ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ НА КРИВИ ЛИНИИ

1 зад. Нека $c: x = x(s)$ е трикратно гладка правилна крива, отнесена спрямо естествения си параметър.

Кривата $\bar{c}: \bar{x} = \int \vec{b}\, ds$, където $\vec{b}$ е бинормалният вектор на кривата c, се нарича ***придружаваща*** крива на c.

a) Да се изразят векторните и скаларните инварианти на $\boldsymbol{\bar{c}}$ чрез векторните и скаларните инварианти на $\boldsymbol{c}$;

b) Да се намерят параметричните уравнения, кривината и торзията на придружаващата крива $\bar{c}$, ако

$$c: \begin{cases} x^1 = a(q - sinq) \\ x^2 = a(1 - cosq), \\ x^3 = 4acos\frac{q}{2} \end{cases} q \in (0, \pi), a = const.$$

2 зад. Между точките на двукратно гладките правилни криви c и $\bar{c}$ е установено взаимно еднозначно съответствие така, че в съответните точки тангентите на c са главни нормали на $\bar{c}$. Да се докаже, че c и $\bar{c}$ са равнинни криви.

3 зад. Нека c е петкратно гладка правилна крива с $\kappa = const., \tau \neq 0$. Нека $\bar{c}$ е геометричното място на центровете на кривина на c.

a) Да се изразят векторните и скаларните инварианти на $\bar{c}$ чрез тези на c. Да се докаже, че $\bar{\kappa} = const$.

b) Да се намери геометричното място на центровете на кривина на кривата $\bar{c}$.

4 зад. Дадена е равнинната крива $c: x = x(s)$. По бинормалата ѝ b в произволна точка P, в една и съща посока е нанесена отсечка $P\bar{P}$ с дължина, пропорционална на естествения параметър s на кривата c.

a) Да се намерят уравненията, кривината и торзията на кривата $\bar{c}$, описана от точките $\bar{P}$;

b) Да се докаже, че $\bar{c}$ пресича образуващите на цилиндричната повърхнина, определена от бинормалите на c под постоянен ъгъл. (Да се докаже, че $< \bar{t}, b >= const.$).

5 зад. Дадена е кривата $c: \begin{cases} x^1 = a.cosu \\ x^2 = a.sinu \\ x^3 = a.v, \ v = v(u) \end{cases}, u \in (0, 2\pi), a > 0.$

a) Да се намерят уравнения на допирателната и на оскулачната равнина в произволна точка на c;

b) Нека *A* е точката, в която допирателната към c пробожда координатната равнина Ox^1x^2. Да се определи функцията $v(u)$ така, че точката *A* да описва окръжност с център *O* и радиус $r > 0$;

c) Да се определи функцията $v(u)$ така, че оскулачните равнини на получената крива да сключват постоянен ъгъл с оста Ox^3.

6 зад. Дадена е кривата $c: \begin{cases} x^1 = a.cosu \\ x^2 = a.sinu, \\ x^3 = a.h.u \end{cases} h, a > 0.$

От произволна точка *P* на кривата с върху главната нормала по посока към центъра на кривина е нанесена отсечка $P\bar{P}$ с постоянна дължина ***d***. Да се определи ***d*** така, че кривите c и $\bar{c}$ да притежават едно от следните свойства:

a) Да имат една и съща кривина;

b) Да имат една и съща торзия;

c) Да имат взаимно перпендикулярни допирателни;

d) Допирателната към $\bar{c}$ в точката $\bar{P}$ да е успоредна на бинормалата към c в точката P.

7 зад. Дадена е кривата $c: \begin{cases} x^1 = -\sqrt{2} sinq \\ x^2 = \sqrt{2} cosq \\ x^3 = \sqrt{2} chq \end{cases}$. Да се намерят естествените уравнения на c. Да се докаже, че кривината и торзията удовлетворяват равенството $\kappa^2 + 2\tau^2 - \kappa = 0$.