

ЛЕКЦИЯ 3

Аналитична механика

Съдържание

1. Криволинейни координати на точка.
2. Координатни системи.
3. Скорост и ускорение на точка в ортогонални криволинейни координати.
4. Скорост и ускорение на точка в сферични координати.
5. Движение на точка по окръжност.
6. Хармонично движение.

1. Криволинейни координати на точка.

- обобщени координати (q_1, q_2, q_3)

всяка тройка числа, еднозначно определящи положението на точка в тримерното пространство

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(M) = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) \quad (1)$$

- координатна линия

изменение само на едно от числата, докато другите две са фиксирани

$$\text{линия } (q_1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_{20}, q_{30})$$

$$\text{линия } (q_2) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_{10}, q_2, q_{30})$$

$$\text{линия } (q_3) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_{10}, q_{20}, q_3)$$

- координатни оси

допирателните към координатните линии в дадена точка с посока, съответстваща на нарастването на съответните координати

единични вектори по координатните оси $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$

- координатни повърхнини

изменение само на две координати, докато третата е фиксирана

$$\text{повърхнина } (q_1 q_2) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_{30})$$

$$\text{повърхнина } (q_2 q_3) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_{10}, q_2, q_3)$$

$$\text{повърхнина } (q_3 q_1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_{20}, q_3)$$

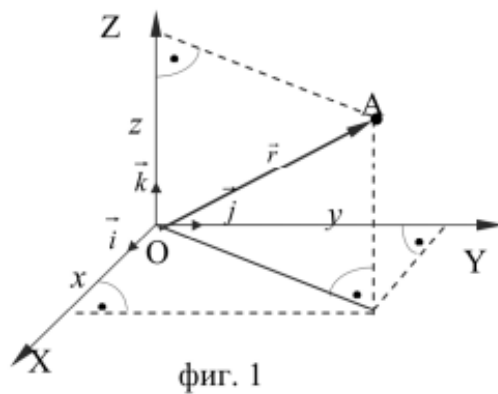
- координатни равнини

допирателните равнини към координатните повърхнини в дадена точка

2. Координатни системи.

- Декартова

$$(q_1, q_2, q_3) = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$$



- цилиндрична

$$(q_1, q_2, q_3) = (\rho, \varphi, z) \quad \rho \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

- сферична

$$(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi) \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

- коефициенти на Ламе

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right)^2} = H_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Единични вектори по координатните оси

$$\mathbf{k}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}, \frac{\partial x_2}{\partial q_i}, \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right) \quad (i = 1, 2, 3)$$

- направляващи (директорни) косинуси на ъглите между единичните вектори на криволинейните оси $[q_i]$ и осите на Декартова координатна система $[x_j]$

$$\cos(\mathbf{k}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{e}_j = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{e}_j = \frac{1}{H_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

- таблица на директорните косинуси на ъглите между криволинейните оси $[q_i]$ и осите на Декартова координатна система $[x_j]$

	$[q_1]$	$[q_2]$	$[q_3]$
$[x_1]$	$\frac{1}{H_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2} \frac{\partial x_1}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3} \frac{\partial x_1}{\partial q_3}$
$[x_2]$	$\frac{1}{H_1} \frac{\partial x_2}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2} \frac{\partial x_2}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3} \frac{\partial x_2}{\partial q_3}$
$[x_3]$	$\frac{1}{H_1} \frac{\partial x_3}{\partial q_1}$	$\frac{1}{H_2} \frac{\partial x_3}{\partial q_2}$	$\frac{1}{H_3} \frac{\partial x_3}{\partial q_3}$

- ортогонална криволинейна координатна система

$$\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = 0 \quad (i \neq j) \quad \frac{\partial x_1}{\partial q_i} \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \frac{\partial x_2}{\partial q_j} + \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \frac{\partial x_3}{\partial q_j} = 0$$

- диференциал на дъга от произволна крива в криволинейна координатна система

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3$$

$$(ds)^2 = |d\mathbf{r}|^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 \right)^2$$

При фиксиране на две от координатите и изменение само на една

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3,$$

$ds_i = H_i dq_i$ - диференциал на дъгите по отделните координатни линии

Примери:

- цилиндрична система: $ds_1 = d\rho, \quad ds_2 = \rho d\varphi, \quad ds_3 = dz$

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1$$

- сферична система: $ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\theta, \quad ds_3 = r \sin \theta d\varphi$

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r \sin \theta$$

3. Скорост и ускорение на точка в ортогонални криволинейни координати.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \quad (2)$$

обобщени скорости $\dot{q}_i \quad (i = 1, 2, 3)$

$$\text{от (2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$$

за пълната производна по времето на $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_i} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2 \partial q_i} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_3 \partial q_i} \dot{q}_3 \quad (3)$$

От (2) за частната производна на скоростта по обобщената координата (q_i)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_3} \dot{q}_3 \quad (4)$$

$$\text{От (3) и (4)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \quad (5)$$

проекции на ускорението по координатните оси (q_i)

$$\text{с единични вектори} \quad \mathbf{k}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$w_{q_i} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{k}_i = \frac{1}{H_i} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \right], \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6)$$

Но $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$, т.е.

