ЛЕКЦИЯ 2

Аналитична механика

Съдържание

1. Вектор ъглова скорост.
2. Разлагане на ускорението по осите на естествения триедър.

1. Вектор ъглова скорост.

- Векторна функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ на скаларен аргумент t.

- представяне

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ - единични вектори по координатните оси на Декартова система

- общ случай: $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e_3}$ - единични вектори по координатните оси на дясно ориентирана координатна система, които са функции на времето

- производна на векторна функция

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e_1} + x(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + \dot{y}(t)\mathbf{e_2} + y(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + \dot{z}(t)\mathbf{e_3} + z(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e_1} + \dot{y}(t)\mathbf{e_2} + \dot{z}(t)\mathbf{e_3} + x(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + y(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + z(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$

- при постоянна големина векторът и производната му са перпендикулярни

$\mathbf{e_1} \perp \frac{d\mathbf{e_1}}{dt}$ или $\mathbf{e_1} \perp \dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$, т.е.

$\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$ лежи в равнина,успоредна на определената от другите два единични вектора

$$\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = a'\mathbf{e_2} + a''\mathbf{e_3}$$

аналогично $\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2} = b'\mathbf{e}_3 + b''\mathbf{e}_1$, $\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{3} = c'\mathbf{e}_1 + c''\mathbf{e}_2$

- определяне на константите

$$a' = \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2, \qquad a'' = \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{e}}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3$$
$$b' = \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3, \qquad b'' = \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{e}}_2 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1$$
$$c' = \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1, \qquad c'' = \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{e}}_3 = \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2$$

- ***съществува единствен вектор***

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$$

така че

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{e}}_1, \qquad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_2, \qquad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3 = \dot{\mathbf{e}}_3$$

доказателство

тъждества: $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$

$$0 = \frac{d}{dt}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\dot{\mathbf{e}}_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1$$

$$0 = \frac{d}{dt}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\dot{\mathbf{e}}_3 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2\dot{\mathbf{e}}_3 = -\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2$$

$$0 = \frac{d}{dt}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\dot{\mathbf{e}}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1 = -\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3$$

или

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1 = \omega_1\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1 + \omega_3\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \omega_2(-\mathbf{e}_3) + \omega_3\mathbf{e}_2$$
$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3$$
$$\omega_2 = -\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3, \qquad \omega_3 = \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2$$

аналогично

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2 = \omega_1\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 + \omega_2\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 = \omega_1\mathbf{e}_3 + \omega_3(-\mathbf{e}_1)$$
$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1$$
$$\omega_1 = \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3, \qquad \omega_3 = -\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3 = \omega_1\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3 + \omega_2\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 + \omega_3\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3 = \omega_1(-\mathbf{e}_2) + \omega_2\mathbf{e}_1$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2$$

$\omega_1 = -\dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_2$, $\qquad \omega_2 = \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1$

окончателно

$$\boldsymbol{\omega} = \langle \dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_3$$

проверка

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 = \langle \dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + \langle \dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 =$$

$$= \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1 \rangle (-\mathbf{e}_3) + \langle \dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 = \langle \dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle -\dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_3 = \langle \dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \langle \dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3$$

или $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{e}}_1$

аналогично

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2 = \langle \dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + \langle \dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 =$$

$$= \langle \dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3 + \langle \dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 \rangle (-\mathbf{e}_1) = \langle \dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3 + \langle -\dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_1 = \langle \dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3 + \langle \dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \langle \dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3 + \langle \dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1$$

или $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_2$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = \langle \dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + \langle \dot{\mathbf{e}}_1 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 =$$

$$= \langle \dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_3 \rangle (-\mathbf{e}_2) + \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 = \langle -\dot{\mathbf{e}}_2 \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 = \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \dot{\mathbf{e}}_3 \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2$$

