

## ЛЕКЦИЯ 12

### Аналитична механика

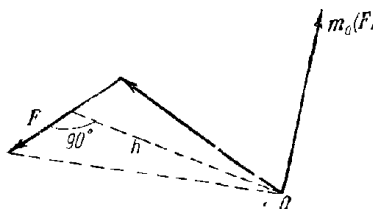
#### Привеждане на несходяща съвкупност от сили към най-прост вид

##### Съдържание

1. Момент на сила относно точка.
2. Двоица сили. Свойства. Събиране на двоици сили.
3. Привеждане на пространствена несходяща съвкупност от сили към една двоица.
4. Главен вектор и главен момент на съвкупност от сили.
5. Уравнения на равновесие на твърдо тяло под действие на несходящи сили.
6. Равновесие на твърдо тяло с две закрепени точки.

#### 1. Момент на сила относно точка.

- две основни понятия в статиката (исторически – учение на Архимед за равновесие при лостове)
  - момент на сила относно точка
  - момент на сила относно ос
- Архимед: моментът на сила относно точка се свързва с равнина, определена от линията на действието на силата и самата точка (център на момента); характеризира се с алгебрична величина – произведението на големината на силата и разстоянието от центъра на момента до линията на действието на силата
- моментът  $m_O(\mathbf{F})$  на силата  $\mathbf{F}$  относно точката  $O$  се дефинира като *вектор*, приложен в точката  $O$ , равен по големина на произведението на големината на силата  $\mathbf{F}$  и разстоянието  $h$  от центъра на момента до линията на действието на силата (рамо на силата) и имащ направление, перпендикулярно на равнина, определена от линията на действието на силата и центъра на момента. Посоката на вектора е такава, че завъртането на тяло, към което е приложена силата, е положително.



фиг.1

- дефиниция за положително завъртане: завъртане на оста  $Ox$  на ъгъл  $\frac{\pi}{2}$  към оста  $Oy$ , гледано срещу положителната посока на оста  $Oz$ . За дясна система – завъртане срещу часовниковата стрелка; за лява – по часовниковата стрелка.
  - такава дефиниция за положително завъртане води до единно за двете координатни системи (лява или дясна) понятие за вектора на момента на сила относно точка
  - за десни системи: правило на винта, завиващ се в даден материал
  - истински вектори (сила, скорост, ускорение) – нито по големина, нито по посока зависи от координатната система, *с чиято помощ аналитично е изразен*; за вектора  $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$  това не е в сила – при преход от лява към дясна система или обратно, той не изменя големината си, но посоката се обръща. Такива вектори се наричат *псевдовектори* – например още ъгловата скорост, ъгловото ускорение.
- интерпретация на големината на  $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$  (фиг.1) – удвоено лице на триъгълник с връх центъра на момента и основа – големината на силата
  - или лице на успоредник със страни самата сила и отсечката, съединяваща центъра на момента и приложената точка, така че

$$|\mathbf{m}_O(\mathbf{F})| = Fr \sin \alpha, \quad (1)$$

където  $\alpha$  е ъгълът между  $F$  и  $r$ .

- при ненулева сила моментът относно точка е нула, когато линията на действие на тази сила минава през центъра на момента
- определение: моментът  $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$  на силата  $\mathbf{F}$  относно център  $O$  е *вектор*, равен на векторното произведение

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (2)$$

където  $\mathbf{r}$  е радиус-векторът на приложената точка на силата относно центъра на момента

- теорема на Вариньон: Моментът на равнодействащата на пространствена съвкупност от сходящи сили относно произволна точка е равен на векторната сума от моментите на тези сили относно същата точка

