

ЛЕКЦИЯ 19

Аналитична механика

Съдържание

1. Влияние на силите на съпротивление, пропорционално на първата степен на скоростта, върху свободните колебания на точка.
2. Влияние на съпротивлението, пропорционално на първата степен на скоростта, върху принудените колебания на точка.
3. Свободни колебания при наличие на Кулоново триене.
4. Теорема за изменение на количеството движение на система материални точки.
5. Теорема за масовия център на система материални точки.
6. Движение на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.

1. Влияние на силите на съпротивление, пропорционално на първата степен на скоростта, върху свободните колебания на точка.

- при съпротивление към уравнението на свободните колебания $m\ddot{x} = -cx$ се прибавя и силата на съпротивление $D = -\beta\dot{x}$ (β - коефициент на съпротивлението; знакът „минус“ – силата е винаги противоположна на посоката на движение)

- диференциалното уравнение на движението е:

$$m\ddot{x} = -cx - \beta\dot{x}, \quad (1)$$

- след полагане на $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{\beta}{m} = 2n$, (1) приема вида

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (2)$$

- характеристичното уравнение $s^2 + 2ns + k^2 = 0$ има корени:

$$s_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} \quad (3)$$

- случай на затихващи колебания ($n < k$, комплексни корени)
 - общо решение на (2):

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2}t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2}t) \quad (4)$$

- начални условия: при $t = 0$ $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

- определяне на константите

$$x_0 = C_1; \quad C_2 = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}$$

- уравнение на движението:

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right) \quad (5)$$

- преобразуване на (5): „отделяне на амплитуда“ и начална фаза

$$x = ae^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + \alpha), \quad (6)$$

$$\text{където } a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{nx_0 + \dot{x}_0}{k^2 - n^2} \right)^2}, \quad \cot g \alpha = \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{x_0 \sqrt{k^2 - n^2}} \quad (7)$$

- от (6) следва, че движението е колебание и x периодично си сменя знака

- кръговата честота (коэффициентът пред t) е $\omega = \sqrt{k^2 - n^2}$

$$\text{- периодът е } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - (n/k)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (n/k)^2}}, \quad (8)$$

където $T_0 = \frac{2\pi}{k}$ е периодът на свободните колебания при отсъствие на съпротивление

- след разлагане в ред на знаменателя на (8) и пренебрегване на членовете

$$\text{след втория, се получава } T = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{k} \right)^2 + \dots \right) \quad (9)$$

❖ периодът, т.е. времето, за което се извършва едно пълно колебание, се увеличава заради съпротивлението; ако коэффициентът на съпротивление е малък, то и увеличението на периода също е малко

- за скоростта се получава след диференциране на (6)

$$\dot{x} = ae^{-nt} [(-n) \sin(\omega t + \alpha) + \omega \cos(\omega t + \alpha)] \quad (10)$$

Скоростта на движението става нула, когато точката се отдалечава максимално от равновесното си положение и от (10) следва:

$$\dot{x} = ae^{-nt} [(-n) \sin(\omega t + \alpha) + \omega \cos(\omega t + \alpha)] = 0, \quad \operatorname{tg}(\omega t + \alpha) = \frac{\omega}{n},$$

$$\omega t + \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{n} \right) + m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Ако за $\operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{n} \right)$ се вземе стойността му в момента t_0 , т.е. при $m = 0$, то

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{\omega}{n} \right) = \omega t_0 + \alpha, \quad \omega t + \alpha = \omega t_0 + \alpha + m\pi, \quad t_m = t_0 + m \frac{\pi}{\omega} \quad (11)$$

(t_m - означение за момента от времето, съответстващ на стойността m)

❖ моментите от времето, съответстващи на крайните положения на точката, образуват аритметична прогресия с разлика π/ω , т.е.