или $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = \dot{\mathbf{e}}_3$

елиминиране на производните на единичните вектори

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e}_1 + \dot{y}(t)\mathbf{e}_2 + \dot{z}(t)\mathbf{e}_3 + x(t)\dot{\mathbf{e}}_1 + y(t)\dot{\mathbf{e}}_2 + z(t)\dot{\mathbf{e}}_3$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e}_1 + \dot{y}(t)\mathbf{e}_2 + \dot{z}(t)\mathbf{e}_3 + x(t)\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 + y(t)\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2 + z(t)\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e_1} + \dot{y}(t)\mathbf{e_2} + \dot{z}(t)\mathbf{e_3} + \boldsymbol{\omega} \times (x(t)\mathbf{e_1} + y(t)\mathbf{e_2} + z(t)\mathbf{e_3})$$

- ***Абсолютна производна*** $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ ***и релативна производна*** $\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}$

  $$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

  - частни случаи при $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ и $\frac{d^*\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}$

- матрично представяне на векторно произведение

  $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$; $\mathbf{r}(r_1, r_2, r_3)$

  $$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

2. **Разлагане на ускорението по осите на естествения триедър**.

- единични вектори по осите на естествения триедър
  s - криволинейна абсциса
  s = s(t) естествен закон на движение на точката

  диференциал на дъга $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

  за $d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$: $|d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

  $$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

  $\boldsymbol{\tau}$ - *единичен вектор по тангентата към траекторията*

  $\Delta\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{\tau}_2(t) - \boldsymbol{\tau}_1(t)$ - за две различни положения на точката

  $|\Delta\boldsymbol{\tau}| = 2|\boldsymbol{\tau}|\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$, α - ъгъл между векторите

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin(\alpha/2)}{(\alpha/2)}\frac{(\alpha/2)}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\alpha}{\Delta s}=\kappa$$ - кривина на крива

радиус на кривината $\rho=\dfrac{1}{\kappa}$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)=\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2},\qquad \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|=\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|=\kappa,$$

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|^{-1}=\mathbf{n}$$ - единичен вектор по главната нормала

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\kappa\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|^{-1}=\kappa\,\mathbf{n}\qquad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}=\kappa\,\mathbf{n}$$ ***формула на Френе***

- единичен вектор по бинормалата

$$\mathbf{b}=\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{n}$$

- разлагане на скоростта по осите на естествения триедър

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\boldsymbol{\tau}\,\dot{s}=\dot{s}\boldsymbol{\tau}$$ - *компонент само по тангентата*

- разлагане на ускорението по осите на естествения триедър

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\boldsymbol{\tau}\,\dot{s}=\dot{s}\boldsymbol{\tau},\qquad v^2=\dot{s}^2$$

$$\mathbf{w}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\dot{s}\boldsymbol{\tau})=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\dot{s}\left(\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\right)=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\dot{s}^2\kappa\mathbf{n}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\dot{s}^2\frac{1}{\rho}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{w}=\ddot{s}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}$$

тангенциално ускорение - $w_\tau=\ddot{s}$

нормално ускорение - $w_n=\dfrac{v^2}{\rho}$

големина - $$|w| = \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}$$

Задача. Радиус-векторът на движеща се точка има вида $\mathbf{r} = \cos(2t)\mathbf{e_1} - \sin(2t)\mathbf{e_2} + t\,\mathbf{e_3}$ в ортонормиран базис $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Да се определи векторът на скоростта на точката, когато базисът е неподвижен и също в случая, когато базисът се върти с постоянна ъглова скорост $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e_3}$. Да се намерят производната на големината на радиус-вектора и големината на производната на радиус-вектора и да се покаже, че те са различни.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \omega\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}; \qquad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ -\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

големина на вектора:

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 2t + t^2} = \sqrt{1+t^2}$$

производна на големината на вектора:

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}| = \frac{d}{dt}\sqrt{1+t^2} = \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

големина на производната на вектора в случая на неподвижен базис:

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t + 1} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

големина на производната на вектора в случая на подвижен базис:

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$