (за това, че кривата се определя от кривината и торзията си).

9) Формулирайте теоремата на Гаус ($Theorema\ egregium$).

ЧАСТ III

Отговорете на въпросите без да обяснявате как сте получили отговора. 5 задачи като всяка е по 3 точки. За верен отговор се получават 3 точки, за грешен, непълен или непосочен отговор – 0 точки.

1) Нека $c: x = x(s), s \in I$ е гладка параметризирана крива, за която s е естествен параметър. Напишете всички естествени параметри на c.

2) Нека c е окръжност с радиус R. Напишете кривината на c.

3) Нека гладка параметризирана повърхнина има в точка P единичен нормален вектор l, а повърхнината $\overline{S}$ се получава от S чрез смяна на параметрите, която сменя ориентацията. Напишете единичния нормален вектор $\overline{l}$ на $\overline{S}$ в точката P.

4) Напишете формулата, изразяваща гаусовата кривина K на параметризирана повърхнина чрез главините ѝ кривини ν_1 и ν_2.

5) Напишете условието, което коефициентите на I и II на параметризирана повърхнина трябва да удовлетворяват, за да бъде координатната параметрична мрежа спрегната.

ЧАСТ IV

15 тестови въпроса със затворен отговор. Има само един верен отговор. При посочване на повече от един отговор, въпросът се смята за сгрешен. Всеки верен отговор носи 2 точки, всеки непосочен отговор 0 точки, всеки сгрешен отговор -2 точки. Ако резултатът от теста е отрицателен, то тази част от изпита се оценява с 0 точки.

1. Нека $c\colon x = x(q), q \in I$ е гладка правилна крива от клас $C^3(I)$, за която векторите $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}$ са компланарни за всяко $q \in I$. Вярно ли е, че c е равнина?

а) да б) не

2. Кое от следните твърдения за векторните инварианти на гладка правилна крива в пространството е вярно?

$$n = t \times b \qquad\qquad b = t \times n$$

а) само първото

б) само второто

в) и двете

г) нито едното

3. Нека Φ е еднаквост в пространството със съответната ортогонална линейна трансформация Φ',

c е гладка правилна крива и $\overline{c} = \Phi(c)$ е кривата, получена от c чрез Φ. Тогава за единичните вектори по главната нормала n на c и $\overline{n}$ на $\overline{c}$ в съответните точки е изпълнено $\overline{n} = \Phi'(n)$.

Това твърдение е вярно:

а) за всяка еднаквост Φ

б) само когато Φ е движение, тоест когато запазва ориентацията

4. Нека частично гладката проста затворена крива c в равнината има дължина 2π, а оградената от нея област има лице π^2. Вярно ли е, че c е окръжност?

а) да б) не

5. Ако една параметризирана повърхнина се получава от друга чрез смяна на параметрите, то носителите на двете повърхнини:

а) съвпадат като множества б) могат да бъдат различни множества

6. Нека $S\colon x = x(u,v), (u,v) \in D$ е параметризирана повърхнина, v_0 е константа. Тогава кривата c върху S, която се задава в криволинейни координати чрез уравненията $c\colon \begin{cases} u = q \\ v = v_0 \end{cases}, q \in I$ е:

а) u-линия върху S б) v-линия върху S

7. Нека $S\colon x = x(u,v), (u,v) \in D$ е гладка параметризирана повърхнина. Тогава дължината на

$x_u \times x_v$ е:

а) $EG - F^2$ б) $\sqrt{EG - F^2}$

8. Гаусовата кривина K на гладка параметризирана крива от клас C^2 е равна на:

а) $\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$ б) $\frac{GL-2FM+EN}{2(EG-F^2)}$

9. При смяна на параметрите върху параметризирана повърхнина векторът Hl си остава същият. Това твърдение е вярно:

а) при произволна смяна на параметъра

б) само при запазваща ориентацията смяна на параметъра

10. Ако в точка P втората основна форма на повърхнина S е отрицателно дефинитна, то P е:

а) елиптична точка на S

б) хиперболична точка на S

в) параболична точка на S

г) равнинна точка на S

11. Кривата c върху повърхнината S е линия на кривината за S тогава и само тогава, когато:

а) геодезичната ѝ кривина е 0

б) нормалната ѝ кривина е 0

в) геодезичната ѝ торзия е 0

12. Нека $S\colon x = x(u,v), (u,v) \in D$ е гладка параметризирана повърхнина от клас $C^2(D)$, правата m е допирателна към S в точка P и a е колинеарен с m ненулев вектор, чиито координати спрямо базиса (x_u, x_v) на допирателното пространство в P са (λ, μ). Тогава геодезичната торзия на m е:

а) $\frac{II(\lambda,\mu)}{I(\lambda,\mu)}$ б) $\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}\, I(\lambda,\mu)} \begin{vmatrix} E\lambda + F\mu & F\lambda + G\mu \\ L\lambda + M\mu & M\lambda + N\mu \end{vmatrix}$

13. Могат ли да се пресметнат символите на Кристофел на параметризирана повърхнина, ако се знаят коефициентите на I, но не и тези на II?

а) да б) не

14. Нека c е частично гладка затворена крива в пространството и S е гладка повърхнина от клас C^2 с граница c, чието лице е по-малко или равно на лицето на всяка друга повърхнина от клас C^2 с граница c. Тогава:

а) средната кривина на S е 0 б) гаусовата кривина на S е 0

15. Съществува ли изометрия между част от сфера и част от равнина?

а) да б) не