ЛЕКЦИЯ 20

Аналитична механика

Съдържание

1. Главен момент на количеството движение.

- главен момент на количеството движение на система материални точки:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v_i} \,, \tag{1}$$

  където параметрите на абсолютното движение, влизащи в (1), са радиус-векторите $\mathbf{r_i}$ и скоростите $\mathbf{v_i}$ на материални точки с маси $m_i \; (i = 1,...,n)$, влизащи в изследваната система

- означения:

- неподвижна (или произволна инерциална) координатна система $Oxyz$ с начало O, относно която се определя векторът $\mathbf{K}$
- подвижна система $O'x'y'z'$ с радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ и скорост $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$ на началото ѝ O' в $Oxyz$, а $\boldsymbol{\omega}$ - ъглова скорост на $O'x'y'z'$ спрямо $Oxyz$
- $\mathbf{r_i'}$ - радиус-вектор на произволна точка M_i в $O'x'y'z'$, т.е. $\mathbf{r_i} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r_i'}$ (2)

- от (1) следва:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_i') \times m_i \mathbf{v_i} = \mathbf{r}_0 \times \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v_i} \tag{3}$$

  Но главният вектор на количеството движение на система материални точки е $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v_i} = M\mathbf{v}_C$, където $\mathbf{v}_C$ е скоростта на масовия център на системата, а $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ - нейната маса; тогава

$$\mathbf{K} = \mathbf{r_0} \times \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v_i} \tag{4}$$

- представяне на абсолютната скорост $\mathbf{v_i}$ в (4) чрез относителната скорост $\mathbf{v_i}^{(r)}$ и преносната $\mathbf{v_i}^{(\mathbf{e})} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_i'}$

- случай, когато началото O' съвпада с масовия център C на системата, а $O'x'y'z'$ се движи постъпателно (ω=0): $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_C$, $\mathbf{v_i}^{(\mathbf{e})} = \mathbf{v_0} = \mathbf{v}_C$, т.е. $\mathbf{v_i} = \mathbf{v_i}^{(r)} + \mathbf{v}_C$

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i^{(r)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' m_i \right) \times \mathbf{v_C}$$

при означение $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i^{(r)} = \mathbf{K}'$ и отчитане на $\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' m_i \right) = M\mathbf{r}_C' = \mathbf{0}$ се получава

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}' \qquad (5)$$

Или: *Главният момент* $\mathbf{K}$ *на количеството движение на система материални точки спрямо неподвижен център е векторна сума на момента на главния вектор на количеството движение на системата, приложен в масовия център, и на главния момент* $\mathbf{K}'$ *на количеството движение на системата относно масовия център при относителното движение на нейните точки в постъпателно движеща се координатна система*

- общ случай (преобразуване на последното събираемо на (4))

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' \times m_i (\mathbf{v}_i^{(r)} + \mathbf{v}_i^{(e)}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' \times m_i \mathbf{v}_i^{(r)} + (\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' m_i) \times \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' m_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i') =$$

$$= \mathbf{K}' + \mathbf{r}_C' \times M\mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i')$$

Или:
$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}' + \mathbf{r}_C' \times M\mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i') \qquad (6)$$

- частен случай: системата представлява твърдо тяло, като $O'x'y'z'$ е неподвижно свързана с него, т.е. $\mathbf{K}' = \mathbf{0}$ и (6) се опростява; когато началото O' съвпада с масовия център C, т.е. $\mathbf{r}_C' = \mathbf{0}$, (6) се опростява още повече до

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{Q} + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i') \qquad (7)$$

Или: *Главният момент на количеството движение на твърдо тяло спрямо неподвижен център е векторна сума на момента на главния вектор на количеството движение относно масовия център, и на главния момент на количеството движение при въртенето на тялото около масовия център*

2. **Теорема за изменение на главния момент на количеството движение относно масовия център.**

- теорема за изменение на момента на количеството движение на материална точка
  - означения:

  $\mathbf{m_O(F)} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ - момент на сила $\mathbf{F}$ (приложена в точка М с радиус-вектор $\mathbf{r}$ относно точка О) относно точка О

  $\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \mathbf{q} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ - момент на вектора на количеството движение ($\mathbf{v}$ - скорост на точката; m - маса на точката)

  - диференциране по времето: $\frac{d}{dt}\mathbf{k} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} \times \mathbf{q} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{q} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}\mathbf{q}$
  - от теоремата за изменение на количеството движение на материална точка: $\frac{d}{dt}\mathbf{q} = \mathbf{F}$, а $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \mathbf{0}$, т.е $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{m_O(F)}$ (8)

