

ЛЕКЦИЯ 5

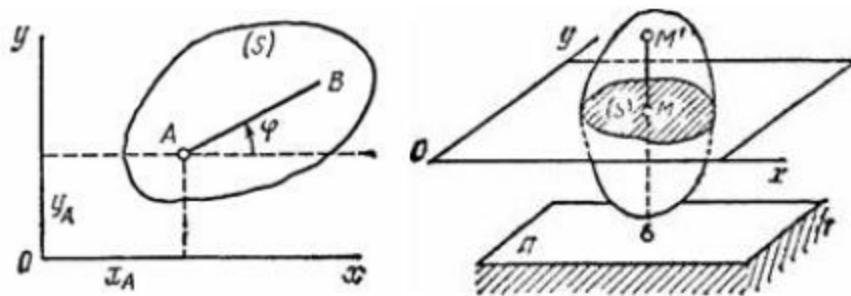
Аналитична механика

Съдържание

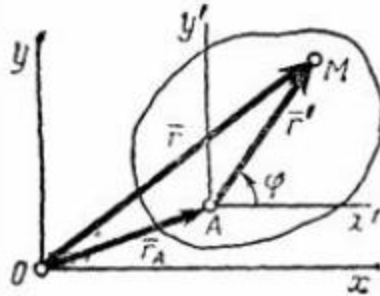
1. Равнинно движение на тяло.
2. Преместване на равнинна фигура.
3. Поле на скоростите на точките на равнинна фигура.
4. Моментен център на скоростите.
5. Центроиди.

1. Равнинно движение на тяло.

- *Равнинно движение:* всички точки от тялото остават в равнина, успоредна на някаква неподвижна равнина по време на движението
- изучаването на равнинното движение на тяло се свежда до определяне на движението на една равнинна фигура в нейната равнина



фиг. 1



фиг.2

- означения
 - Oxy : неподвижна координатна система
 - $Ax'y'$: координатна система, фиксирана в тялото (A- полюс)
 - M : произволна точка от тялото
 - \mathbf{r} : радиус-вектор на M относно Oxy с координати (x,y)
 - \mathbf{r}' : радиус-вектор на M относно $Ax'y'$ с координати (x',y')
 - \mathbf{r}_A : радиус-вектор на A относно Oxy с координати (x_0,y_0)
 - φ : ъгъл на завъртане около полюса

- равнинното движение на тяло се определя от:

- уравнението на движение на основната точка (полюс)

$$x_o = f_1(t), \quad y_o = f_2(t) \quad (1)$$

- уравнението на въртене около основната точка

$$\varphi = \varphi(t) \quad (2)$$

от

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}' \quad (3)$$

$$x = x_0 + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = y_0 + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \quad (4)$$

- уравненията (4) – параметрични уравнения на точката M ; траекторията се получава чрез изключване на времето
- функциите x_0, y_0, φ - зададени функции на времето

2. Преместване на равнинна фигура.

- всяко преместване на равнинна фигура се представя от две движения:
- *постъпателно*; (зависи от избора на полюса)

- завъртане около полюса; (не зависи от избора на полюса)

- вектор на малките завъртания θ :
 - големина, равна на големината на ъгъла на завъртане
 - направление, перпендикулярно на равнината на преместване
 - посока съгласно правилото за положително завъртане
- представяне на преместването на произволна точка чрез вектора на малките завъртания θ

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \theta \times \mathbf{r}' \quad (5)$$

- теорема на Ойлер:

Всяко непостъпателно преместване на равнинна фигура може да се представи като едно завъртане около някакъв център

Доказателство: преместването на равнинна фигура се определя от преместването на две произволни точки от нея, $A \rightarrow A_1$ и $B \rightarrow B_1$, т.е. $AB \rightarrow A_1B_1$. Пресечната точка C на симетралите на AA_1 и BB_1 е център на ротация с ъгъл $\angle ACA_1$. Разстоянията от C до точки A и B заедно с отсечката AB образуват еднозначно определен триъгълник $\triangle CAB$, еднакъв с триъгълника $\triangle CA_1B_1$ по три страни; ъгълът $\angle ACA_1$, довеждащ $A \rightarrow A_1$, довежда $\triangle CAB$ в $\triangle CA_1B_1$

