

ЛЕКЦИЯ 8

Аналитична механика

Съдържание

1. Абсолютно, относително и преносно движение.
2. Събиране на скорости.
3. Събиране на ускорения.

1. Абсолютно, относително и преносно движение.

- обща постановка на задачата за относително движение:

движението на дадена точка се определя спрямо две различни координатни системи, които се движат една спрямо друга по зададен закон;

спрямо всяка координатна система се определят характеристиките на движението – траектория, скорост и ускорение

- задача:
при известно движение на едната координатна система спрямо другата да се определи връзката между параметрите на движението на произволна точка относно всяка от координатните системи
- представяне на движението като *съставно движение*:
 - спрямо едната система (А) и движението на (А) спрямо друга система (В);
 - преминаване към описание на движението относно (В)
- метод на относителното движение:

възможността за разлагане на сложно движение на точка на по-прости движения

- пример:

Точка се движи равномерно и праволинейно по ос, която от своя страна се върти с постоянна ъглова скорост относно неподвижна равнина.

Относно неподвижната равнина траекторията на точката е Архимедова спирала, докато съставното движение се представя като равномерно праволинейно движение по оста и равномерно въртене на оста около друга неподвижна ос.

- разглежда се движението на точка М спрямо две различни координатни системи:

- абсолютна (неподвижна) координатна система Oxy и
- относителна (подвижна, движеща се спрямо Oxy) система $O'x'y'$

- *абсолютно движение:*

- спрямо неподвижната координатна система Oxy ;
- индексирание на параметрите на абсолютно движение с долен индекс „а“

пример: v_a - абсолютна скорост; w_a - абсолютно ускорение

- *преносно движение:*

- движението на системата $O'x'y'$ спрямо системата Oxy ;
- индексирание на параметрите на преносното движение с долен индекс „е“

пример: v_e - преносна скорост; w_e - преносно ускорение

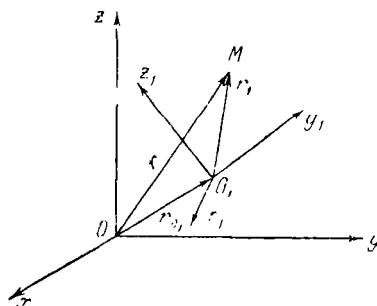
- *относително (релативно) движение:* спрямо координатната система $O'x'y'$;

- индексирание на параметрите на релативното движение с долен индекс „r“

пример: v_r - релативна скорост; w_r - релативно ускорение

- определение:

преносно движение на точка – движението на точката от относителната система, в която в даден момент се намира движещата се точка



фиг.1

- разглежда се движението на точка М (фиг.1)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}', \quad (1)$$

където:

$\mathbf{r}(x, y, z)$ - радиус-вектор на М в неподвижната координатна система Оху

$\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ - радиус-вектор на началото О' в неподвижната система Оху

$\mathbf{r}'(x', y', z')$ - радиус-вектор на М в подвижната система О'х'у'

връзка между координатите (x, y, z) и (x', y', z') на точка М в двете системи

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' \\ y &= y_0 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' \\ z &= z_0 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' \end{aligned} \quad (2)$$

(α_{ij}) - косинусите между единичните вектори на неподвижната и подвижната система, т.е. $(x, x') \rightarrow \cos(x, x') = \alpha_{11}$; $(x, y') \rightarrow \cos(x, y') = \alpha_{21}$

- уравнение на относителното движение на точката М

$$x' = f_1(t), \quad y' = f_2(t), \quad z' = f_3(t) \quad (3)$$

при зададени функции на времето $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$

- уравнение на абсолютното движение на точката М – определя се от уравнението на относителното движение на точката и уравнението на движението на относителната система спрямо абсолютната, т.е. в десните части на (3) и (2) всички параметри са функции на времето

- разлика с уравнение на движението на твърдо тяло
 - координатите (x', y', z') , определящи точката като точка от твърдото тяло, сега не са постоянни величини, а са функции на времето, характеризиращи относителното движение на точката
 - уравнение на преносното движение: чрез фиксиране на (x', y', z') в (2), т.е. функции на времето са само косинусите (α_{ij}) , изразени с Ойлеровите ъгли
 - траекторията на точката в абсолютната система се получава чрез изключване на времето от уравнението на абсолютното движение
 - траекторията на точката в относителната система се получава чрез изключване на времето от уравнението на относителното движение
 - заради движението на относителната система точката описва различни траектории спрямо всяка от двете системи
 пример: траекторията на моментния център на скоростите – неподвижна и подвижна центроида
- частни случаи:
 - равнинно движение (φ : ъгъл на завъртане между осите Ox и $O'x'$)

$$x = x_0 + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = y_0 + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \quad (4)$$
 - постъпателно движение (φ е нула при подходящ избор на осите Ox и $O'x'$)

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y' \quad (5)$$
 - въртене около неподвижна ос

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \quad (6)$$

2. Събиране на скорости.