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] = \frac{1}{H_i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \right], \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

за проекциите на ускорението по координатните оси (q_i) е необходимо определянето на квадрата на скоростта

4. Скорост и ускорение на точка в сферични координати.

$$(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi) \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

- координатни линии

линия (q_1) : (r) -лъч с начало началото на координатната система

линия (q_2) (θ) - окръжност с радиус r_0

линия (q_3) (φ) - окръжност с радиус $r_0 \sin \theta_0$

- координатни оси

допирателните към координатните линии в дадена точка с посока, съответстваща на нарастването на съответните координати

ос (q_1) : съвпада с координатната линия (r)

ос (q_2) : допирателна към окръжността (θ) в разглежданата точка М

ос (q_3) допирателна към окръжността (φ) в разглежданата точка М

- координатни повърхнини

изменение само на две координати, докато третата е фиксирана

повърхнина $(q_1 q_2)$ $\varphi = \text{const}$ - равнина през оста Oz и точка М

повърхнина $(q_2 q_3)$ $r = \text{const}$ - сфера с център О и радиус r

повърхнина $(q_3 q_1)$ $\theta = \text{const}$ - конична повърхнина с ос Oz и ъгъл на образуващата θ

- координатни равнини

допирателните равнини към координатните повърхнини в точка М

- връзка между Декартовите координати и сферичните

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta \quad (8)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \dot{\theta} \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \cos \theta \dot{\theta} \sin \varphi + r \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi} \quad (9)$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}$$

коефициенти на Ламе

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta)^{1/2} = 1$$

$$H_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = (r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta)^{1/2} = r$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = (r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^{1/2} = r \sin \theta$$

компоненти на скоростта: $v_{q_i} = H_i \dot{q}_i \Rightarrow v_r = \dot{r}, v_\theta = r \dot{\theta}, v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$$

компоненти на ускорението:

$$w_r = \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \right] = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2$$

$$w_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \right] = \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) - r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) = r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - \frac{1}{2} r \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \right] = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{d}{dt} (\dot{\varphi} r^2 \sin^2 \theta) \right) = \ddot{\varphi} r \sin \theta + 2 \dot{\varphi} \dot{r} \sin \theta + 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} r \cos \theta$$

5. Движение на точка по окръжност.

свеждане към движение по координатна линия на сферична система

при $r = R = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2} = \text{const}$

компоненти на скоростта: $v_r = \dot{r} = \dot{R} = 0$, $v_\theta = R \dot{\theta} = 0$,

$$v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi} = R \dot{\varphi} = R \omega = v$$

компоненти на ускорението:

$$w_r = r \sin^2 \frac{\pi}{2} \dot{\phi}^2 = -R\omega^2 \quad (\text{посока на оста - противоположна})$$

$$w_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - \frac{1}{2}r\dot{\phi}^2 \sin 2\theta = 0$$

$$w_\phi = \ddot{\phi}r \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{r} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}r \cos \theta = \ddot{\phi}R = \dot{\omega}R = \varepsilon R$$

големина на ускорението: $w = \sqrt{w_r^2 + w_\phi^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

сравнение с разлагането по осите на естествения триедър $\mathbf{w} = \varepsilon R\boldsymbol{\tau} + R\omega^2\mathbf{n}$

6. Хармонично движение.

Точка М се движи по окръжност с постоянна ъглова скорост ω . Движението на нейната проекция върху един от диаметрите на окръжността – *хармонично движение*.

Закон за движението (ос x – избрана по диаметъра, движението - праволинейно)

$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

t - време, A - амплитуда (радиусът на окръжността),

ω - кръгова честота, α - начална фаза, T - период на движението: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$x(t+T) = x(t) \Rightarrow A \sin(\omega(t+T) + \alpha) = A \sin(\omega t + \alpha), \quad \omega(t+T) + \alpha = \omega t + \alpha + 2\pi$$

$\nu = \frac{1}{T}$ - честота

Точката описва отсечка с дължина $2A$ (размах на движението), в средата на която е координатното начало O .

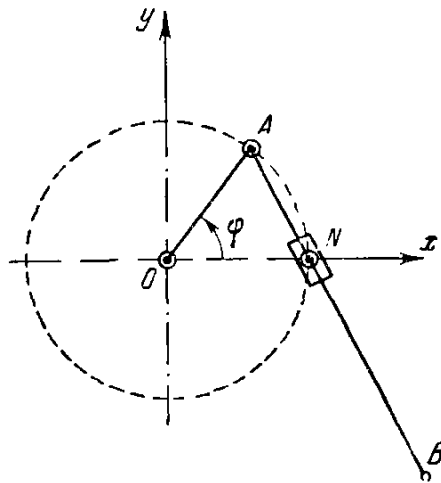
Скорост: $\dot{x} = v = A\omega \cos(\omega t + \alpha) = A\omega \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})$

Ускорение: $\ddot{x} = w = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$

Пример 1.