- сумиране на (8) по всички точки от системата материални точки:

  $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{m}^{(O)}$, $\mathbf{K}$ - главен момент на количеството движение; $\mathbf{m}^{(O)}$ - главен момент на външните сили относно неподвижен център О

  - означения:

  $\mathbf{m}^{(C)}$ - главен момент на външните сили относно масовия център С

  $\mathbf{r}_C$ - радиус-вектор на масовия център C спрямо О

  $\mathbf{V}$ - главен вектор на силите, действащи върху системата

- от (5) $\mathbf{K} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{Q} + \mathbf{K}'$, а $\mathbf{m}^{(O)} = \mathbf{m}^{(C)} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{V}$; тогава

  $$\frac{d}{dt}\mathbf{K} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_C \times \mathbf{Q}) + \frac{d}{dt}\mathbf{K}' = \mathbf{m}^{(O)} = \mathbf{m}^{(C)} + \mathbf{r}_C \times \mathbf{V}$$

  $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_C \times \mathbf{Q}) = \dot{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{Q} + \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{r}_C \times \mathbf{V}$, защото $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v_i} = M\mathbf{v}_C = M\dot{\mathbf{r}}_C$ и

  $\dot{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{Q} = \dot{\mathbf{r}}_C \times M\dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{0}$, а $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{V}$; тогава

  $$\frac{d}{dt}\mathbf{K}' = \dot{\mathbf{K}}' = \mathbf{m}^{(C)} \qquad (9)$$

  Или: *Производната на главния момент на количеството движение на системата относно масовия център, изчислена в постъпателно движеща се координатна система, свързана с масовия център, е равна на главния момент на външните сили относно масовия център.*

- следствие: *Теоремата за изменение на главния момент на количеството движение запазва същата формулировка и при относителното движение на точките от системата спрямо масовия център, като количеството движение на точките от системата и моментите им се изчисляват спрямо* *осите на координатна система, движеща се постъпателно заедно с масовия център.*

- теоремата (9) е в сила и в частния случай, когато системата представлява твърдо тяло

3. **Теорема за запазване на главния момент на количеството движение.**

   Ако главният момент на външните сили относно неподвижна точка е нула, то главният момент на количеството движение относно тази точка е постоянен по големина и направление.

- теоремата е в сила и за случая, когато *главният момент на външните сили на системата относно масовия център е нула; тогава главният момент на количеството движение на системата относно масовия център е постоянен.*
- когато при движение някои проекции по координатни оси на момента на външните сили са нули, то съответните проекции на главния момент на количеството движение по тези остават постоянни.
- пример: В слънчевата система се избират координатни оси с начало масовия център на слънчевата система, насочени към три „неподвижни“ звезди („звездна координатна система“). Пренебрегва се действието на звездите върху системата, т.е. тя е изолирана и силите на привличане между телата в нея са вътрешни. Тогава главният момент на количеството движение на системата относно масовия център остава постоянен и съществува равнина, перпендикулярна на неговото направление – „неизменна равнина на планетната система“ (Лаплас, 1749-1827)
- пример: Завъртане на човек около вертикална ос, минаваща през масовия му център, като човекът стои на гладка повърхност и няма триене. Външни сили: тегло на човека и реакция на опората – и двете минават през масовия център, т.е. главният момент е нула относно вертикалната ос, следователно проекцията на главния момент на количеството движение по тази ос се запазва постоянен. В начално състояние на покой при завъртане на ръката си (с ъглова скорост ω_1; J_1- инерчен момент на ръката относно оста) тялото се завърта в обратна посока (с ъглова скорост ω_2; J_2- инерчен момент на тялото относно оста), защото $J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = 0$, т.е. $\omega_2 = -\omega_1 \dfrac{J_1}{J_2}$. За да се увеличи ω_2, трябва или да се увеличи ω_1, или в ръката да се вземе тежък предмет (увеличава се J_1)
- пример:
  - акробат, правещ салто около хоризонтална ос след отблъскване от земята
  - падане на котка от височина (силата на тежестта няма момент относно масовия център; моментът на количеството движение се запазва и котката извива тялото си чрез движение на лапи и опашка)

4. Работа на сила. Мощност.

