

ЛЕКЦИЯ 4

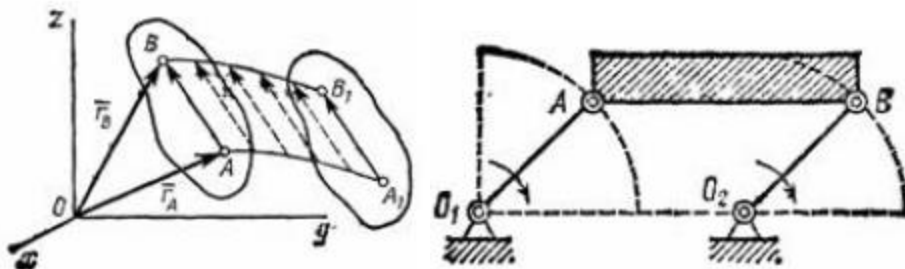
Аналитична механика

Съдържание

1. Постъпателно движение на твърдо тяло.
2. Въртене на тяло около неподвижна ос.
3. Ъглова скорост и ъглово ускорение.
4. Скорост и ускорение на точки на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.

1. Постъпателно движение на твърдо тяло.

- всяка права, минаваща през две точки от тялото, остава успоредна на себе си по време на движението
- точките от постъпателно движещо се тяло: произволни криволинейни траектории, едни и същи за всички точки; във всеки момент от време точките имат еднакви скорости и ускорения



фиг.1

нека A и B са точки от тялото и имат някакво положение в момент t и положение A_1 и B_1 в положение $t + \Delta t$.

от определението на тялото като абсолютно твърдо: отсечките AB и A_1B_1 имат равни дължини

от определението за постъпателно движение: $AB \parallel A_1B_1$

$\Rightarrow ABA_1B_1$ е успоредник $\Rightarrow \vec{AA_1} = \vec{BB_1}$

- конгруентни криви – траекториите на точките от постъпателно движещо се твърдо тяло

нека M и O' са точки от тялото, а O - произволна неподвижна точка

радиус-векторът на M относно O е

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}' \quad (1)$$

траекторията на M се получава от траекторията на O' в резултат на преместване на вектор $\mathbf{r}'$, който е постоянен по големина и посока

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} \quad (2)$$

скоростите на всички точки от постъпателно движещо се тяло във всеки момент от време са равни по големина и посока

аналогично

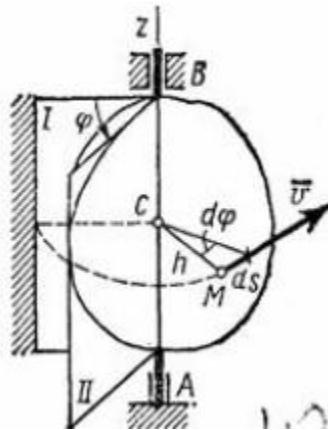
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} \Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{w}_{O'} \quad (3)$$

ускоренията на всички точки от постъпателно движещо се тяло във всеки момент от време са равни по големина и посока

- постъпателното движение на твърдо тяло напълно е определено, ако е известно движението на една произволна негова точка

2. Въртене на тяло около неподвижна ос.

- движение, при което две точки от тялото остават неподвижни
- ос на въртене – правата през неподвижните точки



фиг.2

- нека за определеност ос на въртене е оста Oz
 - неподвижна равнина Π и свързана с тялото (подвижна) равнина Π' минават през оста Oz
 - двустенният ъгъл φ между равнините напълно определя положението на тялото
- уравнение на движението на тялото

$$\varphi = f(t) \quad (4)$$

3. Ъглова скорост и ъглово ускорение.

- ъглова скорост на тялото ω

$$\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad , \quad (5)$$

където φ_1 и φ_2 са стойности на ъгъла φ в моментите t_1 и t_2

- мерни единици: $[s^{-1}]$ или [rpm] – обороти в минута
- връзка $\omega = \frac{\pi n}{30}$ n - брой обороти в минута

- ъглова скорост в даден момент

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = f'(t) \quad (6)$$

- средно и моментно ъглово ускорение

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad , \quad \varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (7)$$

- равнопроменливо въртене (постоянно ъглово ускорение)

$$d\omega = \varepsilon dt \quad \Rightarrow \quad \omega = \varepsilon t + \omega_0; \quad \omega_0 - \text{стойност при } t = 0 \quad (8)$$

$$d\varphi = \omega dt \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0; \quad \varphi_0 - \text{стойност при } t = 0 \quad (9)$$

