ЛЕКЦИЯ 2

Аналитична механика

Съдържание

1. Вектор ъглова скорост.

- Векторна функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ на скаларен аргумент t.

- представяне

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}\,\mathbf{,}$$

  $\mathbf{i}$ **,** $\mathbf{j}$ **,** $\mathbf{k}$ - единични вектори по координатните оси на Декартова система

- общ случай: $\mathbf{e_1}$ **,** $\mathbf{e}_2$ **,** $\mathbf{e_3}$ - единични вектори по координатните оси на дясно ориентирана координатна система, които са функции на времето

- производна на векторна функция

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e_1} + x(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + \dot{y}(t)\mathbf{e_2} + y(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + \dot{z}(t)\mathbf{e_3} + z(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e_1} + \dot{y}(t)\mathbf{e_2} + \dot{z}(t)\mathbf{e_3} + x(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + y(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2} + z(t)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{3}$$

- при постоянна големина векторът и производната му са перпендикулярни

  $\mathbf{e_1} \perp \frac{d\mathbf{e_1}}{dt}$ или $\mathbf{e_1} \perp \dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$**,** т.е**.**

  $\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$ лежи в равнина,успоредна на определената от другите два единични вектора

$$\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1} = a'\mathbf{e_2} + a''\mathbf{e_3}$$

аналогично $\qquad \dot{\mathbf{e}}_2 = b'\mathbf{e}_3 + b''\mathbf{e}_1$, $\dot{\mathbf{e}}_3 = c'\mathbf{e}_1 + c''\mathbf{e}_2$

- определяне на константите

$$
\begin{array}{lll}
a' = \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2, & a'' = \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3 & \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 \\
b' = \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3, & b'' = \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1 & \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1 \\
c' = \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1, & c'' = \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2 & \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2
\end{array}
$$

- ***съществува единствен вектор***

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$$

така че

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{e}}_1, \qquad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_2, \qquad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3 = \dot{\mathbf{e}}_3$$

доказателство

тъждества: $\qquad \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$

$$0 = \frac{d}{dt}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\dot{\mathbf{e}}_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1\dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1$$

$$0 = \frac{d}{dt}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\dot{\mathbf{e}}_3 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2\dot{\mathbf{e}}_3 = -\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2$$

$$0 = \frac{d}{dt}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\dot{\mathbf{e}}_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1 = -\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3$$

или

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1 = \omega_1\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1 + \omega_3\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \omega_2(-\mathbf{e}_3) + \omega_3\mathbf{e}_2$$

сравнение на коефциентите

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3$$

или $\qquad \omega_2 = -\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3, \quad \omega_3 = \dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2$

аналогично

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2 = \omega_1\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 + \omega_2\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 = \omega_1\mathbf{e}_3 + \omega_3(-\mathbf{e}_1)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1$$

$\omega_1 = \dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3$, $\qquad \omega_3 = -\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1$

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3 = \omega_1\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3 + \omega_2\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 + \omega_3\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3 = \omega_1(-\mathbf{e}_2) + \omega_2\mathbf{e}_1$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2$$

$\omega_1 = -\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2$, $\qquad \omega_2 = \dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1$

окончателно

$$\boldsymbol{\omega} = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_1 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_3$$

проверка

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 =$$

$$= \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle(-\mathbf{e}_3) + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 = \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle-\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_3 = \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3$$

или $\quad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1 = \dot{\mathbf{e}}_1$

аналогично

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2 =$$

$$= \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle(-\mathbf{e}_1) = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle-\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_1 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_3 + \langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1$$

или $\quad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_2$

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3=\langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3+\langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3+\langle\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3=$$

$$=\langle\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle(-\mathbf{e}_2)+\langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1=\langle-\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3\rangle\mathbf{e}_2+\langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1=\langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2+\langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1$$

$$\dot{\mathbf{e}}_3=\langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1\rangle\mathbf{e}_1+\langle\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_2\rangle\mathbf{e}_2$$

или $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3=\dot{\mathbf{e}}_3$

елиминиране на производните на единичните вектори

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\dot{x}(t)\mathbf{e}_1+\dot{y}(t)\mathbf{e}_2+\dot{z}(t)\mathbf{e}_3+x(t)\dot{\mathbf{e}}_1+y(t)\dot{\mathbf{e}}_2+z(t)\dot{\mathbf{e}}_3$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\dot{x}(t)\mathbf{e}_1+\dot{y}(t)\mathbf{e}_2+\dot{z}(t)\mathbf{e}_3+x(t)\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_1+y(t)\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_2+z(t)\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_3$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\dot{x}(t)\mathbf{e}_1+\dot{y}(t)\mathbf{e}_2+\dot{z}(t)\mathbf{e}_3+\boldsymbol{\omega}\times(x(t)\mathbf{e}_1+y(t)\mathbf{e}_2+z(t)\mathbf{e}_3)$$

- ***Абсолютна производна*** $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ ***и релативна производна*** $\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)=\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

- частни случаи при $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ и $\frac{d^*\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{0}$

- матрично представяне на векторно произведение

$\boldsymbol{\omega}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$; $\mathbf{r}(r_1,r_2,r_3)$

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&-\omega_3&\omega_2\\\omega_3&0&-\omega_1\\-\omega_2&\omega_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}$$

2. **Разлагане на ускорението по осите на естествения триедър**.

