

ЛЕКЦИЯ 1

Аналитична механика

Библиография

Основна:

Анчев А., Л. Лилов, С. Радев (1988). Лекции по аналитична механика, ч. 1. Унив. изд. „Св. Кл. Охридски“, София.

Лойцянский Л. Г., А. И. Лурье (1995). Курс теоретической механики. ч. 1 и 2, „Наука“, Москва.

Бл. Долапчиев, Аналитична механика, 2-ро издание, София, 1966.

Бухгольц, Н. Н., Основной курс теоретической механики, изд. 6-ое, Наука, Москва, 1976.

Допълнителна:

Марков К. (1995). Ръководство по аналитична механика. Унив. изд. „Св. Кл. Охридски“, София.

Писарев А., Ц. Парасков, С. Бъчваров (1986, 1988). Курс по теоретична механика. ч. 1 и 2. ДИ „Техника“, София.

Литература

1. Percy F. Smith, William R. Lfngley, Yale University, Theoretical Mechanics, Ginn and Company, Boston-New York-Chicago-London, 1910.
2. A. Nony Mous, A Short Introduction to Theoretical Mechanics, Brigham University, 2007.
3. Rugerro M. Santilli, Foundation of Theoretical Mechanics, Cambridge, USA, Springer-Verlag Ney York Inc.,1983

Text: “*Classical Mechanics, 3th Edition*,” H. Goldstein, C.P. Poole, J.L. Safko, Addison-Wesley (2002).

"Mathematical methods in classical mechanics," V.I Arnold (1989).

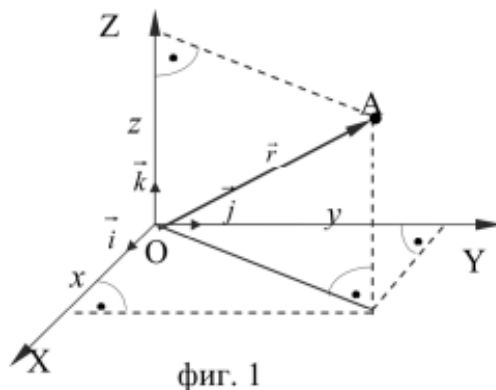
Web Site: <http://www.colorado.edu/physics/phys5210/>

Съдържание

1. Предмет на аналитичната механика.
2. Траектория на точка.
3. Векторна функция на скаларен аргумент.
4. Ходограф на вектор-функция.
5. Производна на векторна функция.
6. Вектори скорост и ускорение на движеща се точка.
7. Триедър на Френе.

1. Предмет на аналитичната механика.

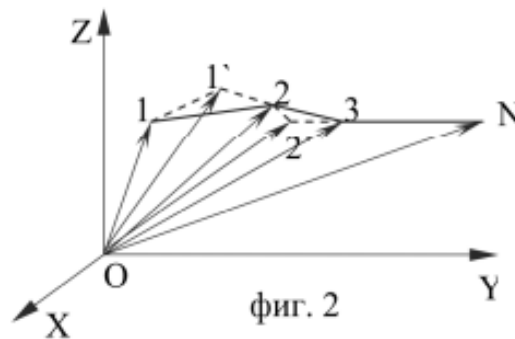
- движението като философско понятие: всички процеси и явления във вселената
 - механично движение – изменение във времето на взаимното разположение на телата в пространството
 - изучаване на общите закони на механичното движение и механичното взаимодействие на материалните тела
 - основни понятия: пространство, време, сила, маса
 - материална точка: материален обект с пренебрежимо малки размери
 - абсолютно нвърдо тяло: разстоянието между произволни негови точки остава неизменно независимо от механичните въздействия
 - движението - векторна функция със скаларен аргумент времето
- $$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$
- координатна система – средство за описание на движението



- Скалярни функции : $x=x(t)$; $y=y(t)$; $z=z(t)$

2. Траектория на точка.

- Непрекъсната крива в пространството



3. Векторна функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ на скаларен аргумент t .

- *определение:* на всяко числено значение на t съответства определено значение на вектора – определени модул и направление
- скаларна функция $x = x(t)$ на скаларен аргумент t
- представяне

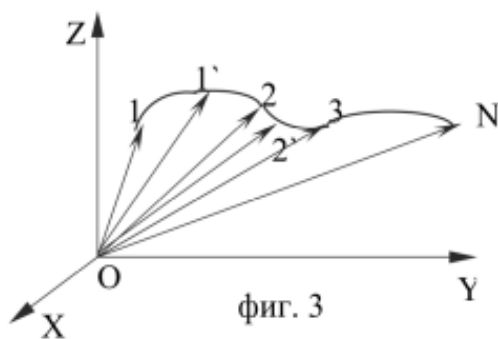
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - единични вектори по координатните оси на Декартова система

.

4. Ходограф на вектор-функция.

- Траектория, описвана от краищата на вектора на вектор-функцията, като векторите имат общо начало една неподвижна точка
- Съпоставяне на траектория на точка и ходограф на вектор-функция
траекторията на точка – ходограф на вектор-функция



5. Производна на векторна функция.

