ЛЕКЦИЯ 8

Аналитична механика

Съдържание

1. Абсолютно, относително и преносно движение.

- обща постановка на задачата за относително движение:

  движението на дадена точка се определя спрямо две различни координатни системи, които се движат една спрямо друга по зададен закон;

  спрямо всяка координатна система се определят характеристиките на движението – траектория, скорост и ускорение

- задача:
  при известно движение на едната координатна система спрямо другата да се определи връзката между параметрите на движението на произволна точка относно всяка от координатните системи

- представяне на движението като *съставно движение*:
  - спрямо едната система (A) и движението на (A) спрямо друга система (B);
  - преминаване към описание на движението относно (B)

- <u>метод на относителното движение</u>:

  възможността за разлагане на сложно движение на точка на по-прости движения

- пример:
  Точка се движи равномерно и праволинейно по ос, която от своя страна се върти с постоянна ъглова скорост относно неподвижна равнина.
  Относно неподвижната равнина траекторията е Архимедова спирала, докато съставното движение се представя като равномерно праволинейно движение по оста и равномерно въртене на оста около друга неподвижна ос.

- разглежда се движението на точка М спрямо две различни координатни системи:
  - *абсолютна* (неподвижна) координатна система Oxyz и
  - *относителна* (подвижна, движеща се спрямо Oxyz) система O’x’y’z’

  - *абсолютно движение*:
    - спрямо неподвижната координатна система Oxyz;
    - индексиране на параметрите на абсолютно движение с долен индекс „a“

    пример: $\mathbf{v}_a$ - абсолютна скорост; $\mathbf{w}_a$ - абсолютно ускорение

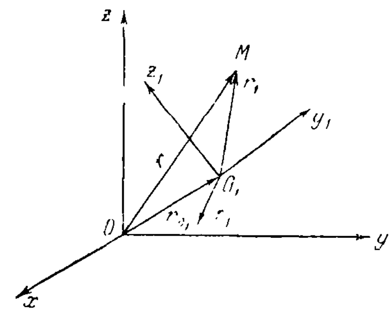
  - *преносно движение:*
    - движението на системата O’x’y’z’ спрямо системата Oxyz;
    - индексиране на параметрите на преносното движение с долен индекс „e“

    пример: $\mathbf{v}_e$ - преносна скорост; $\mathbf{w}_e$ - преносно ускорение

  - *относително (релативно) движение*: спрямо координатната система O’x’y’z’;
    - индексиране на параметрите на релативното движение с долен индекс „r“

    пример: $\mathbf{v}_r$ - релативна скорост; $\mathbf{w}_r$ - релативно ускорение

- определение:
  преносно движение на точка – движението на точката от относителната система, в която в даден момент се намира движещата се точка



фиг.1

- разглежда се движението на точка M (фиг.1)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r}', \tag{1}$$

където:

$\mathbf{r}(x, y, z)$ - радиус-вектор на M в неподвижната координатна система Oxyz

$\mathbf{r}_0\,(x_0, y_0, z_0)$ - радиус-вектор на началото O’ в неподвижната система Oxyz

$\mathbf{r}'(x', y', z')$ - радиус-вектор на M в подвижната система O’x’y’z’

връзка между координатите (x, y, z) и (x', y', z') на точка M в двете системи

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' \\ y &= y_0 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' \\ z &= z_0 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' \end{aligned} \tag{2}$$

(α_{ij}) - косинусите между единичните вектори на неподвижната и подвижната система, т.е. $(x, x') \to \cos(x, x') = \alpha_{11}$; $(x, y') \to \cos(x, y') = \alpha_{21}, \ldots$

- уравнение на относителното движение на точката M

$$x' = f_1(t), \quad y' = f_2(t), \quad z' = f_3(t) \tag{3}$$

при зададени функции на времето $f_1(t), \quad f_2(t), \quad f_3(t)$

- уравнение на абсолютното движение на точката M – определя се от уравнението на относителното движение на точката и уравнението на движението на относителната система спрямо абсолютната, т.е. в десните части на (3) и (2) всички параметри са функции на времето

- <u>разлика</u> с уравнение на движението на твърдо тяло
  - координатите (x', y', z') , определящи точката от твърдото тяло, <u>не са постоянни</u> величини, а са функции на времето, характеризиращи относителното движение на точката
  - уравнение на преносното движение: чрез фиксиране на (x', y', z') в (2), т.е. функции на времето са само косинусите (α_{ij}), изразени с Ойлеровите ъгли
  - траекторията на точката в абсолютната система се получава чрез изнлючване на времето от уравнението на абсолютното движение
  - траекторията на точката в относителната система се получава чрез изнлючване на времето от уравнението на относителното движение
  - заради движението на относителната система точката описва различни траектории спрямо всяка от двете системи

    пример: траекторията на моментния център на скоростите – неподвижна и подвижна центроида

- частни случаи:
  - равнинно движение (φ: ъгъл на завъртане между осите Ox и O'x')

$$x = x_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \qquad (4)$$

  - постъпателно движение (φ е нула при подходящ избор на осите Ox и O'x')

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y' \qquad (5)$$

  - въртене около неподвижна ос

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \qquad (6)$$

2. Събиране на скорости.