- частни случаи:
 - симетралите на AA_1 и BB_1 съвпадат – центърът на завъртане е пресечна точка на правите AA_1 и BB_1 , ако не са успоредни
 - симетралите на AA_1 и BB_1 съвпадат и правите AA_1 и BB_1 са успоредни, център на завъртане не съществува; преместването е постъпателно
 - при успоредни симетрали център на завъртане не съществува; преместването е постъпателно

3. Поле на скоростите на точките на равнинна фигура.

- нека Δt е интервал, за който се извършва преместването ;
от $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \theta \times \mathbf{r}'$

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}_0}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \times \mathbf{r}' \right) \quad (6)$$

$$\mathbf{v}_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}_0}{\Delta t} \quad - \text{скорост на полюса};$$

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\Delta t} \quad - \text{Ъглова скорост на фигурата}$$

- *Поле на скоростите на точките на равнинна фигура*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (7)$$

проектиране (7) на неподвижните оси ($v_{0x} = \dot{x}_0$; $v_{0y} = \dot{y}_0$; $\omega = \dot{\phi}$)

$$v_x = v_{0x} - \omega(y - y_0), \quad v_y = v_{0y} + \omega(x - x_0),$$

където $(0,0, \omega)$ са координатите на ъгловата скорост

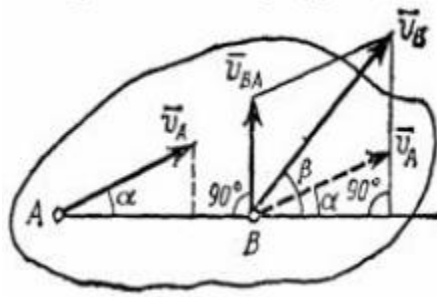
- въртене около неподвижна ос: $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$
- постъпателно движение: $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$

- абсолютно, относително и преносно движение
 - *абсолютно*: спрямо неподвижна координатна система Оху
 - *относително*: спрямо подвижна система А х'у'
 - *преносно*: движението на системата А х'у' спрямо системата Оху
- абсолютното движение на равнинна фигура може да се разглежда като съставено от две движения: преносно (определено от полюса, постъпателно) и относително (въртене около полюса)
- *следствие*: скоростта на въртене около полюса е равна на производната по времето на локалния (относно полюса) радиус-вектор на точката

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (8)$$

- теорема:

Проекциите на скоростите на крайните точки на отсечка AB върху правата AB са равни



фиг.3

означения: \mathbf{v}_{AB} - скорост на точка В, разглеждана като въртяща се около полюса А

\mathbf{r}'_{AB} - радиус-вектор на В относно А

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB}, \quad \mathbf{v}_{AB} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_{AB} \quad (9)$$

4. Моментен център на скоростите.

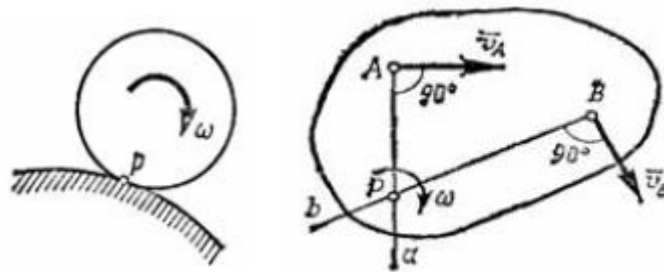
- при всяко непостъпателно движение на равнинна фигура съществува точка, чиято скорост в даден момент е нула - *моментен център на скоростите*
 - за всяка точка М: $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AM}$, където $\mathbf{v}_{AM} = \boldsymbol{\omega} \times \vec{AM}$
 - съществува положение, в което $v_M = v_A + \omega AM$ (събираемите са вектори, чието направление е успоредно на една и съща права)
 - отсечка $AP = \frac{v_A}{\omega}$ по издигнат от полюса А перпендикуляр:

$$v_P = v_A - \omega AP = v_A - \omega \frac{v_A}{\omega} = 0 \quad (\text{знакът „минус“ съответства на}$$