Механизъм с радиус $OA = r$ на окръжността, около която се върти точка A с ъгъл, изменящ се по закона kt ; $AB = l$, N – неподвижна точка.

Да се определи уравнението на движение на точка B , тангенциалното, нормалното и пълното ускорение, радиусът на кривината. Да се определят тези величини при ъгли 0 и 180 градуса.



Координати на точка B : $x = r \cos kt + l \sin \frac{kt}{2}$; $y = r \sin kt - l \cos \frac{kt}{2}$

Проекции на скоростта: $v_x = \dot{x} = -rk \sin kt + l \frac{k}{2} \cos \frac{kt}{2}$; $v_y = \dot{y} = rk \cos kt + l \frac{k}{2} \sin \frac{kt}{2}$

Големината на скоростта: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = k \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl \sin \frac{kt}{2}}$

Тангенциално ускорение: $w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{-k^2 r l \cos \frac{kt}{2}}{4 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4} - rl \sin \frac{kt}{2}}}$

Проекции на ускорението по неподвижните оси на координатната система:

$w_x = \ddot{x} = -rk^2 \cos kt - l \frac{k^2}{4} \sin \frac{kt}{2}$; $w_y = \ddot{y} = -rk^2 \sin kt + l \frac{k^2}{4} \cos \frac{kt}{2}$

Големината на пълното ускорение на точка B : $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = k^2 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{16} - \frac{rl}{2} \sin \frac{kt}{2}}$

$$\text{Нормално ускорение: } w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = k^2 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{16} - \frac{rl}{2} \sin \frac{kt}{2} - \frac{r^2 l^2 \cos^2 \frac{kt}{2}}{16(r^2 + \frac{l^2}{4} - rl \sin \frac{kt}{2})}}$$

но от $w_n = \frac{v^2}{\rho}$ за радиуса на кривината следва:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{(4r^2 + l^2 - 4rl \sin \frac{kt}{2})}{\sqrt{64r^2 + 16r^2 l^2 + l^4 - 96r^3 l \sin \frac{kt}{2} - 12rl^3 \sin \frac{kt}{2} + 36r^2 l^2 \sin^2 \frac{kt}{2}}}$$

В начално положение – при $t=0$, т.е. при начален ъгъл нула: $x_0 = r$; $y_0 = -l$

$$\text{големина на скоростта: } v_0 = k \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$\text{големина на тангенсиалното ускорение: } w_{\tau 0} = \frac{-k^2 rl}{4 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

$$\text{големина на нормалното ускорение: } w_{n0} = k^2 \frac{8r^2 + l^2}{4 \sqrt{4r^2 + l^2}}$$

$$\text{големина на пълното ускорение: } w_0 = k^2 \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{16}}$$

$$\text{радиус на кривината: при } \varphi_0 = 0 \Rightarrow \rho_0 = \frac{(4r^2 + l^2)^{3/2}}{8r^2 + l^2}$$

При $\varphi_1 = \pi$ съответните величини са: $x_1 = -r + l$; $y_1 = 0$; $v_1 = k(r - l/2)$;

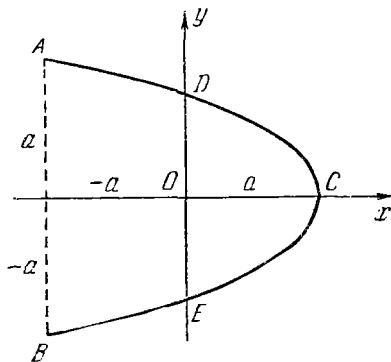
$$w_{\tau 1} = 0; \quad w_1 = w_{n1} = k^2(r - l/4); \quad \rho_1 = \frac{(2r - l)^2}{4r - l}$$

Пример 2. Точка се движи съгласно уравненията $x = -a \cos 2\omega t$; $y = -a \cos \omega t$

Да се определят траекторията, скоростта и ускорението на точката, както и съответните им стойности в точките с координати: A(-a,a), B(-a,-a) и C(a,0).

Записване чрез единичен ъгъл: $x = -a(\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t) = a(1 - 2\cos^2 \omega t)$. След

изразяване на $\cos \omega t = -\frac{y}{a}$ и изключване на времето: $x = a(1 - 2\frac{y^2}{a^2})$, т.е. $y^2 = \frac{a^2}{2}(1 - \frac{x}{a})$



проекции на скоростта: $v_x = \dot{x} = 2a\omega \sin 2\omega t$; $v_y = \dot{y} = a\omega \sin \omega t$

проекции на ускорението: $w_x = \ddot{x} = 4a\omega^2 \cos 2\omega t = -4\omega^2 x$; $w_y = \ddot{y} = a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 y$

За точките с координати: A(-a,a) - $\cos 2\omega t = 1$, $\cos \omega t = -1$

B(-a,-a) - $\cos 2\omega t = 1$, $\cos \omega t = 1$

C(a,0) - $\cos 2\omega t = -1$, $\cos \omega t = 0$

След заместване в изразите за проекциите на скоростта и ускорението се стига до определяне на стойностите им за всяка точка A, B и C.