- Векторна функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ на скаларен аргумент t.

- представяне в относителната система

$$\mathbf{r}(t) = r_{x'}\mathbf{i}' + r_{y'}\mathbf{j}' + r_{z'}\mathbf{k}',$$

$\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ - единични вектори по координатните оси

- *абсолютна производна*: производна по времето в абсолютната система

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dr_{x'}}{dt}\mathbf{i}'+\frac{dr_{y'}}{dt}\mathbf{j}'+\frac{dr_{z'}}{dt}\mathbf{k}'+r_{x'}\frac{d\mathbf{i}'}{dt}+r_{y'}\frac{d\mathbf{j}'}{dt}+r_{z'}\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \qquad (7)$$

- *относителна производна*: производна по времето, когато $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ са неизменни в относителната система

$$\frac{d'\mathbf{r}}{dt}=\frac{dr_{x'}}{dt}\mathbf{i}'+\frac{dr_{y'}}{dt}\mathbf{j}'+\frac{dr_{z'}}{dt}\mathbf{k}' \qquad (8)$$

- от представянето

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}'$$

за последните три събираеми на (7) се получава

$$r_{x'}\frac{d\mathbf{i}'}{dt}+r_{y'}\frac{d\mathbf{j}'}{dt}+r_{z'}\frac{d\mathbf{k}'}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times(r_{x'}\mathbf{i}'+r_{y'}\mathbf{j}'+r_{z'}\mathbf{k}')=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

или
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d'\mathbf{r}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \qquad (9)$$

- *абсолютната производна на вектор по времето е равна на сумата от относителната производна на този вектор и векторното произведение на ъгловата скорост на относителната система със самия вестор*

- *проекциите на вектора на относителната производна по осите на относителната система са равни на производните от проекциите на вектора на тези оси*

$$\left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right)_{x'}=\frac{dr_{x'}}{dt}, \quad \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right)_{y'}=\frac{dr_{y'}}{dt}, \quad \left(\frac{d'\mathbf{r}}{dt}\right)_{z'}=\frac{dr_{z'}}{dt} \qquad (10)$$

- *проекции на вектора на абсолютната производна по осите на относителната система*

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{x'}=\frac{dr_{x'}}{dt}+\omega_{y'}z'-\omega_{z'}y'$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{y'}=\frac{dr_{y'}}{dt}+\omega_{z'}x'-\omega_{x'}z' \qquad (11)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{z'} = \frac{dr_{z'}}{dt} + \omega_{x'}y' - \omega_{y'}x'$$

- теорема за събиране на скоростите

от $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r}'$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_a\,, \qquad \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v}_0\,, \qquad \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'\,, \qquad \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_r$$

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' + \mathbf{v}_r \tag{12}$$

- *преносна скорост* $\qquad \mathbf{v}_e = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' \qquad (13)$

  смисъл: скоростта на фиксираната в относителната система точка, в която в дадения момент се намира движещата се (и спрямо относителната координатна система) разглеждана точка
  или:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \tag{14}$$

абсолютната скорост на точка е равна на сумата на преносната и относителната скорост

3. Събиране на ускорения.

- от израза за събиране на скоростите
  $\mathbf{v}_a = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}' + \mathbf{v}_r$

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v_0}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \tag{15}$$

$\dfrac{d\mathbf{r}'}{dt} = \dfrac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'$ - чрез локалното диференциране

- означения: $\dfrac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{w}_a$; $\dfrac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{w}_0$ - в абсолютната система

$$\frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v_r} = \mathbf{w}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v_r},$$

$$\frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} = \mathbf{w}_r; \qquad \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_r; \qquad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v_0}}{dt} + \left(\frac{d'\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r\right) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'\right)$$

$$\mathbf{w_a} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w_0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \qquad (16)$$

- означения:
  - $\mathbf{w}_a$: *абсолютно ускорение*
  - $\mathbf{w}_r$: *относително ускорение*
  - $\mathbf{w}_e = \mathbf{w_0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$: *преносно ускорение*
  - $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$: *Кориолисово ускорение*