- понятието „работа на сила“ – мярка за въздействието на сила върху материална точка
- определение: работа W на сила $\mathbf{F}$, имаща постоянно направление и големина, за преместване $\mathbf{u}$ на материална точка:

$$W = Fu\cos\alpha, \qquad \text{където } \alpha \text{ е ъгълът между силата } \mathbf{F} \text{ и } \mathbf{u} \tag{10}$$

- или: $$W = \mathbf{Fu} \tag{11}$$
  работата W на силата $\mathbf{F}$ за преместване $\mathbf{u}$ е равна на скаларното произведение на силата и преместването
- мерни единици: джаул; $1[J] = 1[Nm]$
- ако към точка са приложени различни сили $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \ldots$, то за преместване $\mathbf{u}$ работата на равнодействащата им $\mathbf{R}$ е равна на сумата от работите на приложените към точката сили: $W = \mathbf{Ru} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots)\mathbf{u} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots$
- в случай на последователни премествания $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \ldots, \mathbf{u_n}$ на точката, на която действа сила $\mathbf{F}$, работата на силата за крайното преместване $\mathbf{u}$ е сума от работите за всяко преместване: $\mathbf{Fu}_1 + \mathbf{Fu}_2 + \mathbf{Fu}_3 + ..\mathbf{Fu}_n = \mathbf{F}(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3} + \ldots + \mathbf{u_n}) = \mathbf{Fu}$
- обобщение на определението за работа на сила, действаща на точка, в случая на променлива сила и криволинеен път
  - елементарна работа δW на сила $\mathbf{F}$ за елементарно преместване $d\mathbf{r}$ ($|d\mathbf{r}| = ds$ при естествена параметризация на траекторията чрез дължината на изминатата дъга) $$\delta W = \mathbf{F}d\mathbf{r} = Fds\cos\alpha = F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{12}$$
  - за краен участък (път) $M_1 M_2$ работата е сума от елементарните работи за отделни безкрайно малки премествания: $$W = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_{M_1}^{M_2} F\cos\alpha\, ds \tag{13}$$
  - (13) е криволинеен интеграл по дължината на траекторията, взет от положение M_1 до положение M_2 на точката; по определение такъв интеграл се нарича *циркулация на вектора* $\mathbf{F}$ *по дъгата* $M_1 M_2$ (термини в хидродинамиката, електродинамиката и др.)
  - частен случай на затворен контур “С”,т.е. M_1 съвпада с M_2: $$W = \oint_C \mathbf{F}d\mathbf{r} \tag{14}$$
- свеждане на (13) до определен интеграл (по аргумент - времето t)
  при зададено движение на точката: $x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$ и
  при зададен закон за изменение на силата:

$$F_x = F_1(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\, F_y = F_2(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\, F_z = F_3(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),$$

тогава $\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz = F_1 f_1' dt + F_2 f_2' dt + F_3 f_3' dt = \Phi(t)dt$,

$W = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t)dt$, ($t_1, t_2$ - моменти, съответстващи на положенията M_1 и M_2)

- при движение по права (избрана за ос x) и $\mathbf{F}$ - функция само на x:

$$\delta W = F_x dx \quad \text{и} \quad W = \int_{x_1}^{x} F dx$$

- ❖ в общия случай (12) не е пълен диференциал на някаква функция; означението δ символизира безкрайно малки величини
- определение: *мощност – извършена работа за определен интервал време* (характеризиране на работата от гледна точка на времето)

$$N = \frac{\delta W}{dt} = \mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z \tag{15}$$

  или: мощността е равна на скаларното произведение на векторите на силата и скоростта; мерни единици: ват - $1[W] = 1[J/s]$
- частен случай на работата на силата на тежестта $\mathbf{G}$

  Нека материална точка с маса m се движи по траектория (крива) L от положение M_1 до положение M_2. За преместване $d\mathbf{r}$ елементарната работа е

$$\delta W = \mathbf{G}d\mathbf{r} = G_x dx + G_y dy + G_z dz$$

  При избор на координатни оси, така че оста Oz е противоположна на земното притегляне: $G_x = 0$, $G_y = 0$, $G_z = -G = -mg$

  - елементарната работа се изразява като пълен диференциал от функция на координатите на точката: $\delta W = -mgdz = -d(Gz)$ (16)

  За пълната работа на краен участък M_1M_2 от движението:

$$W = -\int_{M_1}^{M_2} d(Gz) = G(z_1 - z_2) = mg(z_1 - z_2)$$

  Или: Работата на силата на тежестта е равна на произведението ѝ с разликата във височините на началното и крайното положение на точката; тя е положителна, когато крайното положение е по-ниско от началното, а в противен случай – отрицателна. Тази работа не зависи от вида на траекторията на точката.
- определение: *потенциални (консервативни) сили* – чиято работа зависи само от началното и крайното положение на точката

  Работата на консервативните сили се явява пълен диференциал на някаква функция на координатите на точката и заради това не зависи от вида на траекторията на точката.

