

ЛЕКЦИЯ 6

Аналитична механика

Съдържание

1. Поле на ускоренията на равнинна фигура. Моментен център на ускоренията.
2. Въртене на тяло около неподвижна точка. Ойлерови ъгли.
3. Поле на скоростите в твърдо тяло, въртящо се около неподвижна точка.
4. Моментна ос на въртене на твърдо тяло.
5. Аксоиди.

1. Поле на ускоренията на равнинна фигура.

- ускорението – производна по времето от скоростта:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad (1)$$

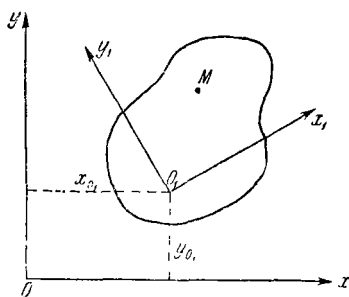
- означения

- постъпателно ускорение: $\mathbf{w}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}$
- въртеливо ускорение: $\mathbf{w}^{(B)} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'$
- центростремително ускорение: $\mathbf{w}^{(C)} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$

$$\text{но } \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad \mathbf{w}^{(C)} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}') \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}' = -\omega^2 \mathbf{r}'$$

- ускорението на произволна точка при равнинно движение е векторна сума на постъпателното ускорение (на полюса), въртливото ускорение (около полюса) и центростремителното ускорение (към полюса)

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}^{(B)} + \mathbf{w}^{(C)} = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' - \omega^2 \mathbf{r}' \quad (2)$$



фиг.1

- проекции на ускорението в неподвижната координатна система от $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, т.е. координатите на $\mathbf{r}'$ са $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(x - x_0, y - y_0)$

$$w_x = \ddot{x}_0 - \ddot{\phi}(y - y_0) - \dot{\phi}^2(x - x_0) \quad (3)$$

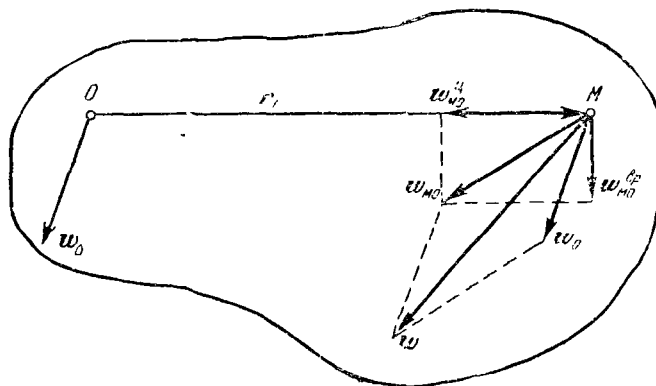
$$w_y = \ddot{y}_0 + \ddot{\phi}(x - x_0) - \dot{\phi}^2(y - y_0)$$

- проекции на ускорението в подвижната координатна система

$$w_{x'} = w_{0x'} - \ddot{\phi} y' - \dot{\phi}^2 x' \quad (4)$$

$$w_{y'} = w_{0y'} + \ddot{\phi} x' - \dot{\phi}^2 y'$$

- при зададено движение – координатите на полюса и ъгъла на въртене като известни функции на времето, величините в десните страни на (3) и (4) могат да се определят
- означения: (фиг.2)



фиг.2

- ускорения на точки O и M: $\mathbf{w}_O$ и $\mathbf{w}_M$
- геометрична сума на векторите на въртеливото и центростремителното ускорение на точка M, когато за полюс е избрана точка O: $\mathbf{w}_{OM}$

$$\mathbf{w}_{OM} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{OM} - \omega^2 \mathbf{r}_{OM}, \quad (5)$$

където:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{OM}^{(B)} &= \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{OM}, & |\mathbf{w}_{OM}^{(B)}| &= \varepsilon r_{OM} \\ \mathbf{w}_{OM}^{(C)} &= -\omega^2 \mathbf{r}_{OM}, & |\mathbf{w}_{OM}^{(C)}| &= \omega^2 r_{OM} \end{aligned}$$