    ❖ смисъл на Кориолисовото ускорение:
    - едното събираемо $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ следва от изчисление на абсолютната производна на относителната скорост $\mathbf{v}_r$; изразява изменението на вектора на относителната скорост $\mathbf{v}_r$, обусловено от завъртането му заедно с относителната координатна система
    - второто събираемо $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$ следва от изчисление на абсолютната производна на преносната скорост, обусловено от изменението на относителния радиус-вектор на точката

- теорема за събиране на ускоренията

$$\mathbf{w_a} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c \qquad (17)$$

абсолютното ускорение е сума на относителното, преносното и Кориолисовото ускорение

- частни случаи:
  - $\mathbf{w}_c = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$: постъпателно движение на относителната система

$\Rightarrow \boldsymbol{\omega} \| \mathbf{v}_r$: движението на точката е успоредно на оста, около която се върти относителната система)

- големината на Кориолисовото ускорение е $w_c = 2\omega v_r$ (точката се движи в равнина, перпендикулярна на оста, около която се върти относителната система)

Примери:

1. Лента се движи с постоянна скорост „с“ между два барабана, като се размотава от десния и се намотава на левия. По лентата се записват сигнали от регистриращо устройство, снабдено с писец, който извършва вертикални колебания, дадени със закона $x = 0; y = a\sin(\omega t + \alpha)$. Да се намерят уравненията на движение на писеца относно движещата се лента и уравнението на изчертаната на лентата крива, т.е. относителната траектория.

   Системата O’x’y’ се движи спрямо системата Oxy постъпателно, така че

   $$0 = x_0 + x',\; y = a\sin(\omega t + \alpha) = y_0 + y'$$

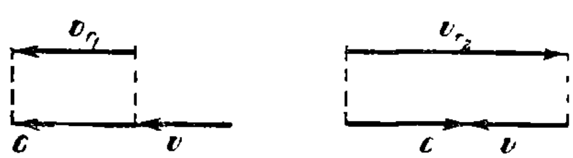
   В случая $x_0 = -ct$; $y_0 = 0$; тогава $x' = ct$, $y' = a\sin(\omega t + \alpha)$

   Относителната траектория, изчертана на лентата, се явява синусоида с уравнение

   $$y' = a\sin(\frac{\omega x'}{c} + \alpha)$$

   Амплитудата и фазата на записваните колебания се предават без изкривяване, докато честотата е свързана със скоростта „с“.

2. Две подводници се движат една след друга с еднаква скорост $\mathbf{v}$, като разстоянието между тях е s. Звукът от локатора на задната подводница настига предната, отразява се и се приема отново от задната. Да се определи времето от излъчването на звука до приемането му. Скоростта на звука във вода е $\mathbf{c}$.



фиг.2

Относителна скорост на звука от задната подводница до предната: $\mathbf{v}_{r1} = \mathbf{c} - \mathbf{v}$.

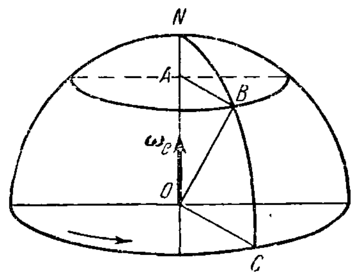
Време за изминаване на разстоянието s между тях: $t_1 = \dfrac{s}{c - v}$.

Относителна скорост на звука в направление към втората подводница: $\mathbf{v}_{r2} = \mathbf{c} + \mathbf{v}$.

Време за изминаване на разстоянието s между тях: $t_2 = \dfrac{s}{c + v}$.

Търсено време: $t = t_1 + t_2 = \dfrac{s}{c - v} + \dfrac{s}{c + v} = \dfrac{2sc}{c^2 - v^2}$

3. Кораб плува по меридиана CBN в посока от юг на север. Скоростта му спрямо дъното е 36 км/ч. Да се определят компонентите на абсолютната скорост и абсолютното ускорение, отчитайки въртенето на Земята. Корабът се намира на 60^0 ширина; радиусът на Земята е 64.10^5 м.



фиг.3

Преносно движение: на Земята – точка B описва окръжност с радиус AB.

Относително движение: по меридиана, дъга CBN от окръжност с център O.

Абсолютна скорост на кораба: $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r$.

$v_e = AB\,\omega_e = R\cos 60^0\,\omega_e = 64.10^5.\frac{1}{2}.\frac{2\pi}{24.60.60} = 232$ [m/s] ; направление – по допирателната към паралела и посока от запад на изток;

$v_r = 36$ [km/h] =10 [m/s] ; направление – по допирателната към меридиана и посока от юг на север;

Абсолютно ускорение: $\mathbf{w_a} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c$.