- за система от материални точки (индексите 1 и 2 съответстват на началното и крайното положение на системата)

$$W=\sum_{i=1}^{n}G_i(z_{i1}-z_{i2})=\left(\sum_{i=1}^{n}G_i z_i\right)_1-\left(\sum_{i=1}^{n}G_i z_i\right)_2$$

Ако $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$ е общата маса на системата, а z_C - координата на центъра на тежестта, то $Gz_C=\sum_{i=1}^{n}G_i z_i$ и $W=G(z_{C1}-z_{C2})=Mg(z_{C1}-z_{C2})$ (17)

Работата е равна на сумарната сила на тежестта за цялата система, умножена по разликата в началното и крайното положение на масовия център (в случая той съвпада с центъра на тежестта). Тази работа е еквивалентна на работата на сумарната сила на тежестта $G=\sum_{i=1}^{n}G_i$ на цялата система, приложена в масовия център, и е изчислена за крайно движение на масовия център – разглеждан като материална точка, където е съсредоточена цялата маса на системата.

- частен случай на работата на сили, приложени към абсолютно твърдо тяло

Нека силите $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\mathbf{F}_3,..,\mathbf{F}_n$ са приложени към твърдо тяло в точки $M_i\ (i=1,...,n)$;

$\mathbf{r_i}$ - радиус-вектори на M_i спрямо начало на неподвижна координатна система;

O- точка от тялото (полюс) с - радиус-вектор $\mathbf{r}_0$, а $\mathbf{r_i'}$- радиус-вектори на M_i спрямо полюса. За всяка точка M_i: $d\mathbf{r_i}=d\mathbf{r}_0+d\mathbf{r_i'}=d\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r_i'}$, където $\boldsymbol{\theta}$ е вектор на малкото завъртане около полюса.

Елементарната работа на силата $\mathbf{F_i}$ е:

$$\delta W_i=\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i=\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_0+\mathbf{F}_i(\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{r_i'})=\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r_i'}\times\mathbf{F_i})=\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_0+\boldsymbol{\theta}\mathbf{m}_O(\mathbf{F_i})$$

Означение: $d\varphi$- безкрайно малък ъгъл на завъртане около моментната ос, т.е. големината на вектора на малкото завъртане; тогава

$\boldsymbol{\theta}\mathbf{m}_O(\mathbf{F_i})=|\mathbf{m}_O(\mathbf{F_i})|d\varphi\cos(\boldsymbol{\theta},\mathbf{m}_O)=m_L(\mathbf{F_i})d\varphi$, т.е. проекцията на момента на $\mathbf{F_i}$ относно ос L, успоредна на оста на малкото завъртане и минаваща през полюса.

Означение: $\mathbf{V}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F_i}$ - главен вектор на външните сили;

$\mathbf{m}^{(O)}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i)$ - главен момент на силите относно полюса;

$\mathbf{m}_L$ - главен момент на силите относно оста L

Или: $\delta W=\sum_{i=1}^{n}\delta W_i=(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F_i})\ d\mathbf{r}_0+(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{m}_O(\mathbf{F_i}))\boldsymbol{\theta}=\mathbf{V}\ d\mathbf{r}_0+\mathbf{m}^{(O)}\boldsymbol{\theta}=\mathbf{V}\ d\mathbf{r}_0+\mathbf{m}_L d\varphi$

При въртене около неподвижна ос и избор на полюса върху тази ос $d\mathbf{r}_0=\mathbf{0}$.

При въртене около неподвижна точка векторът на малкото завъртане се определя чрез ъглите на Ойлер като $\mathbf{\theta} = \mathbf{k}d\psi + \mathbf{n}d\theta + \mathbf{k}'d\varphi$ и $\mathbf{m}^{(O)}\,\mathbf{\theta} \; = m_z d\psi + m_N d\theta + m_{z'} d\varphi$; в общия случай на движение на твърдо тяло $\delta W \; = \mathbf{V} \; d\mathbf{r}_0 \, + m_z d\psi + m_N d\theta + m_{z'} d\varphi$

Или работата на силите, приложени към твърдо тяло, се изразява чрез главния вектор и главния момент на тези сили. Работата на вътрешните сили на взаимодействие на точките от твърдото тяло е нула (главният вектор и главният момент на вътрешните сили са нулеви вектори).