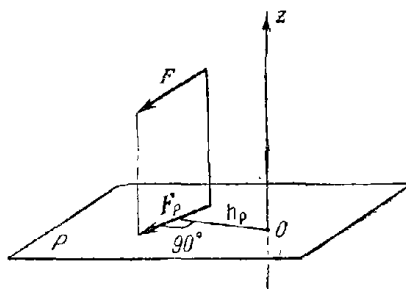
Нека  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) е сходяща съвкупност сили, чиито линии на действие се пресичат в точка  $A$ . За равнодействащата  $\mathbf{R}$ , приложена също в точка

$$A, \text{ е в сила } \mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i.$$

Нека  $O$  е произволна точка, спрямо която  $A$  има радиус-вектор  $\mathbf{r}$ . Тогава

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_O(\mathbf{R}) &= \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) = \\ &= (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1) + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2) + \dots + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_n) = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_2) + \dots + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_n) \end{aligned} \quad (3)$$

- теоремата е вярна само за сходящи сили; обобщава се и за сили с успоредни линии на действие, като се счита пресечната им точка за безкрайно отдалечена
- за несходяща система (равнодействаща няма смисъл) се въвежда понятието *главен вектор*
- проекции на вектора момент на сила по осите на координатна система: смисъл на *момент на сила относно ос*
  - съставляваща на вектор в дадена равнина: ортогоналната проекция на вектора в тази равнина (фиг.2)
  - моментът на тази проекция относно център, избран в равнината, е равен на момент относно ос през центъра и перпендикулярен на равнината; ако тази ос се избере за ос  $z$ , то означението е  $m_z(\mathbf{F})$
  - моментът относно ос е нула в два случая: линията на действие на силата пресича оста или линията на действие на силата е успоредна на оста, т.е. силата и оста лежат в една равнина
  - проекцията на вектора момент на сила относно точка върху ос, минаваща през тази точка, е равна на момента на силата спрямо тази ос



фиг.2

- аналитично представяне на момент на сила относно координатните оси
  - нека  $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$  има координати на приложената си точка  $(x, y, z)$ ; тогава са еквивалентни означенията  $m_{Ox}(\mathbf{F}) = m_x(\mathbf{F}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x$  (4)
  - или

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(yF_z - zF_y) + \mathbf{j}(zF_x - xF_z) + \mathbf{k}(xF_y - yF_x)$$

$$= m_x \mathbf{i} + m_y \mathbf{j} + m_z \mathbf{k} \quad (5)$$

- изразяване на проекциите (5) чрез компонентите  $(F_1, F_2, F_3)$  на  $\mathbf{F}$  по координатните оси: съгласно теор. на Вариньон за сходящи сили

$$m_x(\mathbf{F}) = m_{Ox}(\mathbf{F}) = m_{Ox}(\mathbf{F}_1) + m_{Ox}(\mathbf{F}_2) + m_{Ox}(\mathbf{F}_3) =$$

$$= m_x(\mathbf{F}_1) + m_x(\mathbf{F}_2) + m_x(\mathbf{F}_3) = 0 - zF_y + yF_z = yF_z - zF_y$$

- момент на сила относно ос с произволно направление  
нека  $OL$  – произволна ос, минаваща през началото  $O$  на координатна система и  $\mathbf{l}$  - единичен вектор по нея с директорни косинуси

$$l_x = \cos \alpha, \quad l_y = \cos \beta, \quad l_z = \cos \gamma$$

Ако  $\delta$  е ъгъл между оста и вектора  $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ , то

$$m_L(\mathbf{F}) = |\mathbf{m}_O(\mathbf{F})| \cos \delta = \mathbf{l} \cdot \mathbf{m}_O(\mathbf{F}) \quad (6)$$

или

$$\begin{aligned} m_L(\mathbf{F}) &= m_{Ox}(\mathbf{F}) \cos \alpha + m_{Oy}(\mathbf{F}) \cos \beta + m_{Oz}(\mathbf{F}) \cos \gamma = \\ &= m_x(\mathbf{F}) \cos \alpha + m_y(\mathbf{F}) \cos \beta + m_z(\mathbf{F}) \cos \gamma = \\ &= (yF_z - zF_y) \cos \alpha + (zF_x - xF_z) \cos \beta + (xF_y - yF_x) \cos \gamma \end{aligned} \quad (7)$$