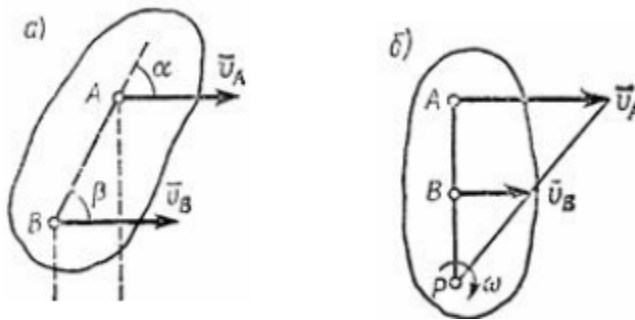
полуравнината относно \mathbf{v}_A , в която е точката P)

- за всеки полюс P , съвпадащ с моментния център ($v_P = 0$)

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{PA} = \omega \times \vec{PA}; \quad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{PB} = \omega \times \vec{PB}$$



фиг.4



фиг.5

- *разпределение на скоростите в тялото*: скоростите на точки от равнинна фигура могат да се разглеждат като скорости на въртене около ос през моментния център, а самият моментен център - като център на въртене на фигурата
- моментният център заема различни положения във всеки момент от време както в движещата се равнинна фигура, така и в неподвижната равнина
- връзка между координатите на неподвижната координатна система Oxy и фиксираната в тялото координатна система $O'x'y'$ (O' - полюс)

$$x = x_0 + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = y_0 + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

- радиус-вектор на моментния център P

от $\mathbf{0} = \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_P$, (умножение отляво векторно с $\boldsymbol{\omega}$):

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_P) = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 + (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}'_P) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}'_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0 - (\boldsymbol{\omega}^2) \mathbf{r}'_P$$

$$\mathbf{r}'_P = \frac{1}{\omega^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0) \quad (10)$$

- координати на моментния център

- в неподвижната координатна система Oxy

$$x = x_0 - \frac{v_{0y}}{\omega}, \quad y = y_0 + \frac{v_{0x}}{\omega} \quad (11)$$

- в подвижната координатна система $O'x'y'$

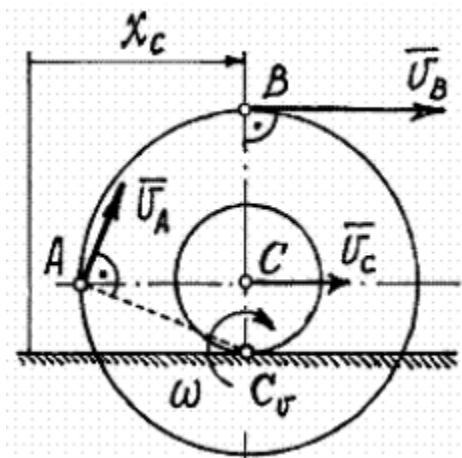
$$x' = \frac{1}{\omega} (v_{0x} \sin \varphi - v_{0y} \cos \varphi), \quad y' = \frac{1}{\omega} (v_{0x} \cos \varphi + v_{0y} \sin \varphi) \quad (12)$$

5. Центроиди.

- подвижна центроида – траекторията на моментния център в подвижната координатна система
- неподвижна центроида – траекторията на моментния център в неподвижната координатна система
- *моментният център е обща точка на двете траектории – подвижната и неподвижната центроида, във всеки момент*
- скоростта на моментния център е по допирателната към всяка от траекториите; *двете центроиди се допират в моментния център*
- при движение на равнинна фигура подвижната центроида се търкаля без хлъзгане по неподвижната центроида

Примери.

1. Тяло е съставено от два свързани концентрични диска с различни радиуси $R=4$ и $r=2$, като малкият диск се търкаля по неподвижна равнина. Траекторията на центъра му C се дава с $x_c = 3t$. Да се определят скоростите на точки A , B и C (фиг.6).