$\frac{\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$; големините на координатите на крайните точки са равни на самите амплитуди, т.е. $|x_m| = a_m$ - стойностите, съответстващи на момента m

$$\begin{aligned} \text{Или: } x_m &= a e^{-nt_m} \sin(\omega t_m + \alpha) = a e^{-n(t_0 + m\frac{\pi}{\omega})} \sin(\omega t_0 + \alpha + m\pi) = \\ &= a(-1)^m e^{-nt_0} \sin(\omega t_0 + \alpha) e^{-nm\frac{\pi}{\omega}} = (-1)^m x_0 e^{-nm\frac{\pi}{\omega}}, \end{aligned}$$

$a_m = a_0 e^{-nm\frac{\pi}{\omega}} = a_0 \left(e^{-\frac{\pi}{\omega}} \right)^m$ - амплитудите намаляват в геометрична прогресия с частно $e^{-\frac{\pi}{\omega}}$, т.е. *затихват*

- *фактор на затихване* на колебанията: отношението на две последователни амплитуди $\eta = \frac{a_m}{a_{m+1}} = e^{\frac{\pi}{\omega}} = e^{\frac{nT}{2}}$

- *логаритмичен декремент* (логаритъм на η): $\Delta = \ln \eta = n \frac{T}{2}$

- аperiодично движение ($n > k$): от (3) следва, че корените са реални и отрицателни, т.е. при $t \rightarrow \infty$ решението на диференциалното уравнение на движението клони към нула
 - случаи в зависимост от началната скорост:
 - 1) $\dot{x} > 0$ - началната скорост отдалечава точката от равновесния център; тя се отклонява до максимално (крайно) положение, а после започва да се приближава до равновесното положение, без да го достига
 - 2) $\dot{x} < 0$ - точката минава през равновесното положение, отдалечава се на максимално (крайно) разстояние, и след това започва да се приближава до равновесното положение
 - 3) $\dot{x} < 0$ - точката изобщо не минава през равновесното положение
 - първите два случая: аperiодични движения от първи род, а в третия случай - аperiодични движения от втори род
- пределно аperiодично движение ($n = k$): характеристичното уравнение (3) има двукратен корен, а решението на (2) има вида

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2) \quad (12)$$

- след определяне на константите чрез начални условия $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$

$$x = e^{-nt} ((\dot{x}_0 + nx_0)t + x_0) \quad (13)$$

- при $t \rightarrow \infty$ от (13) следва $x \rightarrow 0$, т.е. точката се връща в положението на равновесие; и тук се наблюдават пределни апериодични движения от първи и втори род в зависимост от началните условия

2. Влияние на съпротивлението, пропорционално на първата степен на скоростта, върху принудените колебания на точка.

- досегашен резултат: при пренебрегване на съпротивлението амплитудата при принудени колебания расте с времето и при изпадане в резонанс би се стигнало до разрушаване на изследваната система
- този резултат е в противоречие с практическия опит, което се обяснява с наличие на силите на съпротивление
- при принудени колебания, където смущаващата сила има вида $F(t) = H \sin(pt + \delta)$, където H – амплитуда; p – честота; δ - начална фаза, към уравнението на движение (1) се добавя и силата $F(t)$
- движението се разглежда като наслагване на три движения
 - затихващи свободни колебания (с честота, по-малка от собствената честота), причинени от началното отклонение от равновесното положение и от началната скорост в това начално отклонение
 - затихващи колебания (с честота, равна на собствената честота), причинени от наличието на смущаващата сила
 - принудени колебания с честота, равна на честотата на смущаващата сила
- заради наличието на множител e^{-nt} в решението на уравнението на движение първите две движения могат да се пренебрегнат; при голямо съпротивление понятието резонанс губи смисъл

3. Свободни колебания при наличие на Кулоново триене.

- разглежда се движение на тяло по хоризонтална повърхност при наличие на триене, като движението се извършва под действие на две закрепени в единия си край пружини, между които е тялото
 - сила на пружината: $F = -cx$
 - сила на реакцията на повърхността: $N = G = mg$
 - сила на триене: $R = fN$, f - коефициент на триене при хлъзгане
 - сила на триене при покой: $R_1 = f_1 N$, f_1 - коефициент при покой
 - при $\dot{x} > 0 \Rightarrow R = -fmg$; при $\dot{x} < 0 \Rightarrow R = fmg$; при $\dot{x} = 0$ триенето не превишава силата на триене при покой
- Кулоново триене – пример за съпротивление с нелинеен закон на зависимостта от скоростта на движение; силата на триене е прекъсната константна функция от първи род (краен интервал на прекъсване; изменение само по знак)

- нека за определеност $x_0 > 0$ - движението започва към равновесния център, като $\dot{x} < 0$
- уравнението на движение има вида:

$$m\ddot{x} + cx = fmg, \quad \ddot{x} + k^2x = fg, \quad \text{където } \frac{c}{m} = k^2 \quad (14)$$