- работа на еластична сила
  - праволинейно движение под дейсвие на сила, породена от пружина

  За ос Ox се избира направлението на движението, като $F_x = -cx$

  Тогава $\delta W = F_x dx = -cxdx = d\left(-\dfrac{cx^2}{2}\right)$; $W = \int\limits_{M_1}^{M_2} \delta W = \int\limits_{M_1}^{M_2} d\left(-\dfrac{cx^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}c(x_1^2 - x_2^2)$

  - движение по произволна крива: $\mathbf{F} = -c\mathbf{r}$ (c - коефициент на еластичност)

  $$\delta W = \mathbf{F}d\mathbf{r} = -c\mathbf{r}d\mathbf{r} = -cd\left(\frac{(\mathbf{r}\,\mathbf{r})}{2}\right) = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right);\; W = \int\limits_{M_1}^{M_2} d\left(-\frac{cr^2}{2}\right) = \frac{1}{2}c(r_1^2 - r_2^2)$$

  - движение при усукване: $m_z = -k\varphi$ - проекция на момента на силата на усукване; (φ - ъгъл на усукване; k коефициент на еластичност)

  $$\delta W = -k\varphi d\varphi, \qquad W = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} (-k\varphi d\varphi = \frac{1}{2}k(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)$$

  Работата на еластичните сили при отклонение от недеформирано състояние зависи само от началното и крайното положение. Еластичната сила се стреми да възстанови равновесното (недеформираното) състояние. При отдалечаване от него работата на еластичната сила е отрицателна, а при приближаване – положителна. Работата на еластичните сили е пропорционална на квадрата на преместването.

5. **Кинетична енергия на система материални точки. Теорема на Кьониг.**

- определение: кинетична енергия – мярка за движението материална точка

  $T = \dfrac{1}{2}mv^2$ (m и v - маса и скорост на материалната точка) (18)

- кинетична енергия на система от материални точки: $T = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} m_i v_i^{\,2}$ (19)

- мерни единици: джаул; $1\left[kg\dfrac{m^2}{s^2}\right] = 1\left[(kg\dfrac{m}{s^2})m\right] = 1[Nm] = 1[J]$

- Теорема на Кьониг(1712-1757)

  Кинетичната енергия на система от материални точки е равна на сумата от кинетичната енергия на цялата маса на системата, съсредоточена в масовия *център и движеща се със скоростта на масовия център, и кинетичната енергия на системата в относителното ѝ движение относно постъпателно движеща се координатна система с начало в масовия център.*

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + T' = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (v_i^{(r)})^2 \ , \tag{20}$$

където $v_i^{(r)}$ - големини на скоростите на точки с маси $m_i \ (i = 1,...,n)$ относно постъпателно движеща се координатна система с начало в масовия център;

- нека първоначално масовият център не съвпада с началото на подвижна система $O'x'y'z'$, като началото ѝ O' в неподвижната координатна система $Oxyz$ има радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ и скорост $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$
- при постъпателно движеща се координатна система преносната скорост е $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}_0$; тогава абсолютната скорост е $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{(r)} + \mathbf{v}_i^{(e)} = \mathbf{v}_i^{(r)} + \mathbf{v}_0$ и от (19):

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i^{\ 2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{v}_i^{(r)} + \mathbf{v}_0)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{v}_i^{(r)})^2 + \sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{v}_i^{(r)})\mathbf{v}_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_0^{\ 2} \tag{21}$$

В последното равенство се означава $T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{v}_i^{(r)})^2$, а $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_0^{\ 2} = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_0^{\ 2}$;

За средното събираемо се получава: $\sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{v}_i^{(r)})\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 \sum_{i=1}^{n} m_i (\mathbf{v}_i^{(r)}) =$

$$= \mathbf{v}_0 \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{\mathbf{r}}_i^{(r)}) = \mathbf{v}_0 \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_0) = \mathbf{v}_0 \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{v}_0 \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0 M \mathbf{v}_C - \mathbf{v}_0 M \mathbf{v}_0 =$$

$$= \mathbf{v}_0 M (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_0) = M\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_C^{(r)}$$

- при съвпадане на масовият център с началото на подвижната система $O'x'y'z'$: $\mathbf{v}_C^{(r)} = \mathbf{0}$ (средното събираемо на (21) отпада) и $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_C$, т.е. (21) приема вида (20), с което теоремата е доказана
- *Кьонигова система* - постъпателно движеща се (спрямо неподвижна координатна система) координатна система с начало <u>в масовия център</u> на система от материални точки

6. Кинетична енергия на абсолютно твърдо тяло.