- след изразяване на времето от (8) и заместване в (9):

$$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon} \quad (10)$$

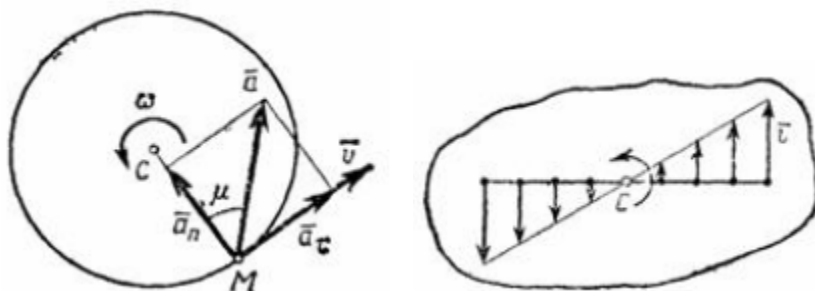
4. Скорост и ускорение на точки на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.

- траектория на точка от твърдо тяло, въртящо се около ос – окръжност с радиус разстоянието h от точката до оста; отчитане – чрез дъга

$$\sigma = h\varphi$$

$$v = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt}(h\omega) = h \frac{d\varphi}{dt} = h\omega \quad - \quad \text{линейна скорост}$$

- *разпределение на скоростите в тялото*: пропорционални на разстоянието до оста и перпендикулярни на равнината, минаваща през оста на въртене и съответната точка
- сравнение с движението по окръжност и общите изрази за проекциите на ускорението по допирателната към траекторията и по главната нормала



фиг.3

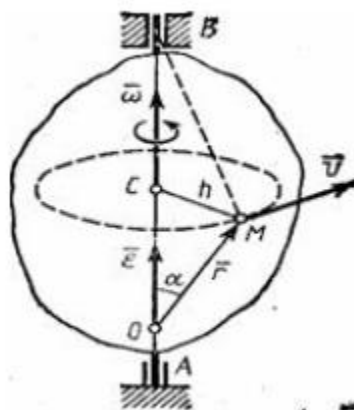
$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d}{dt}(h\omega) = \varepsilon h, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h \quad (12)$$

- термини: тангенциално и нормално (въртливо и центростремително или въртливо и осестремително)
- аналогични изрази за големината на ускорението и ъгъла между големините на центростремителното и пълното ускорение

$$w = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (13)$$

- частни случаи
- равномерно въртене: $\varepsilon = 0$
- минимална или максимална ъглова скорост: $w_r = 0$
- минимална или максимална стойност на ъгъла: $w_n = 0$

5. Векторни изрази за скоростите и ускоренията на точки на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.



фиг.4

- вектор на ъгловата скорост : $\boldsymbol{\omega}$, където $\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|$; посока – по оста на въртене

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (14)$$

- псевдовектори: посоката им се изменя на противоположна в зависимост от записването им в лява или дясна координатна система
- проекции на скоростта в Декартова система (формули на Ойлер)
 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x$$

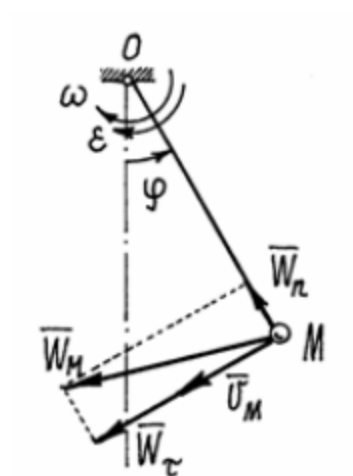
- вектор на ускорението:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow \mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (15)$$

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (16)$$

- въртливо и центростремително ускорение $\mathbf{w}^r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$, $\mathbf{w}^n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$

Пример: Махало ОМ с дължина $l = 1\text{m}$ се люлее във вертикална равнина, като ъгълът на колебание се изменя по закона $\varphi = 0.5\sin 2t$.



фиг.5

ъглова скорост:

$$\omega = \dot{\varphi} = \cos 2t$$

ъглово ускорение:

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = -2\sin 2t$$

при $t = 1\text{s}$:

$$\varphi = 0.5\sin 2 = 0.45\text{ rad} \approx 26^\circ,$$

$$\omega = \dot{\varphi} = \cos 2 = -0.42\text{ s}^{-1}$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = -2\sin 2 = -1.82\text{ s}^{-2}$$

скорост на точка М:

$$v_M = l\omega = 1.042 = 0.42\text{ ms}^{-1}$$

нормално ускорение: $w_n = l \omega^2 = 1.0.42^2 = 0.176 \text{ ms}^{-2}$

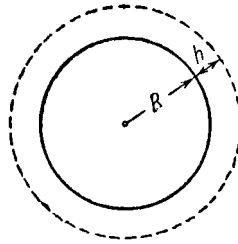
тангенциално ускорение: $w_\tau = l \varepsilon = 1.1.82 = 1.82 \text{ ms}^{-2}$

големина на пълното ускорение : $w_M = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = 1.828 \text{ ms}^{-2}$

Два типа задачи при движение на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.