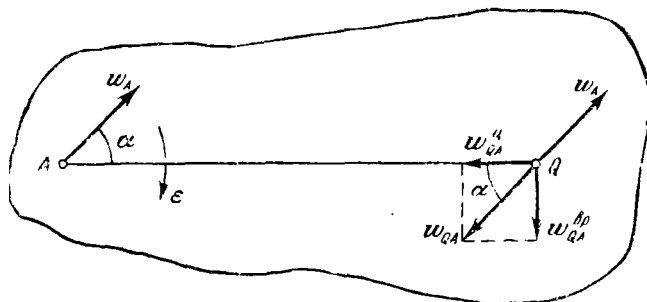
като двата вектора са перпендикулярни

или

$$\mathbf{w}_M = \mathbf{w}_O + \mathbf{w}_{OM} = \mathbf{w}_O + \mathbf{w}_{OM}^{(B)} + \mathbf{w}_{OM}^{(C)} \quad (6)$$

$$w_{OM} = r_{OM} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} - \text{големина на вектора } \mathbf{w}_{OM}$$

- моментен център на ускоренията
 - нека α е ъгълът между центростремителното и пълното ускорение на точка Q (полюс - A) и $\mathbf{w}_{QA}$ е геометричната сума на векторите на въртеливото и центростремителното ускорение на точката Q (фиг.3)

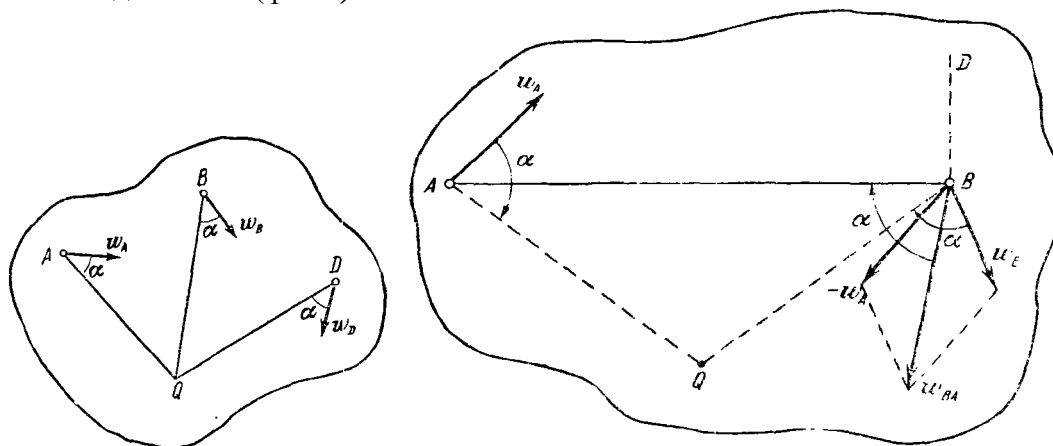


фиг.3

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_{QA}^{(B)}}{w_{QA}^{(C)}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad w_{QA} = r_{QA} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

- дефиниране на отсечка QA, така че $QA = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$
- при известен вектор на $\mathbf{w}_A$ от A на второто рамо на ъгъл α (първо рамо на ъгъла е направлението на $\mathbf{w}_A$) се нанася QA
- за големините на векторите е в сила: $w_{QA} = r_{QA} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A$

- избиране на ориентирания ъгъл (знак минус при ускорително и плюс при закъснително движение), така че $\mathbf{w}_{QA} = -\mathbf{w}_A$
- тогава $\mathbf{w}_Q = \mathbf{w}_A + \mathbf{w}_{QA} = \mathbf{w}_A - \mathbf{w}_A = \mathbf{0}$
- съществува точка, чието ускорение е нула - моментен център на ускоренията; за определянето му е достатъчно да бъде известно ускорението на една точка и ъгълът α
- определяне на моментния център на ускоренията по известни ускорения на две точки (фиг.4)



