

## ЛЕКЦИЯ 24

### Аналитична механика

#### Съдържание

1. Уравнения Лагранж от първи род.
2. Уравнения Лагранж от втори род.
3. Интеграл на енергията.
4. Уравнения на Ойлер в динамиката на твърдо тяло.
5. Уравнения на динамиката при относително движение на точка.
6. Канонични уравнения на Хамилтон.

#### 1. Уравнения Лагранж от първи род.

- разглежда се на система от точки  $M_i$  с маси  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), чието положение се определя от координатите им  $(x_i, y_i, z_i)$ , като на системата са наложени  $s$  холономни връзки

$$\Phi_\alpha(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, s), \quad (1)$$

- вариациите на (1) имат вида

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, s) \quad (2)$$

- за системата независимите виртуални премествания са  $3n - s = k$  на брой, където  $k$  са степените на свобода
- всяко уравнение на (2) се умножава с неопределен множител  $\lambda_\alpha$  и след сумиране с общото уравнение на динамиката, взето във формата

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0, \text{ се стига до вида (3),}$$

където събираемите са групирани така, че да се обособят коефициентите пред виртуалните премествания:

$$\sum_{i=1}^n [(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i}) \delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial y_i}) \delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial z_i}) \delta z_i] = 0$$

- част от множителите  $\lambda_\alpha$  ( $s$  на брой) се определят от условието да приравнят на нули  $s$  на брой изрази в кръглите скоби на последния израз

- останалите събираеми от този вид са  $3n - s$  на брой, умножени с  $3n - s$  на брой независими вариации на координатите, т.е. те трябва да са равни на нула заради произволността на независими вариации на координатите
- последният израз се разпада на система от  $3n$  уравнения, наречени *уравнения Лагранж от първи род*:

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{ix} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_i}, \quad (i=1, \dots, n) \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{iy} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial y_i}, \quad (i=1, \dots, n) \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{iz} + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial z_i}, \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (4)$$

- системата (4) има  $3n$  уравнения с  $3n + s$  неизвестни:  $3n$  координати  $(x_i, y_i, z_i)$  и  $s$  множители  $\lambda_{\alpha}$
- сравнение с уравненията на движение на несвободна система, където (съгласно принципа на освобождаването) въздействието на връзките е заменено със силите на реакциите на връзките:

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + N_{ix}, \quad m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + N_{iy}, \quad m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + N_{iz} \quad (5)$$

от (4) и от (5) следва:

$$N_{ix} = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_i}, \quad N_{iy} = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial y_i}, \quad N_{iz} = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial z_i} \quad (6)$$

Или *решението на системата, съставена от (4) и (1), определя не само движението на точките на механичната система, а и реакциите на връзките.*

- От (4) се избират произволно  $s$  уравнения, от които се изразяват  $s$  множителя  $\lambda_{\alpha}$ , които се заместват в останалите  $3n - s$  уравнения; те заедно с уравненията на връзките (които са  $s$  на брой) образуват нова система от  $3n$  уравнения – от нея се определят  $3n$  координати  $(x_i, y_i, z_i)$  като функции на времето. След това се определят и множителите  $\lambda_{\alpha}$ , а чрез тях от (6) – и реакциите на връзките.

## 2. Уравнения Лагранж от втори род.

- Разглежда се система с  $k$  степени на свобода, подчинена на идеални холономни връзки. Положението ѝ се определя чрез  $k$  независими обобщени координати. Радиус-векторът  $\mathbf{r}_i$  на произволна точка се изразява чрез обобщените координати

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t, q_1, q_2, \dots, q_k), \quad (i=1, \dots, n) \quad (7)$$

- Виртуалните премествания  $\delta \mathbf{r}_i$  имат вида 
$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i} \delta q_i \quad (8)$$

- скоростите на точките се изразяват като 
$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \quad (9)$$