чрез детерминанта:

$$m_L(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (8)$$

## 2. Двоица сили. Свойства. Събиране на двоици сили.

- определение: *двоица сили* – съвкупност от две равни по големина сили, имащи успоредни линии на действие и противоположни посоки.
- равнина на двоицата – равнината, определена от линиите на действие на двете сили
- момент на двоица сили: нека  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ , за които  $\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$ , е двоица сили, имащи радиус-вектори  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  на приложените си точки А и В

- за сумата на моментите на силите относно произволен център в равнината им:

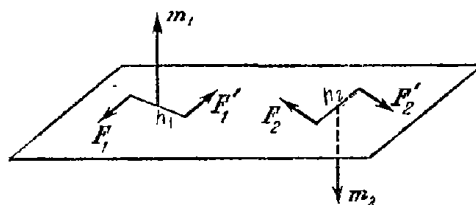
$$\mathbf{m}_O(\mathbf{P}) + \mathbf{m}_O(\mathbf{Q}) = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{Q} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{P} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{P} = \mathbf{m} \quad (9)$$

- векторът  $\mathbf{m}$  не зависи от избора на центъра, а само от вектора

$$\vec{BA} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \text{ определящ взаимното разположение на точките А и В}$$

определение: момент на двоица сили е векторът  $\mathbf{m}$ , който има големина  $m = P|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \sin \alpha = Ph$ , където  $\alpha$  е ъгълът между векторите  $\mathbf{P}$  и

$\vec{BA} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ , а  $h$  е разстоянието между линиите на действие на силите (рамо на двоицата) – фиг.3



фиг.3

направление на  $\mathbf{m}$  - перпендикулярен на равнината на двоицата;  
посока – съгласно правилото на винта

- *моментът на двоица сили напълно определя статичното действие на двоицата върху твърдо тяло*
- теорема: две двоици с равни по големина, направление и посока моменти, са статично еквивалентни
  - една двоица може да се завърти на произволен ъгъл в равнината си, без да се нарушава нейното действие върху твърдо тяло
  - действието на двоица не се изменя, ако се изменят големината на нейните сили и дължината на рамото, но произведението (големината на момента) им не се измени
  - равнината на двоицата може да се замени с произволна, но успоредна на нея равнина, без това да нарушава нейното действие върху тялото
- *моментът на двоица сили напълно определя статичното действие на двоицата върху твърдо тяло; той няма приложна точка, нито линия на действие – задава се само чрез големината, направлението и посоката си: има характеристиката на свободен вектор*
- теорема за събиране на двоици

Съвкупност от двоици сили, произволно разположени в пространството, е статически еквивалентна на една двоица с момент, равен на векторната сума на моментите на събираемите двоици.

Нека  $(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1)$  и  $(\mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_2)$  са две двоици съответно с моменти  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$ , като равнините им не са успоредни. Нека  $LL_1$  е пресечницата на тези равнини, като по нея отбележим АВ – еано и също рамо за двете двоици (евентуално след изменение на големините на силите, като произведението им с рамото съответно си остава  $|\mathbf{m}_1|$  и  $|\mathbf{m}_2|$ ). Тогава силите  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  са приложени в точка А, а  $\mathbf{Q}_1$  и  $\mathbf{Q}_2$  - в точка В. Нека равнодействащата на  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  е означена с  $\mathbf{R}$ , а на  $\mathbf{Q}_1$  и  $\mathbf{Q}_2$  - с  $\mathbf{R}'$ . Съгласно теоремата на Вариньон (моментите на  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}'$  относно произволен център О ще са равни на сумата от моментите на съставлящите ги сили):

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{R}) = \mathbf{m}_O(\mathbf{P}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{P}_2), \quad \mathbf{m}_O(\mathbf{R}') = \mathbf{m}_O(\mathbf{Q}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{Q}_2) \quad (10)$$