- единични вектори по осите на естествения триедър s - криволинейна абсциса

s = s(t)   естествен закон на движение на точката

диференциал на дъга $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

за $d\mathbf{r}\,(dx, dy, dz\,)$: $|d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

$\boldsymbol{\tau}$ - *единичен вектор по тангентата към траекторията*

$\Delta\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{\tau}_2(t) - \boldsymbol{\tau}_1(t)$ - за две различни положения на точката

$|\Delta\boldsymbol{\tau}| = 2|\boldsymbol{\tau}|\sin\dfrac{\alpha}{2} = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$, α - ъгъл между векторите

$\lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta \tau}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{2\sin(\alpha/2)}{(\alpha/2)} \dfrac{(\alpha/2)}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\alpha}{\Delta s} = \kappa$ - кривина на крива

радиус на кривината $\rho = \dfrac{1}{\kappa}$

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \qquad \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \kappa,$$

$\left(\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\left|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|^{-1} = \mathbf{n}$ - единичен вектор по главната нормала

$\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa\left(\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\left|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|^{-1} = \kappa\,\mathbf{n}$ $\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa\,\mathbf{n}$ ***формула на Френе***

- единичен вектор по бинормалата

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$$

- разлагане на скоростта по осите на естествения триедър

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau}\,\dot{s} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}$$ - *компонент само по тангентата*

- разлагане на ускорението по осите на естествения триедър

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau}\,\dot{s} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}\,, \qquad v^2 = \dot{s}^2$$

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\boldsymbol{\tau}) = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}\left(\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2\kappa\,\mathbf{n} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}^2\frac{1}{\rho}\mathbf{n}$$

$$\mathbf{w} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}$$

тангенциално ускорение - $w_\tau = \ddot{s}$

нормално ускорение - $w_n = \dfrac{v^2}{\rho}$

големина - $|w| = \sqrt{\ddot{s}^2 + \dfrac{v^4}{\rho^2}}$

Примери:

1. Точка се движи по окръжност с радиус r и с постоянно тангенциално ускорение w_τ. Да се определи в кой момент нормалното ускорение ще стане равно на тангенциалното и дължината на изминатата дъга до този момент.

$w_\tau = \dfrac{dv_\tau}{dt} \Rightarrow v_\tau = w_\tau t + C$; при начални условия $t = 0, \quad v_\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

нормалното ускорение е равно на $w_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{w_\tau^2}{r} t^2$

в момент t_1 нормалното ускорение ще стане равно на тангенциалното:

$$\frac{w_\tau^2}{r} t_1^2 = w_\tau \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{r}{w_\tau}}$$

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = w_\tau t \quad \Rightarrow \quad s = w_\tau \frac{t^2}{2} + C_1 \qquad t = 0, \quad s = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

дължината на изминатата дъга $\qquad s_1 = w_\tau \dfrac{t_1^2}{2} = \dfrac{w_\tau}{2} \dfrac{r}{w_\tau} = \dfrac{r}{2}$

2. Точка се движи съгласно уравнението $s = ae^{kt}$, като ъгълът между пълното и тангенциалното ускорение неизменно остава 60 градуса. Да се определи скоростта, нормалното и пълното ускорение и радиусът на кривината на траекторията като функция на изминатата дъга.

$$v_\tau = \frac{ds}{dt} = ake^{kt} = ks, \qquad w_\tau = \dot{v}_\tau = ak^2 e^{kt} = k^2 s$$

$$w \cos 60 = w_\tau \quad \Rightarrow \quad w = \frac{w_\tau}{\cos 60} = 2k^2 s$$

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \sqrt{3} k^2 s$$

и радиусът на кривината: $\rho = \dfrac{v^2}{w_n} = \dfrac{k^2 s^2}{\sqrt{3} k^2 s} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} s = \dfrac{\sqrt{3}}{3} ae^{kt}$ расте неограничено.

Траекторията на точката е разходяща спирала.

3. Радиус-векторът на движеща се точка има вида $\mathbf{r} = \cos(2t)\mathbf{e_1} - \sin(2t)\mathbf{e_2} + t\,\mathbf{e_3}$ в ортонормиран базис $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$. Да се определи векторът на скоростта на точката, когато базисът е неподвижен и също в случая, когато базисът се върти с постоянна ъглова скорост $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e_3}$. Да се намерят производната на големината на радиус-вектора и големината на производната на радиус-вектора и да се покаже, че те са различни.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}\begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \omega\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\,; \quad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ -2\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ -\cos 2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

големина на вектора:

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\cos^2 2t + \sin^2 2t + t^2} = \sqrt{1+t^2}$$

производна на големината на вектора:

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}| = \frac{d}{dt}\sqrt{1+t^2} = \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

големина на производната на вектора в случая на неподвижен базис:

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t + 1} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