т.е. зависят *линейно* от обобщените скорости  $\dot{q}$

- за произволен индекс  $\alpha$  от (9) следва 
$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (10)$$

- след диференциране на (9) по  $q_\alpha$  се получава 
$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha \partial t} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_j} \dot{q}_j \quad (11)$$

- от друга страна непосредственото диференциране на  $\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}$  води до

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_\alpha} + \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_\alpha} \dot{q}_j, \text{ което е точно дясната част на (11);}$$

Или 
$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}, \text{ т.е.} \quad \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad (12)$$

- от общото уравнение на динамиката, където ускорението  $\mathbf{w}_i$  е записано като  $\dot{\mathbf{v}}_i$ :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (13)$$

- но  $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j$ , а второто събираемо на (13) се преобразува до

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \quad (14)$$

- изразът в скобите на дясната част на (14) се преобразува до

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{v}_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{m_i v_i^2}{2} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{m_i v_i^2}{2} \right)$$

НО

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = T \text{ е кинетичната енергия на системата; тогава за (14) се получава}$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^k \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j \text{ и (13) окончателно се записва като}$$

$$\sum_{j=1}^k \left( Q_j - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \quad (15)$$

- заради произволния избор на  $\delta q_j$  (15) се изпълнява само когато коефициентите пред  $\delta q_j$  са нули, т.е.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j=1, \dots, k) \quad (16)$$

Изразите (16) се наричат уравнения Лагранж от втори род; те са в независими обобщени координати за система с холономни връзки. Представяват система от  $k$  на брой ( $k$ -степен на свобода) обикновени диференциални уравнения от втори ред относно  $k$  независими обобщени координати, които са търсените функции на времето.

- ако всички сили са консервативни, т.е.  $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$ , ( $j = 1, \dots, k$ ), (16) приема вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad (j = 1, \dots, k) \quad (17)$$

и като се отчете, че потенциалната енергия не зависи от обобщените скорости:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, k) \quad (18)$$

- определение: *функция на Лагранж* (кинетичен потенциал)

$$L(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k) = T - \Pi \quad (19)$$

- уравненията на Лагранж от втори род се записват като

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (j = 1, \dots, k) \quad (20)$$

### 3. Интеграл на енергията.

- при стационарни връзки пълната производна на функцията на Лагранж има вида

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_i \right); \text{ от (20) следва } \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \text{ и след заместване се получава}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^k \left( \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_i \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_i \right) \quad (21)$$

или  $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_i \right)$ , което се записва като  $\frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_i \right) - L \right) = 0$ , (22)

от което следва, че изразът в скобите е константа, т.е. се стига до първи интеграл на уравненията на Лагранж от втори род, наречен *интеграл на енергията*

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_i - L = h \quad (23)$$

- при стационарни връзки (23) изразява закона за запазване на механичната енергия. Времето не участва явно и в уравненията фигурират само обобщените координати  $q_i$ . Кинетичната енергия се представя като квадратична форма (хомогенна функция от втора степен) на обобщените координати:

$$v_i^2 = \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_j \dot{q}_\alpha,$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^k A_{j\alpha} \dot{q}_j \dot{q}_\alpha, \text{ където } A_{j\alpha} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}, \text{ като } A_{j\alpha} = A_{\alpha j}; \text{ От друга страна}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k 2A_{j\alpha} \dot{q}_\alpha \text{ и след умножаване с } \dot{q}_j \text{ на двете страни на последното}$$

равенство и последващо сумиране по  $j$  се стига до

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha=1}^k 2A_{j\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \dot{q}_j = 2T$$

$$\text{Тогава от (23) } \sum_{j=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = 2T - (T - \Pi) = T + \Pi, \quad h = T + \Pi$$

Константата  $h$  представлява пълната механична енергия на системата, която е равна на сумата от началните стойности на кинетичната и потенциалната енергия.