- решение на (14): $x = \frac{fg}{k^2} + (x_0 - \frac{fg}{k^2}) \cos kt$ (15)

- за скоростта от (15) се получава: $\dot{x} = -k(x_0 - \frac{fg}{k^2}) \sin kt$ (16)

- в момента $t_1 = \frac{\pi}{k}$: $\dot{x} = 0$ и $x_1 = x(t_1) = -x_0 + \frac{2fg}{k^2}$ (17)

- след t_1 движението продължава, като скоростта си сменя знака, т.е. $\dot{x} > 0$ и (14) приема вида $\ddot{x} + k^2x = -fg$ (18)

- началните условия сега вече са: $t = t_1, x = x_1, \dot{x} = 0$

- аналогично в момент $t_2 = \frac{2\pi}{k}$ скоростта е нула, а $x_2 = x(t_2) = x_0 - \frac{4fg}{k^2}$

- резултат:

- последователните отклонения от равновесното положение имат вида

$$x_1 = -x_0 + \frac{2fg}{k^2}, x_2 = x_0 - \frac{4fg}{k^2}, x_3 = -x_0 + \frac{6fg}{k^2}, \dots, x_n = (-1)^n (x_0 - \frac{2nfg}{k^2})$$

- периодът (времето между две крайни положения от една страна на равновесието) е $T = t_n - t_{n-2} = \frac{2\pi}{k}$, т.е. същият, както при отсъствие

на сили на триене – или *силата на триене не влияе на периода на колебание*

- последователните отклонения намаляват в аритметична прогресия с разлика $\frac{2fg}{k^2}$ за полупериод

- за някое n силата на пружината (която зависи от x_n) става по-малка от триенето при покой и движението спира; разглежданите колебания се наричат *спиращи колебания*

- пример: $T = 2 [s]; x_0 = 4.6 \cdot 10^{-2} [m]; f = 0.005; f_1 = 0.007;$

$$\frac{fg}{k^2} \approx 0.5 \cdot 10^{-2} [m]; \quad \frac{f_1 g}{k^2} \approx 0.7 \cdot 10^{-2} [m]$$

За полупериод амплитудите намаляват с $10^{-2} [m]$, като отклоненията са

$$x_0 = 4.6 \cdot 10^{-2} [m]; x_1 = -3.6 \cdot 10^{-2} [m]; x_2 = 2.6 \cdot 10^{-2} [m]; x_3 = -1.6 \cdot 10^{-2} [m]$$

$$\text{След време } t_4 = 4 [s] \Rightarrow x_4 = 0.6 \cdot 10^{-2} < \frac{f_1 g}{k^2} \text{ и движението спира.}$$

4. Теорема за изменение на количеството движение на система материални точки.

- спрямо неподвижна координатна система се разглежда система от материални точки $M_i, (i = 1, \dots, n)$ с маси m_i и радиус-вектори \mathbf{r}_i
- означения за скоростите и ускоренията на всяка точка: $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{w}_i = \dot{\mathbf{v}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i$
- *вътрешни сили*: взаимовействие между точките от системата
- *външни сили*: действие, породено от тела, принадлежащи на системата
- означения:

- равнодействаща на всички външни сили, действащи върху точката M_i : \mathbf{F}_i

- равнодействаща на всички вътрешни сили, действащи върху точката M_i : \mathbf{F}_i^*

- диференциални уравнения на движението на системата – съвкупност от основните уравнения на динамиката за всяка точка

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^*, (i = 1, \dots, n) \quad (19)$$

- проекции на (19) върху осите на неподвижна (инерциална) Декартова система

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + F_{ix}^*, \quad m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + F_{iy}^*, \quad m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + F_{iz}^* \quad (20)$$

- уравненията (20) са система от $3n$ обикновени диференциални уравнения с неизвестни (x_i, y_i, z_i) , които трябва да се определят като функции на времето при зададени $F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, F_{ix}^*, F_{iy}^*, F_{iz}^*$ като функции на времето; началните условия са зададени за всяка точка поотделно – от тях се определят интеграционните константи
- главният вектор на вътрешните за системата сили (съгласно третия закон на Нютон) е равен на нулевия вектор

$$\mathbf{V}^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^* = \mathbf{0} \quad (21)$$