фиг.4

- поле на ускоренията
 - нека Q е моментен център на ускоренията, избран за полюс
 - тогава ускорението на произволна точка B:

$$\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_{QB} = \mathbf{w}^{(B)}_{QB} + \mathbf{w}^{(C)}_{QB} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{QB} - \omega^2 \mathbf{r}_{QB} \quad (7)$$

- въртеливото ускорение е вектор, перпендикулярен на радиус-вектора на точката относно моментния център на ускоренията; посоката му съвпада с посоката на въртенето при ускорително въртене и е противоположна при закъснително
- центростремителното ускорение е вектор, насочен винаги към моментния център на ускоренията
- пълното ускорение на произволна точка е пропорционално на разстоянието от точката до моментния център на ускоренията и (за всички точки) сключва един и същи ъгъл с радиус-вектора на точката относно моментния център на ускоренията

- разлика между въртливо ускорение $\mathbf{w}^{(B)}$ и тангенциално ускорение $\mathbf{w}_\tau$:
 - тангенциалното е по допирателната към траекторията на разглежданата точка и е перпендикулярно на радиус-вектора на точката относно моментния център на скоростите
 - докато въртливото е перпендикулярно на радиус-вектора на точката относно моментния център на ускоренията
- разлика между центростремителното ускорение $\mathbf{w}^{(C)}$ и нормалното ускорение $\mathbf{w}_n$:
 - нормалното ускорение е по главната нормала към траекторията на разглежданата точка
 - центростремителното ускорение е по направление на радиус-вектора на точката относно моментния център на ускоренията
- радиус-вектор моментния център на ускоренията $\mathbf{r}_Q$ в неподвижната координатна система и $\mathbf{r}'_Q$ в подвижната координатна система

$$\mathbf{w}_Q = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'_Q - \omega^2 \mathbf{r}'_Q = \mathbf{0} \quad (8)$$

след векторно умножение отляво с $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{w}_Q = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'_Q) - \omega^2 (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'_Q) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{w}_O + (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}'_Q) \boldsymbol{\varepsilon} - (\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{r}'_Q - \omega^2 (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'_Q) ;$$

отчитане на $(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}'_Q) = 0$; $(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon^2$; $(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'_Q) = \omega^2 \mathbf{r}'_Q - \mathbf{w}_O$,

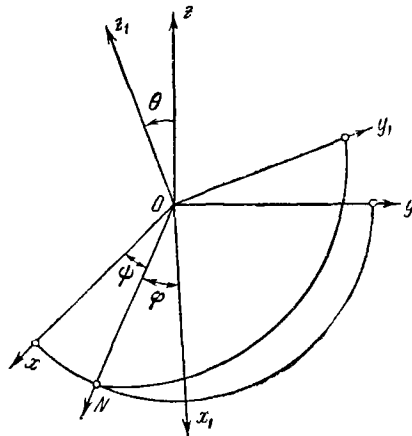
$$\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{w}_O - (\varepsilon^2 + \omega^4) \mathbf{r}'_Q + \omega^2 \mathbf{w}_O = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}'_Q = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{w}_O + \omega^2 \mathbf{w}_O}{\varepsilon^2 + \omega^4} , \quad \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_O + \mathbf{r}'_Q \quad (9)$$

2. Въртене на тяло около неподвижна точка. Ойлерови ъгли.

- Ъгли на Ойлер (ψ, θ, φ) - параметри, еднозначно определящи положението на твърдо тяло с неподвижна точка