Преносно ускорение – съвпада с нормалното ускорение (ъгловата скорост е постоянна), т.е. $w_e = AB\omega_e^2 = R\cos 60^0\,\omega_e = 64.10^5.\frac{1}{2}.\left(\frac{2\pi}{24.60.60}\right)^2 = 0.017$ [m/s²]

Относителното ускорение – съвпада също с нормалното ускорение (ъгловата скорост е постоянна при движение по меридиана), т.е. $w_r = \frac{v_r^2}{R} = \frac{10^2}{64.10^5} = 1.56.10^{-5}$ [m/s²]; посока – от B към O.

Кориолисово ускорение: $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_r$ и големината му е

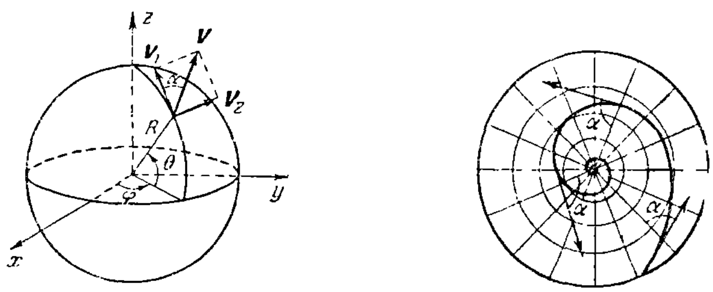
$v_c = 2\omega_e v_r \sin(\angle\omega_e\omega_r) = 2\frac{2\pi}{24.60.60}10\sin 60^0 = 1.26.10^{-3}$ [m/s²] , а посоката - по допирателната към паралела и посока от запад на изток.

Случай, когато корабът плува по паралела от запад на изток. Изменението е само, че относителната скорост съвпада с преносната по направление, а самата преносна скорост е както в предишния случай; същото се отнася и за преносното ускорение.

Относителното ускорение се определя от движението по окръжност с радиус $R\cos 60^0$, т.е. $w_r = \dfrac{v_r^2}{R\cos 60^0} = 3.12.10^{-5}$ [m/s^2]; по посока съвпада с преносното ускорение. Кориолисово ускорение е $v_c = 2\omega_e v_r = 1.46.10^{-3}$ [m/s^2] и по посока съвпада с преносното ускорение, което е от B към A. В този случай и трите компоненти на абсолютното ускорение са върху една права.

4. Точка се движи по повърхността на Земята със скорост $\mathbf{v}$, като ъгълът α, сключван с меридиана, е постоянен. Да се определи траекторията на точката.

Изразяване в сферични координати: $x = R\cos\theta\cos\varphi \quad y = R\cos\theta\sin\varphi \quad z = R\sin\theta$



фиг.4

Производните са:

$$\dot{x} = R(-\sin\theta\cos\varphi.\dot{\theta} - \cos\theta\sin\varphi.\dot{\varphi})$$

$$\dot{y} = R(-\sin\theta\sin\varphi.\dot{\theta} + \cos\theta\cos\varphi.\dot{\varphi}$$

$$\dot{z} = R\cos\theta.\dot{\theta}$$

Големина на квадрата на скоростта: $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2(\dot{\theta}^2 + \cos^2\theta.\dot{\varphi}^2)$

Разлагане на скоростта: $v_1 = R\dot{\theta}$ (по допирателната към меридиана) и $v_2 = R\cos\theta.\dot{\varphi}$ (по допирателната към паралела). Тогава $\dfrac{v_1}{v_2} = \cot g\,\alpha = \dfrac{\dot{\theta}}{\cos\theta.\dot{\varphi}}$, т.е. $\dfrac{d\theta}{\cos\theta} = \cot g\,\alpha\, d\varphi$,

$\int\limits_0^\theta \dfrac{d\theta}{\cos\theta} = \cot g\,\alpha \int\limits_0^\varphi d\varphi$, $\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right) = \varphi\cot g\,\alpha$, $tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right) = e^{\varphi\cot g\,\alpha}$ - траекторията е *локсодрома.* Ако $\cot g\;\alpha > 0$ и при неограничено нарастване на φ: $tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right) \to \infty$ и $\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, т.е. $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ и локсодромата е сферична спирала, навиваща се около северния полюс. Ако $\cot g\;\alpha < 0$ аналогично : $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ и локсодромата е сферична спирала, навиваща се около южния полюс.