- след сумиране по всички точки от (19) следва

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^* \quad (22)$$

- означение: $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$ - главен вектор на външните сили

- външните сили са приложени в различни точки на системата; тяхната сума се изразява чрез един вектор (главен вектор на външните сили), който не трябва да

се разглежда като равнодействаща на външните сили – когато точките се движат една спрямо друга, понятието равнодействаща няма смисъл

- определение: *количество движение* на точка с маса m - вектор $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$, имащ направление на скоростта на точката
- главен вектор на количеството движение на система материални точки

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (23)$$

- проекции на (23) върху осите на неподвижна Декартова система

$$Q_x = \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i, \quad Q_y = \sum_{i=1}^n m_i \dot{y}_i, \quad Q_z = \sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i$$

- отчитайки означенията, (22) приема вида

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{V}, \quad \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \right) = \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \mathbf{Q} = \mathbf{V} \quad (24)$$

- проекции на (24) върху осите на неподвижна Декартова система

$$\frac{dQ_x}{dt} = V_x, \quad \frac{dQ_y}{dt} = V_y, \quad \frac{dQ_z}{dt} = V_z$$

❖ Теорема: *Векторната производна по времето на количеството движение на система материални точки е равна на главния вектор на външните сили, приложени към системата.*

- следствие: вътрешните сили не влияят на изменението на количеството движение на системата
- закон за запазване на количеството движение на система материални точки: Ако главният вектор на външните сили е нула (системата е изолирана от външни въздействия), то количеството движение се запазва във времето по големина и направление

5. Теорема за масовия център на система материални точки.

- маса на система от материални точки с маси m_i ($i = 1, \dots, n$): $M = \sum_{i=1}^n m_i$
- масов център на система от точки: точка С с радиус-вектор $\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$
- в Декартови координати: $x_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i$, $y_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i$, $z_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i$
- разлика с понятието „център на тежестта“ – масовият център не е свързан с наличието на гравитационни сили, т.е. е по-общо понятие
- след диференциране по времето на радиус-вектора на масовия център:

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad M \dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{Q} \quad \text{или} \quad M \mathbf{v}_C = \mathbf{Q} \quad (25)$$

- количеството движение на система от материални точки е равно на произведението от масата на системата и скоростта на масовия ѝ център, т.е. на количеството движение на масовия ѝ център, където все едно е съсредоточена цялата маса на системата
- след диференциране по времето на (25):

$$M \dot{\mathbf{v}}_C = \frac{d}{dt} \mathbf{Q} \Rightarrow M \mathbf{w}_C = \mathbf{V} \quad (26)$$

- ❖ Теорема: *Масовият център на система от материални точки се движи като една точка, в която е съсредоточена масата на цялата система, към която е приложен главният вектор на външните сили, действащи на системата.*
- следствие: вътрешните сили не влияят на движението на масовия център; само външните могат да изменят неговото движение
- следствие: ако системата е в покой, вътрешните сили не могат да изведат масовия център от състоянието на покой, т.е. под действие на вътрешните сили масовият център остава неподвижен
- случай на еднородно твърдо тяло, разглеждано като система материални точки, която остава неизменна: в гравитационно поле масовият център съвпада с центъра на тежестта; *центърът на тежестта на твърдо тяло се движи все едно цялата маса на тялото е съсредоточена в него и в него е приложен главният вектор на външните сили, действащи на твърдото тяло.*
- частни случаи при движение на система материални точки:
 - главният вектор на външните сили е равен на нула (тогава ускорението на масовия център също е нула и той се движи равномерно и праволинейно или е в покой)
 - проекцията на главния вектор на външните сили по някакво направление е равна на нула (тогава ускорението на масовия център по това направление също е нула и по него той се движи равномерно и праволинейно или е в покой)

6. Движение на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос.