- ъгъл на прецесия: ψ
- ъгъл на нутация: θ
- ъгъл на чисто въртене: φ



фиг.5

- разглеждат се две координатни системи с общо начало (фиг.5):
 - Oxy : неподвижна координатна система
 - $Ox'y'$: координатна система, фиксирана в тялото; подвижна
 - ON : пресечница на равнините Oxy и $Ox'y'$; *възлова линия*
- единични вектори по осите на координатни системи:
 - $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: за неподвижната координатна система Oxy
 - $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$: за подвижната координатна система $Ox'y'$
 - $\mathbf{n}$: по възловата линия
 - $\mathbf{n}_1$: по ос ON_1 , перпендикулярна на ON и лежаша в Oxy
 - $\mathbf{n}'_1$: по ос ON'_1 , перпендикулярна на ON и лежаша в $Ox'y'$
- последователност от три завъртания:
 - координатна система Oxy е завъртяна около оста Oz на ъгъл ψ , докато оста Ox съвпадне с оста ON
 - завъртане около ON на ъгъл θ , като оста Oz заеме положение Oz'
 - завъртане около Oz' на ъгъл φ , докато оста ON съвпадне с оста Ox'
- връзка между единичните вектори
 - при завъртане на ъгъл ψ около оста Oz

$$\mathbf{i} = \mathbf{n} \cos \psi - \mathbf{n}_1 \sin \psi \quad (10)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{n} \sin \psi + \mathbf{n}_1 \cos \psi \quad (11)$$

- при завъртане на ъгъл φ около Oz'

$$\mathbf{i}' = \mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{n}'_1 \sin \varphi \quad (12)$$

$$\mathbf{j}' = -\mathbf{n} \sin \varphi + \mathbf{n}'_1 \cos \varphi \quad (13)$$

- скалярни произведения на $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}'_1$:

$$\mathbf{nn} = 1, \quad \mathbf{nn}'_1 = 0, \quad \mathbf{nn}_1 = 0, \quad \mathbf{n}_1\mathbf{n}'_1 = \cos \theta \quad (14)$$

$$\mathbf{n}_1\mathbf{k}' = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \quad \mathbf{nk}' = 0, \quad \mathbf{kn}'_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

- косинуси на ъглите между единичните вектори на Oxy и $Ox'y'$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = \mathbf{ii}' &= (\mathbf{n} \cos \psi - \mathbf{n}_1 \sin \psi) (\mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{n}'_1 \sin \varphi) = \\ &= \mathbf{nn} \cos \psi \cos \varphi + \mathbf{nn}'_1 \cos \psi \sin \varphi - \mathbf{n}_1\mathbf{n} \sin \psi \cos \varphi - \mathbf{n}_1\mathbf{n}'_1 \sin \psi \sin \varphi = \\ &= \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta \end{aligned}$$

$$\alpha_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \alpha_{21} = \mathbf{ij}' &= (\mathbf{n} \cos \psi - \mathbf{n}_1 \sin \psi) (-\mathbf{n} \sin \varphi + \mathbf{n}'_1 \cos \varphi) = \\ &= -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{31} = \mathbf{ik}' &= (\mathbf{n} \cos \psi - \mathbf{n}_1 \sin \psi) \mathbf{k}' = -\mathbf{n}_1\mathbf{k}' \sin \psi = -\sin \psi \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = \\ &= \sin \psi \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{12} = \mathbf{ji}' &= (\mathbf{n} \sin \psi + \mathbf{n}_1 \cos \psi) (\mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{n}'_1 \sin \varphi) = \\ &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{22} = \mathbf{jj}' &= (\mathbf{n} \sin \psi + \mathbf{n}_1 \cos \psi) (-\mathbf{n} \sin \varphi + \mathbf{n}'_1 \cos \varphi) = \\ &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{32} = \mathbf{jk}' &= (\mathbf{n} \sin \psi + \mathbf{n}_1 \cos \psi) \mathbf{k}' = \mathbf{n}_1\mathbf{k}' \cos \psi = \cos \psi \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = \\ &= -\cos \psi \sin \theta \end{aligned}$$

$$\alpha_{13} = \mathbf{ki}' = \mathbf{k} (\mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{n}'_1 \sin \varphi) = \mathbf{kn}'_1 \sin \varphi = \sin \varphi \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \varphi \sin \theta$$

$$\alpha_{23} = \mathbf{kj}' = \mathbf{k} (-\mathbf{n} \sin \varphi + \mathbf{n}'_1 \cos \varphi) = \mathbf{kn}'_1 \cos \varphi = \cos \varphi \sin \theta$$