- I. Дадено е уравнението на движение. Да се определи ъгловата скорост, ъгловото ускорение, скоростта и ускорението на точка от твърдото тяло.
 1. Избор на координатна система, в която една от осите съвпада с оста на въртене.
 2. Съставяне на уравнението на движение – зависимост на ъгъла на завъртане от времето.
 3. Диференциране по времето на ъгъла на завъртане – определяне на проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене.
 4. Определяне на втората производна на ъгъла на завъртане - определяне на проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене.
 5. Чрез проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене – изчислява се линейната скорост и нормалното ускорение на точка от тялото.
 6. Чрез проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене – изчислява се тангенциалното ускорение на точка от тялото.
 7. Чрез тангенциалното и нормалното ускорение - изчислява се пълното ускорение по големина и посока на точка от тялото.
- II. Дадено е ъгловото ускорение или ъгловата скорост на твърдото тяло. Да се определи уравнението на движение, скоростта и ускорението на точка от твърдото тяло.
 1. Интегриране на израза за проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене – определяне на проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене; интеграционната константа се намира от дадените начални условия.
 2. Интегриране на израза за проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене - определяне на уравнението на движение на тялото; интеграционната константа се намира от дадените начални условия.
 3. Чрез проекцията на ъгловата скорост на оста на въртене – изчислява се линейната скорост и нормалното ускорение на точка от тялото.
 4. Чрез проекцията на ъгловото ускорение на оста на въртене – изчислява се тангенциалното ускорение на точка от тялото.
 5. Чрез тангенциалното и нормалното ускорение - изчислява се пълното ускорение по големина и посока на точка от тялото.

Задача 1. Изкуствен спътник прави една обиколка на Земята за 1 ч 36 мин. Да се определи честотата му, скоростта и ускорението му, ако орбитата е кръгова, височината над земната повърхност е $h=970$ км, радиусът на Земята – $R=6370$ км.



честота: $1 \text{ ч } 36 \text{ мин} = 96 \text{ мин}$

$$n = \frac{1}{96} \text{ об/мин}$$

ъглова скорост:

$$\omega = \frac{1 \cdot 2\pi}{96 \cdot 60} \text{ сек}^{-1} = \frac{\pi}{2880} \text{ сек}^{-1} = 0,00109 \text{ сек}^{-1}$$

ъглова скорост на Земята: (за 24 ч – един оборот около оста си)

$$n_1 = \frac{1}{24} \text{ об/час} = \frac{1}{24 \cdot 60} \text{ об/мин} = \frac{1}{1440} \text{ об/мин}$$

отношение на честотите:

$$\frac{n}{n_1} = \frac{24 \cdot 60}{96} = 15$$

скорост на спътника:

$$v = (h + R) \omega$$

$$v = (970 + 6370) \frac{\pi}{2880} \text{ км/сек} = 8 \text{ км/сек}$$

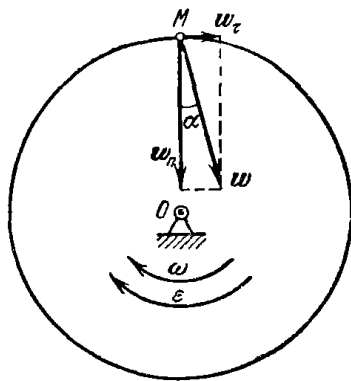
тангенциално ускорение: нула (ъгловата скорост на Земята е постоянна)

нормално ускорение: (насочено към центъра на Земята)

$$w = w_n = (h + R) \omega^2 = (970 + 6370) \frac{\pi^2}{2880^2} = 0,00874 \text{ км/сек}^2$$

$$= 8,74 \text{ м/сек}^2$$

Задача 2. При пускане на електромотор ъгловото му ускорение расте пропорционално на времето и след 6 сек ъгловата му скорост стига 36π [1/сек]. Да се намери броят на оборотите за това време, скоростта и ускорението на точка М в третата секунда. Диаметър на ротора – 20 см.