Но моментът  $\mathbf{m}$  на равнодействащата двойца  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}'$  съгласно (9) е:  

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_O(\mathbf{R}) + \mathbf{m}_O(\mathbf{R}') = \mathbf{m}_O(\mathbf{P}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{Q}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{P}_2) + \mathbf{m}_O(\mathbf{Q}_2) = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 \quad (11)$$

При случая на успоредни равнини на двойците векторното събиране на моментите е по-просто; те са по една права с еднакви или противоположни посоки. При повече двойци моментите им се събират по правилото на векторния многоъгълник.

### 3. Привеждане на пространствена несходяща съвкупност от сили към една двойца. Метод на Пуансо.

- нека към твърдо тяло е приложена пространствена несходяща система сили  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), приложени съответно в точки  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )
- произволно се избира точка  $O$  за център на привеждането (в тялото или твърдо свързана с него точка, ако тя не принадлежи на тялото)
- пренасяне на силите в точка  $O$ :  
 за  $\mathbf{F}_1$ : в точка  $O$  се построяват две сили  $\mathbf{F}'_1$  и  $\mathbf{F}''_1$ , които взаимно се уравновесяват (всяка с големината на  $\mathbf{F}_1$  и успоредни на нейното направление, но с различни посоки)  
 Силата  $\mathbf{F}'_1$  се разглежда като пренесена от точка  $A_1$  в  $O$ , а останалите сили  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}''_1$ , които са успоредни, но с противоположни посоки – като *присъединена двойца* с момент  $\mathbf{m}_1$
- аналогично се постъпва с всички останали сили
- резултат: произволна пространствена несходяща система сили  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) се привежда към еквивалентна сходяща система сили  $\mathbf{F}'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и съвкупност от двойци с моменти  $\mathbf{m}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), които се явяват свободни вектори.
- сходящата система сили  $\mathbf{F}'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) е еквивалентна на една сила  $\mathbf{V}$ ,

$$\mathbf{V} = \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2 + \dots + \mathbf{F}'_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'_i,$$

която е една и съща от гледна точка на построяване на силов многоъгълник като сумата

$$\mathbf{V} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (12)$$

### 4. Главен вектор и главен момент на съвкупност от сили.

- за  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) тяхната векторна сума се нарича *главен вектор*
- *главният вектор на съвкупност от сили  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) не е тяхна равнодействаща, т.е. не може да замени тяхното действие; главният вектор  $\mathbf{V}$  е равнодействаща на силите  $\mathbf{F}'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), докато в общия*

случай силите  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) може да са приложени към различни тела и понятието равнодействаща няма смисъл

- съвкупността от присъединени двоици с моменти  $\mathbf{m}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) има за еквивалентна една двоица с момент

$$\mathbf{m} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \quad (13)$$

- отчитайки, че моментът на една двоица сили е равен на сумата на моментите на влизащите в двоицата сили относно произволна точка (център на привеждане), то:

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1'') = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1), \text{ т.е. } \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1'') = \mathbf{0},$$

защото линията на действие на  $\mathbf{F}_1''$  минава през точката O

или: *моментът на присъединената двоица е равен на момента на приложената към тялото сила относно избрания център на привеждане*

- аналогично:  $\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_2), \dots, \mathbf{m}_n = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_n)$  (14)

- тогава  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_2) + \dots + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_n)$  (15)

- определение: *главен момент* на съвкупност от сили (относно произволно избран център на привеждане) е векторната сума от моментите на приложените към тялото сили относно избрания център на привеждане

- означение:  $\mathbf{m}^{(O)}$  - главен момент относно център на привеждане O

- обща теорема на статиката на абсолютно твърдо тяло

Произволна пространствена несходяща система сили, действаща на абсолютно твърдо тяло, е статически еквивалентна на една сила – главния вектор, приложен в произволно избрана точка от тялото (център на привеждането), и една двоица с момент, равен на главния момент на силите относно центъра на привеждането.