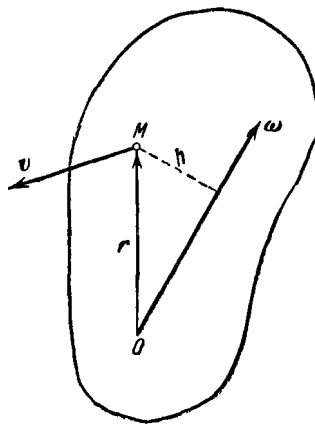
$$\alpha_{33} = \mathbf{k}\mathbf{k}' = \cos \theta$$

- принципи на избор на система на Ойлерови ъгли:
 - избират се две *основни оси* съответно от неподвижната и подвижната координатна система Ox и $Ox'y'$ (в разглеждания случай Oz и Oz')
 - *основни равнини* : равнините, перпендикулярни на основните оси (в разглеждания случай Oxy и $Ox'y'$); пресечницата на основните равнини е линията на възлите
 - *отчетни оси*: оси в системите Oxy и $Ox'y'$, различни от основните оси

3. Поле на скоростите в твърдо тяло, въртящо се около неподвижна точка.

- теорема на Ойлер: *Всяко преместване на твърдо тяло, имащо неподвижна точка, може да се осъществи чрез завъртане около ос, която минава през тази точка*
- представяне на преместване чрез вектора на малкото завъртане (фиг.6)

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$$



фиг.6

- две последователни малки завъртания могат да се представят с едно еквивалентно на тях завъртане, равно на векторната сума на двете завъртания

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2$$

- уравнение на движението : Ойлеровите ъгли – зададени функции на времето

$$\psi = f_1(t), \theta = f_2(t), \varphi = f_3(t) \quad (15)$$

- нека Δt е интервал, за който се извършва преместването ;
скоростта – граница на малкото преместване

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \times \mathbf{r} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \right) \times \mathbf{r} \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \quad - \text{ вектор на ъгловата скорост; посоката му съвпада с } \\ \text{границното положение на оста на завъртане за} \\ \text{безкрайно малък интервал от време}$$

или

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (17)$$

4. Моментна ос на въртене на твърдо тяло.

- ❖ големината на вектора на ъгловата скорост не може да се разглежда като производна на някакъв ъгъл (както при въртене около неподвижна ос). Направлението на вектора се изменя с времето – *моментна ос*

- моментна ос – геометрично място на точките, имащи в даден момент нулева скорост
- уравнение на моментната ос: $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$
 - векторите $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}$ са успоредни
 - имат общо начало: неподвижната точка

- в неподвижната координатна система

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}$$

- в подвижната координатна система

$$\frac{x'}{\omega_{x'}} = \frac{y'}{\omega_{y'}} = \frac{z'}{\omega_{z'}}$$

- определяне на скоростта при дадено уравнение на движението

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 \quad (18)$$

където:

$\boldsymbol{\omega}_1$ - ъглова скорост при завъртане около оста Oz (изменение на ψ)

$\boldsymbol{\omega}_2$ - ъглова скорост при завъртане около оста на възлите (изменение на θ)

$\boldsymbol{\omega}_3$ - ъглова скорост при завъртане около оста Oz' (изменение на φ)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\varphi} \mathbf{k}'$$

- проектиране (18) на неподвижните оси:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y &= -\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (19)$$

- проектиране (18) на подвижните оси:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_{y'} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (20)$$

- големина на моментната ъглова скорост:

$$\omega^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta \quad (21)$$

- изразите (19) и (20), заедно с формулите за косинусите на ъглите между осите на неподвижната и подвижната координатни системи описват *разпределението на скоростите в твърдо тяло с неподвижна точка*

5. Аксоиди.