по условие

$$\epsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = kt,$$

интегриране и отчитане на началните условия, както и стойността в шестата секунда

$$\omega_z = k \frac{t^2}{2} + C \quad \omega_z = \frac{kt^2}{2} \quad 36\pi = \frac{k \cdot 6^2}{2}$$

коефициентът на пропорционалност и ъгловата скорост са:

$$k = 2\pi \quad \omega_z = \pi t^2 \quad \omega_z = \pi t^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ сек}^{-1}$$

големината на линейната скорост на точката:

$$v = |v_z| = |\omega_z| \cdot \frac{d}{2} = 9\pi \cdot 10 = 90\pi \text{ см/сек}$$

нормалното ускорение:

$$w_n = \omega^2 \frac{d}{2} = 81\pi^2 \cdot 10 = 810\pi^2 \text{ см/сек}^2$$

тангенциално ускорение:

$$w_\tau = \epsilon_z \frac{d}{2} = 2\pi t \frac{d}{2} = 20\pi \cdot 3 = 60\pi \text{ см/сек}^2$$

пълно ускорение:

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_t^2} = 30\pi \sqrt{729\pi^2 + 4} \text{ cm/sec}^2$$

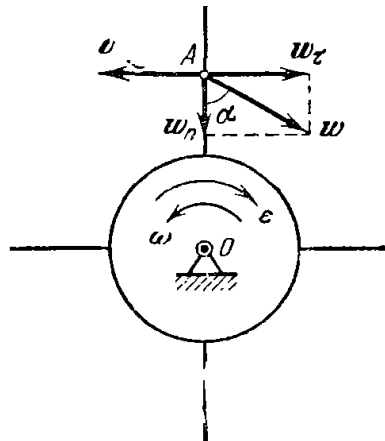
ъгъл между пълното ускорение и радиуса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_t}{w_n} = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2} = \frac{2\pi t}{(\pi t^2)^2} = \frac{2}{\pi t^3} = \frac{2}{27\pi} = 0,0236.$$

Задача 3. Вал с присъединени към него пластинки се върти по закона

$$\varphi = a \ln \left(1 + \frac{\omega_0 t}{a} \right)$$

свързващ ъгъла на въртене на вала с времето; останалите коефициенти са постоянни. Да се намери ъгловата скорост и ъгловото ускорение на вала, скоростта и ускорението на точка А от пластиката, намираща се на разстояние R от оста на въртене.



ъглова скорост:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\omega_0}{a} t}$$

ъглово ускорение:

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = - \frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0}{a} t\right)^2} \cdot \frac{1}{a}$$

или

$$\varepsilon_z = - \frac{\omega_z^2}{a}$$

скорост на точката А:

$$v = R\omega = \frac{R\omega_0}{1 + \frac{\omega_0}{a} t}$$

нормално ускорение:

$$\omega_n = R\omega^2 = \frac{R\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0}{a} t\right)^2}$$

тангенциално ускорение:

$$\omega_\tau = R\varepsilon_z = - R \frac{\omega_z^2}{a} = - \frac{R}{a} \frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0}{a} t\right)^2}$$

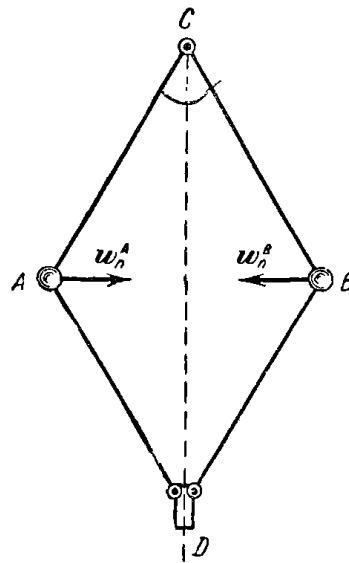
пълно ускорение:

$$\omega = \sqrt{\omega_n^2 + \omega_\tau^2} = \frac{R\omega_0^2}{a} \sqrt{1 + a^2} = \frac{R}{a} \frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\omega_0}{a} t\right)^2} \sqrt{1 + a^2}.$$

Ъгъл между пълното ускорение и радиуса, свързващ точката с оста на въртене: (Ъгълът е в противоположна посока на посоката на въртене)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon_z}{\omega^2} = - \frac{1}{a}$$

Задача 4. Регулятор се върти с постоянна ъглова скорост около вертикална ос. В даден момент ъгълът ACB се оказал 60 градуса, а ускорението на кълбата А и В – равни на 100g. Всички пръти AC, BC, AD, BD са с дължина $l=10$ см. Да се определи колко оборота в минута прави регулаторът.



ускорение на кълбата: (r – разстояние до оста на въртене)

$$w_n = r\omega^2 = l \sin 30^\circ \omega^2$$

по условие

$$w_n = 100g$$

ъглова скорост:

$$\omega = \sqrt{\frac{100g}{l \sin 30^\circ}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 980}{10 \cdot 0,5}} = 140 \text{ сек}^{-1}$$

изразяване на ъгловата скорост в обороти в минута:

$$n = \omega \cdot \frac{30}{\pi} \text{ об/мин} = \frac{140 \cdot 30}{3,14} = 1340 \text{ об/мин}$$