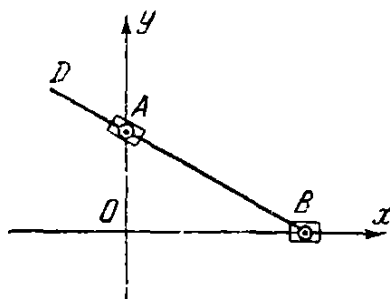


фиг.6

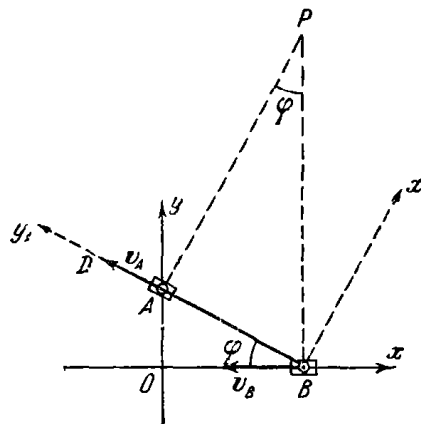
Моментен център - C_v . Скорост на C - $v_c = \dot{x}_c = 3$. Ъглова скорост: $\omega = \frac{v_c}{r} = \frac{3}{2}$.

$$v_A = \omega AC_v = \omega \sqrt{r^2 + R^2} = 6.71; \quad v_B = \omega BC_v = \omega(r + R) = 9$$

2. Краят B на прът шарнирно е закрепен към направляваща, движеща се хоризонтално. Прътът минава през шарнир A , който може да се върти около ос, перпендикулярна на равнината на движението (фиг.7); разстоянието $OA = a$. Да се намерят уравненията на неподвижната и подвижната центроиди.



фиг.7



фиг.8

Неподвижна координатна система: Oxy (фиг.7);

подвижна координатна система Vx_1y_1 (фиг.8). Моментен център на скоростите – Р.

Неподвижната центроида – геометрично място на моментните центрове в неподвижната равнина.

Координати на Р в неподвижната равнина : $x_P = \frac{a}{\operatorname{tg} \varphi}$; $y_P = \frac{AB}{\sin \varphi} = \frac{AO}{\sin^2 \varphi} = \frac{a}{\sin^2 \varphi}$

Изключване на ъгъла:

$$x_P^2 = a^2 \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}; \quad \sin^2 \varphi = \frac{a}{y_P} \Rightarrow x_P^2 = a(y_P - a) - \text{уравнение на}$$

неподвижната центроида (парабола)

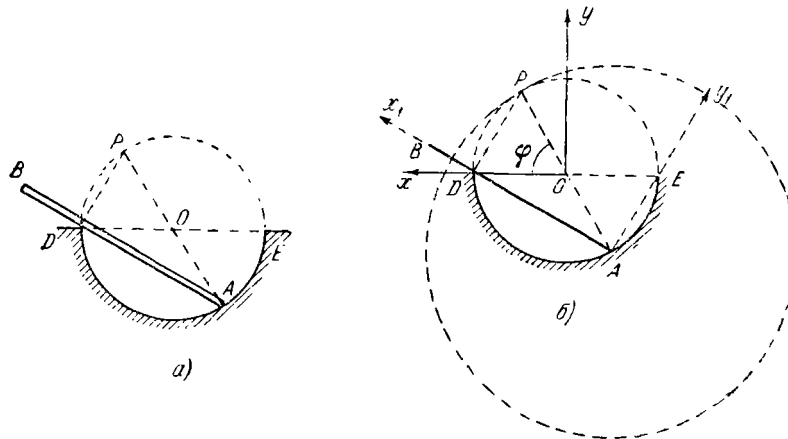
Координати на Р в подвижната равнина : $x_1 = BP \cos \varphi = \frac{a}{\sin^2 \varphi} \cos \varphi$; $y_1 = AB = \frac{a}{\sin \varphi}$

Изключване на ъгъла:

$$\sin \varphi = \frac{a}{y_1}, \quad x_1 = \frac{ay_1^2}{a^2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{y_1^2}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{y_1^2}}$$

$$\Rightarrow a^2 x_1^2 = ay_1^2 (y_1^2 - a^2) - \text{уравнение на подвижната центроида}$$

3. Прът АВ се движи в равнината на чертежа така, че единият му край А непрекъснато се пързая по полуокръжността ЕАD, а другият му край винаги се допира до неподвижната точка D на диаметъра ED. Да се намерят уравненията на неподвижната и подвижната центроиди.