- подвижен аксоид – повърхността, образувана от моментната ос в подвижната координатна система, т.е. в самото тяло

- неподвижен аксоид – повърхността, образувана от моментната ос в неподвижната координатна система, т.е. в неподвижното пространство
- моментната ос е обща права на двата аксоида – подвижния и неподвижния, във всеки момент
- сравнение с центроидите:

двата аксоида са конични повърхнини с общ връх – неподвижната точка и тези конични повърхнини се допират в моментната ос

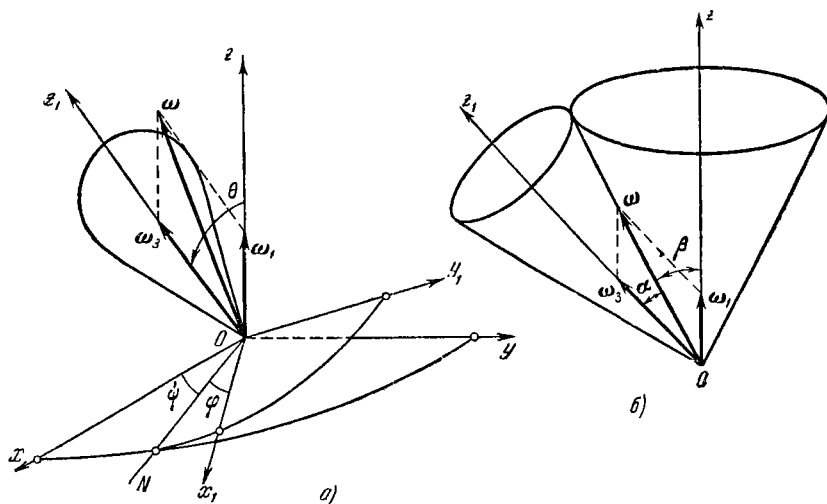
- при движение на тяло с неподвижна точка подвижният аксоид се търкаля без хлъзгане по неподвижния аксоид

6. Пример.

Твърдо тяло се върти около неподвижна точка съгласно уравненията

$$\psi = 2t, \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = 30t \quad (\text{фиг.7}) . \text{ Да се определи моментната ъглова скорост на}$$

тялото и уравненията на аксоидите .



фиг.7

Производните на Ойлеровите ъгли са:

$$\dot{\psi} = 2, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = 30$$

Моментната ъглова скорост: $\omega = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{k}' = 2 \mathbf{k} + 30 \mathbf{k}'$

Проекциите върху неподвижните оси:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi = 30 \sin 2t \sin \frac{\pi}{6} \\
\omega_y &= \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi = -30 \cos 2t \sin \frac{\pi}{6} \quad (*19) \\
\omega_z &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = 30 \cos \frac{\pi}{6} + 2
\end{aligned}$$

Проекциите върху подвижните оси:

$$\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi = 2 \sin \frac{\pi}{6} \sin 30t \\
\omega_{y'} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos 30t \quad (*20) \\
\omega_{z'} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = 2 \cos \frac{\pi}{6} + 30
\end{aligned}$$

Моментната ъглова скорост:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta = 4+900+2 \cdot 30 \cdot \sqrt{3}; \\
\omega &\approx 31.8 \text{ s}^{-1}
\end{aligned}$$

Уравнение на моментната ос в неподвижната координатна система:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \quad \frac{x}{15 \sin 2t} = \frac{y}{-15 \cos 2t} = \frac{z}{28}$$

Уравнение на моментната ос в подвижната координатна система:

$$\frac{x'}{\omega_{x'}} = \frac{y'}{\omega_{y'}} = \frac{z'}{\omega_{z'}} \quad \frac{x'}{\sin 30t} = \frac{y'}{\cos 30t} = \frac{z'}{31.8}$$

Уравненията на аксоидите се получават от уравненията на моментната ос чрез изключване на времето:

- уравнение на неподвижния аксоид: $x^2 + y^2 - \left(\frac{15z}{28}\right)^2 = 0$
- уравнение на подвижния аксоид: $x'^2 + y'^2 - \left(\frac{15z}{31.8}\right)^2 = 0$