- Векторна функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ на скаларен аргумент t .
- представяне в относителната система

$$\mathbf{r}(t) = r_x \mathbf{i}' + r_y \mathbf{j}' + r_z \mathbf{k}',$$

$\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ - единични вектори по координатните оси

- *абсолютна производна*: производна по времето в абсолютната система

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dr_y}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dr_z}{dt} \mathbf{k}' + r_x \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + r_y \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + r_z \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \quad (7)$$

- *относителна производна*: производна по времето, когато $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ са неизменни в относителната система

$$\frac{d'\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt} \mathbf{i}' + \frac{dr_y}{dt} \mathbf{j}' + \frac{dr_z}{dt} \mathbf{k}' \quad (8)$$

- от представянето

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'$$

за последните три събираеми на (7) се получава

$$r_x \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + r_y \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + r_z \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (r_x \mathbf{i}' + r_y \mathbf{j}' + r_z \mathbf{k}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\text{или} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (9)$$

- *абсолютната производна на вектор по времето е равна на сумата от относителната производна на този вектор и векторното произведение на ъгловата скорост на относителната система със самия вектор*
- *проекциите на вектора на относителната производна по осите на относителната система са равни на производните от проекциите на вектора на тези оси*

$$\left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} \right)_{x'} = \frac{dr_{x'}}{dt}, \quad \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} \right)_{y'} = \frac{dr_{y'}}{dt}, \quad \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt} \right)_{z'} = \frac{dr_{z'}}{dt} \quad (10)$$

- проекции на вектора на абсолютната производна по осите на относителната система

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{x'} &= \frac{dr_{x'}}{dt} + \omega_{y'}z' - \omega_{z'}y' \\ \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{y'} &= \frac{dr_{y'}}{dt} + \omega_{z'}x' - \omega_{x'}z' \\ \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{z'} &= \frac{dr_{z'}}{dt} + \omega_{x'}y' - \omega_{y'}x'\end{aligned}\tag{11}$$

- теорема за събиране на скоростите

$$\text{от } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}_a, \quad \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v}_0, \quad \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_r\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_r\tag{12}$$

- *преносна скорост* $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ (13)

смисъл: скоростта на фиксираната в относителната система точка, в която в дадения момент се намира движещата се (и спрямо относителната координатна система) разглеждана точка

или:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r\tag{14}$$

абсолютната скорост на точка е равна на сумата на преносната и относителната скорост

3. Събиране на ускорения.

- от израза за събиране на скоростите

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_r$$

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (15)$$

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' - \text{чрез локалното диференциране}$$

- означения: $\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{w}_a$; $\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{w}_0$ - в абсолютната система

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = \mathbf{w}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r,$$

$$\frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{w}_r; \quad \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_r; \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \left(\frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right)$$

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \quad (16)$$

- означения:

- $\mathbf{w}_a$: абсолютно ускорение
- $\mathbf{w}_r$: относително ускорение
- $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$: преносно ускорение
- $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$: Кориолисово ускорение

❖ смисъл на Кориолисовото ускорение:

- едното събираемо $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ следва от изчисление на абсолютната производна на относителната скорост $\mathbf{v}_r$; изразява изменението на вектора на относителната скорост $\mathbf{v}_r$, обусловено от завъртането му заедно с относителната координатна система

- второто събираемо $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ следва от изчисление на абсолютната производна на преносната скорост, обусловено от изменението на относителния радиус-вектор на точката

- теорема за събиране на ускоренията

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c \quad (17)$$

абсолютното ускорение е сума на относителното, преносното и Кориолисовото ускорение

- частни случаи:

- $\mathbf{w}_c = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$: постъпателно движение на относителната система
 $\Rightarrow \boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{v}_r$: движението на точката е успоредно на оста, около която се върти относителната система)
- големината на Кориолисовото ускорение е $w_c = 2\omega v_r$ (точката се движи в равнина, перпендикулярна на оста, около която се върти относителната система)

Пример: Лента се движи с постоянна скорост „с“ между два барабана, като се размотава от десния и се намотава на левия. По лентата се записват сигнали от регистриращо устройство, снабдено с писец, който извършва вертикални колебания, дадени със закона $x = 0; y = a \sin(\omega t + \alpha)$. Да се намерят уравненията на движение на писеца относно движещата се лента и уравнението на изчертаната на лентата крива, т.е. относителната траектория.

Системата $O'x'y'$ се движи спрямо системата Oxy постъпателно, така че $0 = x_0 + x', y = a \sin(\omega t + \alpha) = y_0 + y'$

В случая $x_0 = -ct; y_0 = 0$

тогава $x' = ct, y' = a \sin(\omega t + \alpha)$

Относителната траектория, изчертана на лентата, се явява синусоида с уравнение $y' = a \sin\left(\frac{\omega x'}{c} + \alpha\right)$

Амплитудата и фазата на записваните колебания се предават без изкривяване, докато честотата е свързана със скоростта „с“.