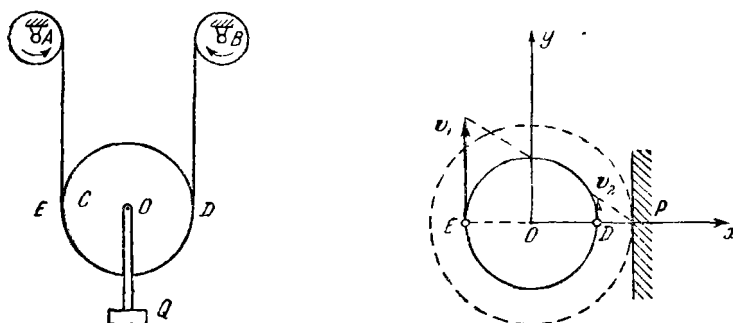


Скоростта на точка А описва дъга от окръжност, т.е. тя е по допирателната към нея и моментният център на скоростите лежи на перпендикуляр, издигнат от направлението на скоростта, т.е. по направление на радиуса \dot{y} . От друга страна скоростта на точка от пръта, съпадаща в момента с неподвижната точка D на диаметъра ED, има посока по направление на пръта, т.е. моментният център на скоростите лежи на перпендикуляр, издигнат от направлението на скоростта. Тогава моментният център на скоростите е пресечната точка Р на двата перпендикуляра, която лежи на окръжността – заради

вписания прав ъгъл с връх D. Или *геометричното място на моментните центрове на скоростите в неподвижната равнина – неподвижната центроида, е самата окръжност с център O и радиус OA.*

Точка P е на два пъти по-голямо разстояние от A и следователно ще описва окръжност в подвижната равнина с два пъти по-голям радиус - *подвижната центроида. Движението може да се разглежда като търкаляне на голямата окръжност по малката, допирайки се без хлъзгане в допирната им точка.*

4. Товар Q е закачен на макара C, имаща диаметър $d = 75$ [sm], която от своя страна се издига чрез две други макари A и B с радиуси $r = 20$ [sm], фиксирани неподвижно. Макара A прави $n_1 = 60$ [rpm], а макара B - $n_2 = 15$ [rpm]. Да се определят неподвижната и подвижната центроиди на макарата C.



Линейната скорост на точката, обща за макарата A и нишката, е

$$v_1 = r \omega_1 = 20 \cdot 60 \cdot \frac{2\pi}{60} = 40\pi \text{ [sm/s].}$$

Линейната скорост на точката, обща за макарата B и нишката, е

$$v_2 = r \omega_2 = 20 \cdot 15 \cdot \frac{2\pi}{60} = 10\pi \text{ [sm/s].}$$

Тези линейни скорости са всъщност скоростите на точки E и D, които са по допирателните към окръжностите на макарите, като в този случай перпендикулярите, издигнати от тях съвпадат, и моментният център не може да се определи като тяхна пресечна точка; това става, защото са известни големините им.

Ако l е разстоянието от D до моментния център на скоростите, то

$$v_1 = (d + l)\omega \quad \text{и} \quad v_2 = l\omega \quad \Rightarrow \quad l = \frac{dv_2}{v_1 - v_2} = 25 \text{ [sm].}$$

Неподвижна центроида: права на разстояние $l + \frac{d}{2}$ от оста “y”.

Подвижна центроида: окръжност с радиус $l + \frac{d}{2}$ от центъра O.

Движението може да се разглежда като търкаляне на окръжността по правата, допирайки се без хлъзгане в допирната им точка.