- при постъпателно движение на твърдо тяло скоростта $\mathbf{v}$ на всички негови точки е една и съща и изразът за кинетичната енергия се записва като

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i^{\ 2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}M\mathbf{v}^2 \tag{22}$$

- при въртеливо движение около неподвижна ос Oz с ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}$, скоростта $\mathbf{v}$ на всяка точка маса m_i се записва като $\mathbf{v}_\mathbf{i} = \boldsymbol{\omega}_i h_i$, където h_i - разстояние до оста, а J_z е инерчният момент на тялото относно оста на въртене

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\omega h_i)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^{\,2} = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \qquad (23)$$

- при равнинно движение на твърдо тяло относителното му движение относно постъпателно движеща се координатна система се явява въртене на тялото ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}$; когато началото на постъпателно движещата се координатна система е масовият център С, в нея (23) приема вида $T' = \frac{1}{2} J_z^{(C)} \omega^2$, (24)

  където $J_z^{(C)}$ е инерчният момент на тялото относно ос, перпендикулярна на равнината на движението и минаваща през масовия му център

  Или в общия случай на равнинно движение (постъпателно заедно с полюса и въртеливо около полюса): $T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_C^2 + \frac{1}{2} J_z^{(C)} \omega^2$ (25)

7. Теорема за изменение на кинетичната енергия.

- теоремата свързва изменението на кинетичната енергия на система материални точки с работата на силите, предизвикващи това изменение
- от основното уравнение за материална точка след скаларно умножаване с елементарно преместване $d\mathbf{r}$ и отчитане на $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ се стига до

  $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = \mathbf{F} d\mathbf{r}$, $m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\mathbf{v}dt = m\mathbf{v}d\mathbf{v} = d(\frac{m}{2}\mathbf{v}\mathbf{v}) = d\frac{mv^2}{2} = dT$;

  от друга страна $\mathbf{F}d\mathbf{r} = \delta W$ - елементарната работа на силата за преместване $d\mathbf{r}$
- тогава $dT = \delta W$ (26)

  (диференциална форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия)

  Изменението на кинетичната енергия на материална точка при елементарно преместване е равно на елементарната работа на приложените към точката сили, извършена за това преместване.
- означения:

  M_1 - начално положение на точката, в което има скорост $\mathbf{v}_1$

  M_2 - крайно положение на точката, в което има скорост $\mathbf{v}_2$

  $W_{1,2}$ - работа на силите, действащи на точката за преместване M_1M_2
- интегриране на (26): $\int_{M_1}^{M_2} dT = \int_{M_1}^{M_2} \delta W \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W_{1,2} \Rightarrow T_2 - T_1 = W_{1,2}$ (27)
- (интегрална форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия)

  Изменението на кинетичната енергия на материална точка при крайно преместване е равно на сумата от работите на приложените към точката сили, извършени за това преместване.

- (форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия чрез понятието мощност): *Производната по времето на кинетичната енергия на материална точка е равна на мощността на действащите на точката сили.*

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = N \qquad (28)$$

- обобщение за система от материални точки (сумиране на кинетичната енергия и елементарната работа за всички точки) - от $d\,\frac{m_i v_i^{\,2}}{2} = dT_i = \delta W_i$ и $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i^{\,2}$:

$$dT = d\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i^{\,2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta W_i$$

- педставяне на $\sum_{i=1}^{n} \delta W_i$ чрез елементарната работа δW на външните сили и елементарната работа $\delta W'$ на вътрешните сили: $dT = \delta W + \delta W'$ (29)
- (диференциална форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия) *Изменението на кинетичната енергия на система материална точка при елементарно преместване е равно на сумата от елементарните работи на външните и вътрешните сили, действащи на системата за това преместване.*
- (интегрална форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия)

$$T_2 - T_1 = \int_{(1)}^{(2)} \delta W + \int_{(1)}^{(2)} \delta W' = W_{1,2} + W'_{1,2} \qquad (30)$$

Изменението на кинетичната енергия на система материални точки при крайно преместване е равно на сумата от работите на външните и вътрешните сили, действащи на системата за това преместване.

- (форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия чрез мощностите N и N' на външните и вътрешните сили $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}'_i \mathbf{v}_i = N + N' \qquad (31)$$

Производната по времето на кинетичната енергия на система материални точки е равна на мощностите на външните и вътрешните сили, действащи на системата .