- дефиниция

$$\mathbf{a}'(u) = \frac{d\mathbf{a}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(u + \Delta u) - \mathbf{a}(u)}{\Delta u}$$

Вектор с направление на допирателната към ходографа и посока, съответна на нарастване на аргумента

$|\mathbf{a}'(u)|$ - модул на производната

a - големина на вектора $\mathbf{a}$

a' - големина (стойност) на производната на вектора $\mathbf{a}$

- Правила за диференциране

$$\frac{d}{du}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{du}$$

- Пример: производна на единичен вектор $\mathbf{e}$ с постоянно направление

$$\frac{d\mathbf{e}}{du} = \mathbf{0}$$

- Пример: производна на вектор $\mathbf{a}$ с постоянна големина

$$\frac{da^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{a} + \mathbf{a} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 2\mathbf{a} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} \perp \frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

- За координатна система с неподвижни (с постоянни направления) оси

$$\mathbf{a}(u) = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad , \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

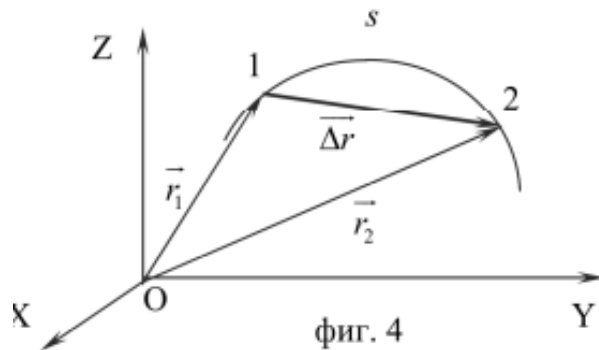
$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \frac{da_x}{du} \mathbf{i} + \frac{da_y}{du} \mathbf{j} + \frac{da_z}{du} \mathbf{k} , \quad \left| \frac{d\mathbf{a}}{du} \right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{du} \right)^2 + \left(\frac{da_y}{du} \right)^2 + \left(\frac{da_z}{du} \right)^2}$$

$$a'(u) = \frac{da}{du} = \frac{a_x \frac{da_x}{du} + a_y \frac{da_y}{du} + a_z \frac{da_z}{du}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$|\mathbf{a}'(u)| \neq a'(u)$$

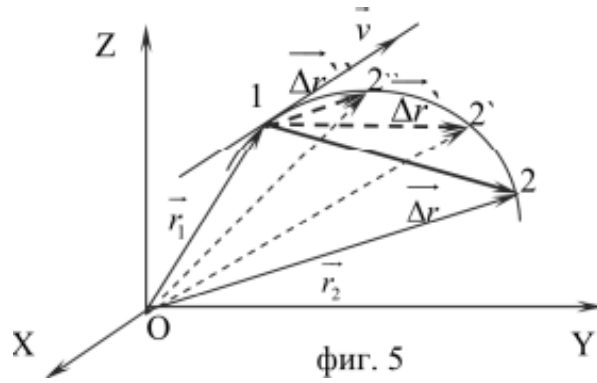
6. Вектори скорост и ускорение на движеща се точка.

$$\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$$



средна скорост: $\mathbf{v}_{cp} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$

моментна скорост: $\mathbf{v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$



$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Средно ускорение: $\mathbf{w}_{cp} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$

моментно ускорение: $\mathbf{w} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$

$$w = |\mathbf{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

7. Триедър на Френе.

- естествена координатна ситема

регулярна крива: допуска задаване с векторно-параметрично уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, където $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ е n пъти непрекъснато диференцируема функция; при $n=1$ кривата се нарича *гладка*

s - криволинейна абсциса

$s = s(t)$ естествен закон на движение на точката

$\boldsymbol{\tau}$ - вектор по тангентата към траекторията

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Теорема: Всяка непрекъсната и диференцируема функция (гладка крива) притежава единствена допирателна във всяка точка. Ако $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ е векторно-параметричното уравнение на кривата, то допирателната в точката, съответна на стойността на аргумента t , има направление на вектора $\dot{\mathbf{r}}(t)$.

- оскулачна равнина

Нека P_0 - точка от гладка крива, а $\boldsymbol{\tau}_0$ - вектор по тангентата в тази точка.

Нека P_1 - друга точка от кривата, а $\boldsymbol{\tau}_1$ - вектор по тангентата в тази точка.

Векторите $\boldsymbol{\tau}_0$ и $\boldsymbol{\tau}_1$ с начало P_0 характеризират в общия случай равнина, която при граничен преход $P_1 \rightarrow P_0$ се дефинира като оскулачна.

Смисъл: оскулачната равнина е „най-плътно“ приближена до кривата.

Следствие: оскулачната равнина или е единствена, или всяка равнина през допирателната към кривата в дадена точка е оскулачна.

- нормална равнина и главна нормала

нормална равнина в точка – перпендикулярна равнина към тангентата в тази точка

главна нормала – пресечница на оскулачната и нормалната равнина

- единични вектори $\boldsymbol{\tau}$ по тангентата и $\mathbf{n}$ по главната нормала
- бинормала и единичен вектор по бинормалата

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$$

С всяка точка от траекторията може да се свърже естествена координатна система (естествен триедър , триедър на Френе) с оси, насочени по тангентата, нормалата и бинормалата.

Единичните вектори по тези оси образуват дясна координатна система.