- *циклични координати*: обобщени координати, които не влизат явно във функцията на Лагранж

Примери:

-при движение на точки при отсъствие на съпротивление

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \quad \Pi = \sum_{i=1}^n m_i g z_i, \text{ т.е. координатите } x \text{ и } y \text{ са циклични}$$

- при движение на точка под действие на централна сила  $\Pi = f(r)$ ,

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2), \text{ ъгловата координата } \varphi \text{ е циклична}$$

- от дефиницията на циклични координати следва ( $\nu$  - брой на цикличните координати)  $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, (j = 1, \dots, \nu)$  и уравненията на Лагранж се свеждат до

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const}, \quad (j = 1, \dots, \nu) \quad (24)$$

Последните изрази са първи интеграли на уравненията на Лагранж - *циклични интеграли*.

- определение: *обобщени импулси* - производните на функцията на Лагранж по обобщените скорости

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = p_j \quad (25)$$

#### 4. Уравнения на Ойлер в динамиката на твърдо тяло.

- Разглежда се тяло с неподвижна точка. От теоремата за изменение на момента на количеството движение на материална точка:  $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{m}^{(O)}$ , където  $\mathbf{K}$  - главен момент на количеството движение;  $\mathbf{m}^{(O)}$  - главен момент на външните сили относно неподвижната точка  $O$ .
- Ако  $Oxyz$  е фиксирана в тялото координатна система, тя ще има същата ъглова скорост  $\boldsymbol{\omega}$  както и тялото; в тази координатна система производната  $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$  се изразява чрез абсолютната производна  $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$  с израза  $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d'\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}$ , т.е.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_x &= \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y \\ \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_y &= \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z \\ \left(\frac{d\mathbf{K}}{dt}\right)_z &= \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x \end{aligned} \quad (26)$$

- ако за координатни оси на  $Oxyz$  се изберат главните оси на инерция на тялото в точка  $O$ , то  $K_x = J_1 \omega_x$ ,  $K_y = J_2 \omega_y$ ,  $K_z = J_3 \omega_z$ , където  $J_1, J_2, J_3$  са моментите относно осите, то след заместване в (26) се стига до

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_x + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z &= m_x \\ J_2 \dot{\omega}_y + (J_1 - J_3) \omega_z \omega_x &= m_y \\ J_3 \dot{\omega}_z + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y &= m_z \end{aligned} \quad (27)$$

където  $m_x, m_y, m_z$  са главните моменти на външните сили относно осите  $Ox, Oy$  и  $Oz$ . Изразите (27) - уравнения на Ойлер в динамиката на твърдо тяло с неподвижна точка.

- В общия случай движението на твърдо тяло се определя от движението на една негова точка (в частност – масовия център) и въртенето около тази точка. Ако полюс е масовият център, то движението му се определя от теоремата за масовия център  $M \mathbf{w}_C = \mathbf{V}$ , където  $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$  - главен вектор на външните сили.

Въртенето около масовия център се описва от теоремата за изменение на главния момент на количеството движение относно масовия център:  $\frac{d\mathbf{K}'}{dt} = \mathbf{m}^{(c)}$

- Методът, описващ движението на твърдо тяло с помощта  $M\mathbf{w}_c = \mathbf{V}$  и  $\frac{d\mathbf{K}'}{dt} = \mathbf{m}^{(c)}$ , се нарича *метод на Нютон-Ойлер*.