големина на производната на вектора в случая на подвижен базис:

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\sin^2 2t + \cos^2 2t + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

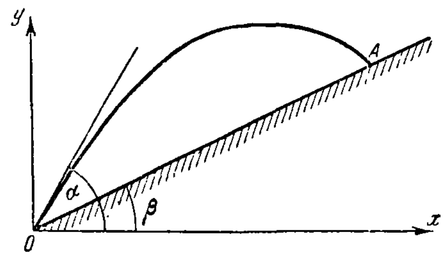
4. Точка е хвърлена вертикално нагоре. Уравнението на нейното движение при отсъствие на съпротивление има вид $x = v_0 t - gt^2/2$, където v_0 и g са постоянни коефициенти. Да се определи скоростта и ускорението на точката, максималната височина, до която тя ще се издигне, и времето за издигане до тази максимална височина.

Скорост: $\dot{x} = v = v_0 - gt$; ускорение: $\bar{x} = w - g$

Максимална височина: в момент T, в който скоростта стане равна на 0, т.е. $0 = v_0 - gT$

или $T = \frac{v_0}{g}$, а максималната височина - $h = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2}{g_2}$

5. Снаряд, намиращ се в подножието на възвишение, което е под ъгъл β към хоризонта, е изстрелян подъгъл α към хоризонта. Уравненията на движението му са: $x = v_0 \cos\alpha t$, $y = v_0 \sin\alpha t - gt^2/2$. Какъв трябва да бъде ъгъл α , така че да се постигне максимална далекобойност?



Траекторията се намира чрез изключване на времето: $y = tg\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2}\frac{x^2}{\cos^2\alpha}$

Правата OA има уравнение $y = x tg\beta$ и в точка A снарядът ще има същата y-координата:

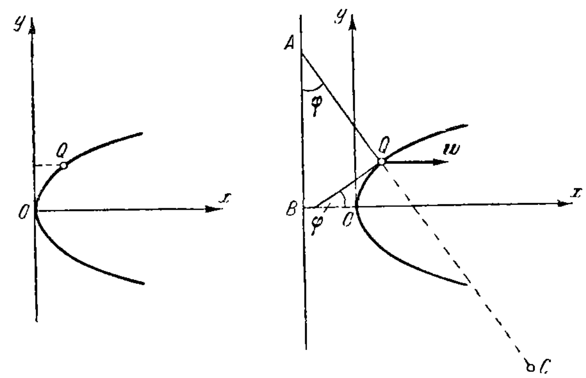
$x tg\beta = tg\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2}\frac{x^2}{\cos^2\alpha}$, т.е. $x = (tg\alpha - tg\,\beta)\frac{2v_0^2}{g}\cos^2\alpha = \frac{v_0^2}{g}(\sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha\, tg\beta)$.

За максимална дължина на OA като функция на α: $\frac{dx}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g}(2\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha\, tg\beta) = 0$,

т.е. $\cot g\, 2\alpha = -tg\,\beta$ или $2\alpha = \pi/2 + \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}(\pi/2 + \beta)$.

Или максимална далекобойност се постига при изстрелване под ъгъл, равен на половината от ъгъла между вертикалата (отрицателната ос y) и отсечката OA.

6. Точка Q се движи по парабола $y^2 = 2px$, като положението на проекцията ѝ върху ординатната ос „у“ се дава с израза $y = ct$. Да се определи скоростта и ускорението на точката, както и радиусът на кривината на параболата.



Диференциране по времето на двете страни на уравнението на параболата:

$2y\dot{y} = 2p\dot{x}$ или $yv_y = pv_x$; от друга страна $y = ct \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = v_y = c$, т.е. $v_x = \dfrac{yc}{p}$ и големината на скоростта е $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = c\sqrt{y^2/p^2 + 1}$, но $y^2 = 2px$ и $v = c\sqrt{2x/p + 1}$.

Проекции на ускорението по координатните оси: $w_x = \dot{v}_x = \dfrac{c}{p}\dot{y} = \dfrac{c^2}{p} = const$, $w_y = \dot{v}_y = 0$.

Големината на ускорението е $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = |w_x| = \dfrac{c^2}{p}$.

Ако ъгълът между допирателната към параболата и оста x е означен с φ, то големината на нормалното ускорение в точка Q е $w_n = w|\cos(90 - \varphi)| = w|\sin\varphi|$. Но от друга страна $w_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ или $\rho = \dfrac{v^2}{w_n} = \dfrac{v^2}{w\,|\sin\varphi|} = \dfrac{v^2\rho}{c^2|\sin\varphi|}$. Замествайки $v = c\sqrt{2x/p + 1}$, се стига до $\rho = \dfrac{2x + p}{|\sin\varphi|}$.

Нека директрисата на параболата (която е на разстояние p/2 от началото O) пресича в точка A нормалата в точката Q. Тогава $|QA| = \dfrac{2x + p}{2|\sin\varphi|}$ и съпоставено с намерения радиус на кривината $\rho = \dfrac{2x + p}{|\sin\varphi|}$, се получава $\rho = |QC| = 2|QA|$, където C е центърът на кривината.