аналитично представяне

- главен вектор: чрез проекциите си върху осите на избрана координатна система  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$

- главен момент относно началото  $\mathbf{m}^{(O)}$ : чрез проекциите  $m_x^{(O)}, m_y^{(O)}, m_z^{(O)}$ , които са равни съответно на

$$\begin{aligned} m_x^{(O)} &= \sum_{i=1}^n m_{Ox}(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_x(\mathbf{F}_i) \\ m_y^{(O)} &= \sum_{i=1}^n m_{Oy}(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_y(\mathbf{F}_i) \end{aligned} \quad (16)$$

$$m_z^{(O)} = \sum_{i=1}^n m_{Oz}(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i)$$

- главен момент на съвкупност от сили относно ос: алгебричната сума от моментите на всички сили от съвкупността относно тази ос

означение:  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(m_x, m_y, m_z)$ , където  $m_x^{(O)} = m_x$ ,  $m_y^{(O)} = m_y$ ,  $m_z^{(O)} = m_z$  (17)

- аналитични изрази за главните моменти на съвкупност от сили относно координатните оси:

$$m_x = \sum_{i=1}^n (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}), m_y = \sum_{i=1}^n (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}), m_z = \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}), \quad (18)$$

където  $(F_{ix}, F_{iy}, F_{iz})$  са проекциите на силата  $\mathbf{F}_i$ , а  $(x_i, y_i, z_i)$  са координатите на приложната ѝ точка

## 5. Уравнения на равновесие на твърдо тяло под действие на несходящи сили.

- равновесие на тяло: относителен покой в дадена координатна система - за разлика от движение по инерция в отсъствие на външни сили и двоици
- условия за равновесие на твърдо тяло: равенство на нула (в смисъл на нулев вектор) на главния вектор и главния момент на приложените сили към тялото

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}^{(O)} = \mathbf{0} \quad (19)$$

или:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_2) + \dots + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_n) = \mathbf{0} \quad (20)$$

- условията (20) – необходими и достатъчни условия за равновесие на свободно твърдо тяло под действие на съвкупност от сили, произволно разположени в пространството
- записване на векторните уравнения (20) като 6 алгебрични уравнения – проектиране по осите на произволно избрана координатна система (отчитайки, че проекцията на момент върху ос е всъщност моментът относно тази ос)

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$$

$$F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$$

(21)

$$m_x(\mathbf{F}_1) + m_x(\mathbf{F}_2) + \dots + m_x(\mathbf{F}_n) = \sum_{i=1}^n m_x(\mathbf{F}_i) = 0$$

$$m_y(\mathbf{F}_1) + m_y(\mathbf{F}_2) + \dots + m_y(\mathbf{F}_n) = \sum_{i=1}^n m_y(\mathbf{F}_i) = 0$$

$$m_z(\mathbf{F}_1) + m_z(\mathbf{F}_2) + \dots + m_z(\mathbf{F}_n) = \sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i) = 0$$

- при равновесие на свободно твърдо тяло под действие на съвкупност от сили, произволно разположени в пространството, сумите от проекциите на силите върху координатните оси и сумите от моментите на силите относно координатните оси са равни на нула
- частни случаи:
  1. Сходяща съвкупност от сили: при избор на пресечната точка на линиите на действие на силите за център на привеждане, последните три уравнения на (21) се обръщат в нули – линиите на действие пресичат координатните оси.
  2. Равнинна съвкупност от сили: нека за определеност направлението, перпендикулярно на равнината на силите, се означава като ос  $z$ . Тъждествено се обръщат в нули левите части на третото уравнение на (21) – няма проекции по оста  $z$ , както четвъртото и петото уравнение на (21) – линиите на действие на силите пресичат осите на моментите  $x$  и  $y$  или са успоредни на тях.
  3. Съвкупност от успоредни сили: нека за определеност направлението на успоредните сили се означава като ос  $z$ . По останалите оси проекции няма – първите две уравнения на (21) тъждествено са нули, както и последното – силите са успоредни на оста  $z$  и по нея няма моменти.
- в общия случай на произволна пространствена система задачата е статически определена, ако броят на неизвестните не превишава 6
- случаи на различен тип закрепване на тяло и съответния брой неизвестни
  - неподвижно закрепване на точка от тяло (сферичен шарнир): реакцията влиза с трите си проекции по трите оси в уравненията на равновесие
  - реакция на опора, допускаща свободно преместване по протежение на някоя ос (цилиндричен шарнир): реакцията е перпендикулярна на тази ос и в уравненията влизат две неизвестни нейни проекции
  - при съприкосновение на две гладки тела: реакцията е по общата им нормала; в уравненията влиза една неизвестна проекция по тази нормала