### 5. Уравнения на динамиката при относително движение на точка.

- в абсолютна координатна система съгласно втория закон на Нютон движението на материална точка се записва във вида  $m\mathbf{w}_a = \mathbf{F}$ , където  $\mathbf{F}$  е равнодействащата на силите, приложени към нея
- нека  $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w}_0$  съответно са векторите на ъгловата скорост, ъгловото ускорение и ускорението на началото за относителна координатна система спрямо абсолютната
- тогава  $\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c$ , където  $\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ ,  $\mathbf{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$  и
 
$$m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} - m\mathbf{w}_e - m\mathbf{w}_c$$
- преносна и Кориолисова сили на инерцията:  $\mathbf{S}_e = -m\mathbf{w}_e$ ,  $\mathbf{S}_c = -m\mathbf{w}_c$
- движението в относителната система с помощта на силите на инерцията се записва като  $m\mathbf{w}_r = \mathbf{F} + \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_c$
- *Диференциалните уравнения на динамиката в неинерциална система са същите както в инерциална, ако към приложените сили се добавят и силите на инерцията.*
- *Когато относителната система се движи спрямо абсолютната постъпателно, праволинейно и равномерно, то тя също представлява инерциална (Галилеева) координатна система. Уравненията на движение, записани в нея, не се отличават от записа в абсолютната система – в този случай силите на инерцията са нули.*
- *Всички Галилееви координатни системи от механична гледна точка са еквивалентни.*
- *От уравненията на относителното движение се получават и уравненията на относителното равновесие - след полагане на скоростта и ускорението на нули (тогава и Кориолисовата сила на инерцията е също нула) се стига до  $\mathbf{F} + \mathbf{S}_e = \mathbf{0}$*

### 6. Канонични уравнения на Хамилтон.

- определение: обобщени импулси  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
- функция на Хамилтон: 
$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \quad (28)$$

- трансформация на Лежандър и теорема на Донкин

Нека  $X = X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  е функция на  $n$  променливи, за която  $\det \left( \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0$ .

Тогава смяната на променливите  $y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}$  се нарича трансформация на Лежандър,

а  $X$  - пораздаща функция. Теоремата на Донкин твърди, че обратната трансформация  $y_i \rightarrow x_i$  също се поразда от функция  $Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - X$ , като

$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}$ . Ако освен променливите в  $X$  има и параметри  $\alpha_k$ , т.е.

$X = X(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , то тези параметри също се съдържат и във функцията  $Y$ , като  $\frac{\partial X}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j}$ .

- от уравненията на Лагранж:  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i$ , а чрез непосредствено

диференциране на функцията на Хамилтон:  $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$ ; от (28)  $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$

- *Канонични уравнения на Хамилтон:*  $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$  (29)

- Доказателство на теоремата на Донкин

От условието, че  $\det \left( \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} \right) \neq 0$ , т.е. Хесианът е неизроден, следва, че за смяната

$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}$  еднозначно е определено обратното преобразуване  $x_i \rightarrow y_i$ , т.е.

$x_i = f_i(y_1, \dots, y_n)$ . Нека в  $X$  има и параметри  $\alpha_k$ , които също ще се съдържат и във функцията  $Y$  (чрез променливите  $x_i$ ). Тогава пораздащата функция

$Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - X$  е функция само на променливите  $y_i$  и на параметрите  $\alpha_k$ , т.е.

$Y = \sum_{i=1}^n f_i y_i - X(f_1, \dots, f_n)$ . С непосредствено диференциране се стига до

$$\frac{\partial Y}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_k} y_i + f_k - \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_k} y_i + f_k - \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial f_i}{\partial y_k} = x_k$$

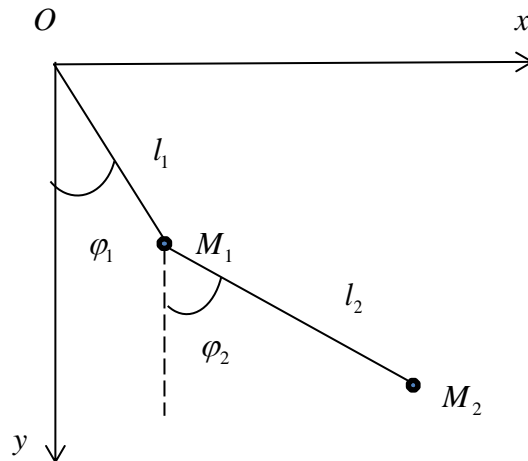
$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}, \text{ което доказва теоремата.}$$



- функцията на Лагранж има вида  $L(t, q, \dot{q})$ , а трансформацията на Лежандър води до променливите  $(t, q, p)$ , т.е. в означенията на теоремата на Донкин  $X$  е функцията на Лагранж  $L$ ,  $(x)$  е  $(\dot{q})$ , а  $(y)$  е  $(p)$ ; съгласно трансформацията на Лежандър:  $y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}$ , която в случая има вида  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  - точно обобщените импулси. Пораждащата функция на обратната трансформация  $y_i \rightarrow x_i$ , т.е.  $p \rightarrow \dot{q}$ , е функцията на Хамилтон  $H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L$ . За нея  $x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}$ , т.е.  $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ .

За  $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$  вече бе показано, че следва от  $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i$  и  $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$ .
- За  $(t, q)$ , разгледани като параметри във функциите  $H$  и  $L$ , от теоремата на Донкин следва, че са в сила  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$  и  $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$ .

Пример - двойно махало. Във вертикалната равнина  $Oxy$  се разглеждат два безтегловни пръта с дължини  $l_1$  и  $l_2$ , на чиито краища са окачени две материални точки с маси  $m_1$  и  $m_2$ . Началото  $O$  е неподвижна точка, а прътите  $OM_1$  и  $M_1M_2$  могат да се люлеят свободно около краищата си  $O$  и  $M_1$ . Да се изведат уравненията на движение на разглежданата система.



Координатите на двете точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  са общо четири на брой. Ограниченията, т.е. връзките, са две – изразяват условията, че дължините на прътите са неизменни:

$$x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0, \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l_2^2 = 0$$

Следователно степените на свобода са  $n = 4 - 2 = 2$ . За обобщени координати се избират двата ъгъла  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Тогава

$$x_1 = l_1 \sin \varphi_1, \quad y_1 = l_1 \cos \varphi_1; \quad x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \quad y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2$$

След диференциране:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1, & \dot{y}_1 &= -l_1 \sin \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1; \\ \dot{x}_2 &= l_1 \cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2, & \dot{y}_2 &= -l_1 \sin \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 - l_2 \sin \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2 \end{aligned}$$

Кинетична енергия на системата:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ T &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 (\cos^2 \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \sin^2 \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2) + \\ &+ \frac{1}{2} m_2 [(l_1 \cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2)^2 + (l_1 \sin \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1 + l_2 \sin \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2)^2] = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 \end{aligned}$$

Потенциална енергия на системата:

$$\Pi = -mgy_1 - mgy_2 = -mgl_1 \cos \varphi_1 - mg(l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2)$$

Функция на Лагранж:

$$L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = T - \Pi =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + m_2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \varphi_1 + m_2gl_2 \cos \varphi_2$$

Системата уравнения на Лагранж от втори род (20) се състои от две уравнения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$$

Тогава:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - m_2l_1l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \cdot \dot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -m_2l_1l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1$$

Или (след съкращаване на  $l_1$ ):

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - m_2l_1l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \cdot \dot{\varphi}_2 +$$

$$+ m_2l_1l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1 = 0 \quad ,$$

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 - m_2l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_2^2 +$$

$$+ (m_1 + m_2)g \sin \varphi_1 = 0 \quad (1^*)$$

Аналогично

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1 + m_2l_2^2\dot{\varphi}_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1 - m_2l_1l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \cdot \dot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = m_2l_1l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - m_2gl_2 \sin \varphi_2$$

Или (след съкращаване на  $m_2l_2$ ):

$$l_2^2\ddot{\varphi}_2 + l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1 - l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \cdot \dot{\varphi}_1 +$$

$$+ l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - g \sin \varphi_2 = 0 \quad (2^*)$$

Системата уравнения (1\*) и (2\*) описва движението на двойното махало.