Пример: Неподвижно закрепване на тяло чрез 3 точки, нележащи на една права – например чрез сферичен шарнир във всяка точка. Неизвестните реакции са общо 9 и задачата става неопределена статически. За да стане определена, една точка е неподвижна – 3 неизвестни реакции; втората може да се движи по дадено направление – 2 неизвестни реакции

(перпендикулярни на това направление), а третата точка се опира на гладка равнина – една неизвестна реакция по нормалата. Този метод се прилага в строителството, установка на физични прибори или геодезични инструменти. Обезпечава неподвижност на положението, но също така има възможност и за „движение“ – например температурно разширение. Пример: Неподвижно закрепване на тяло чрез 6 неразтяжими пръта, шарнирно свързани с тялото и с опората. Тук е съществен въпросът за избор на координатни оси – ако е възможно системата (21) да се разпадне на независими подсистеми, в които влизат част от неизвестните. Доказва се, че тяло може да се закрепва на 6 пръта, като реакциите могат да се определят от три системи, във всяка от които влизат само две неизвестни.

- не е задължително да се използват всичките 6 уравнения на (21) – трябва да се прави „удачен“ избор на осите, по които се проектират неизвестните реакции; както и осите, за които се съставят уравненията на моментите – така че в тях да влизат най-малко неизвестни

#### 6. Равновесие на твърдо тяло с две закрепени точки.

- нека  $O$  и  $O'$  са две закрепени точки – тялото може да се върти около оста  $OO'$ ; нека реакциите по координатните оси съответно за точките са означени с  $N_1, N_2, N_3$  и  $N'_1, N'_2, N'_3$ . Задачата е статично неопределена; в уравнението за моментите относно оста  $OO'$ , избрана за ос  $z$ , реакциите, пресичащи тази ос, не влизат и за 6-те неизвестни има само 5 уравнения. Нека  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) са зададените сили, приложени към тялото. Уравненията на проекциите са

$$N_1 + N'_1 + \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad N_2 + N'_2 + \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad N_3 + N'_3 + \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0 \quad (22)$$

В уравненията на моментите относно осите  $x$  и  $y$  влизат само  $N'_2$  и  $N'_1$ ; ( $N'_3$  е по оста  $z$ , т.е. пресича осите  $x$  и  $y$ ). Ако  $OO' = h$ , то:

$$-hN'_2 + \sum_{i=1}^n m_x(\mathbf{F}_i) = 0, \quad hN'_1 + \sum_{i=1}^n m_y(\mathbf{F}_i) = 0 \quad (23)$$

Уравнението на моментите относно оста  $z$  не съдържа реакции; то изразява условието, налагано на силите, което обезпечава равновесието на тялото. От уравненията (23) и първите две на (22) се определят  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N'_1$  и  $N'_2$ . За  $N_3$  и  $N'_3$  остава само последното уравнение на (22), от което се определя сумата на тези реакции; поотделно намирането им е невъзможно. Статичната неопределеност се отстранява, като точката  $O'$  може да се „движи“ по оста  $z$ , т.е.  $N'_3 = 0$  и  $N_3$  може да се определи.