- без ограничение на общността неподвижната ос се избира за ос Oz на Декартова координатна система
- момент на количество движение на точка с маса m_i относно оста Oz :
 $k_{iz} = h_i m_i v_i$, където h_i - разстояние до оста
- от $v_i = \omega h_i$, $\omega = \dot{\varphi}$ - ъглова скорост на тялото: $k_{iz} = \omega m_i h_i^2 = \omega m_i (x_i^2 + y_i^2)$
- главен момент на количеството движение относно оста Oz :

$$K_z = \sum_{i=1}^n k_{iz} = \omega \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 \quad (27)$$

- *определение*: сумата от произведенията на масите на точките от едно тяло и квадрата на разстоянието им до някаква ос се нарича *момент на инерция* на тялото относно тази ос:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad (28)$$

- радиус на инерцията ρ на тялото относно оста Oz : $\rho^2 = J_z / M$, където M е масата на тялото

- тогава $J_z = M\rho^2$ и $K_z = J_z \omega$ (29)

- или: *Главният момент на количеството движение на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос, е равен на произведението на момента на инерцията на тялото относно оста и ъгловата скорост на тялото.*

- *инерчни моменти*: при тела, които са еднородни и имат „правилна“ геометрична форма, инерчните моменти се определят чрез интегрално изчисление; при тела с произволна форма инерчните моменти се определят или приближено (с необходима точност), или експериментално

- при непрекъснато разпределение на масата в (28) m_i се заменя с dm ; h_i - с разстоянието h на масов елемент dm до оста, спрямо която се определя инерчният момент, а сумирането се заменя с интеграл по цялата маса M на тялото, т.е. $J_z = \int_M h^2 dm$ (30)

- означения: $d\tau$ - елементарен обем на масовия елемент, δ - плътност

- тогава $dm = \delta d\tau$ и $J_z = \int_V h^2 \delta d\tau$, където V е целият обем на тялото

- при еднородни тела плътността е постоянна, $\delta = M/V$ и $J_z = \frac{M}{V} \int_V h^2 d\tau$ (31)

- пример: инерчен момент на тънък прът с дължина l относно ос, перпендикулярна на l и минаваща през единия му край

Ако σ е площта на напречното сечение на пръта, то $d\tau = \sigma dl$, $V = \sigma l$ и

$$J_z = \frac{M}{V} \int_V h^2 d\tau = \frac{M}{\sigma l} \int_0^l h^2 \sigma dh = \frac{M}{l} \frac{h^3}{3} \Big|_0^l = \frac{1}{3} Ml^2;$$

радиус на инерцията: $\rho^2 = J_z / M = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0.557l$

- инерчен момент на цилиндър с радиус R относно оста му: $J = \frac{1}{2} MR^2$

- инерчен момент на кълбо: $J = \frac{2}{5} MR^2$; $\rho = 0.632R$

- Теорема на Хюйгенс-Щайнер: *Моментът на инерция на тяло относно ос е равен на момента на инерцията на тялото относно успоредна ос на разглежданата, която минава през масовия център на тялото, прибавен към*

произведението на масата на тялото и квадрата на разстоянието между осите.

Нека $Oxyz$ е координатна система, относно оста Oz на която се определя моментът на инерция; $Cx'y'z'$ - координатна система с начало масовият център C на тялото, като осите Oz и Cz' са успоредни. Ако (a, b, c) са координати на C в $Oxyz$, то разстоянието между осите Oz и Cz' е $d = \sqrt{a^2 + b^2}$. За произволна точка M_i в двете системи координатите ѝ съответно са (x_i, y_i, z_i) и (x'_i, y'_i, z'_i) , като $x = x'_i + a, y = y'_i + b, z = z'_i + c$. Съгласно определението за инерчен момент относно оста Oz :

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i [(x'_i + a)^2 + (y'_i + b)^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i [(x'_i)^2 + (y'_i)^2] + (a^2 + b^2) \sum_{i=1}^n m_i + 2a \sum_{i=1}^n m_i x'_i + 2b \sum_{i=1}^n m_i y'_i$$

Но $\sum_{i=1}^n m_i x'_i = Mx'_C = 0, \sum_{i=1}^n m_i y'_i = My'_C = 0, \sum_{i=1}^n m_i = M, \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2) = J_{z'}$, т.е.

$$J_z = J_{z'} + Md^2$$

- следствие: Моментът на инерцията относно ос, която минава през масовия център на дадено тяло, е по-малък от момента на инерцията на тялото относно която и да е друга ос, успоредна на първата.

- уравнение на движението на твърдо тяло, въртящо се около неподвижна ос

Нека към тялото са приложени външни сили $\mathbf{F}_i, (i = 1, \dots, n)$. Към тях се включват и реакциите в точките на закрепване на тялото към оста (моментите им относно оста на въртене са нули). Съгласно теоремата за изменение на количеството движение (производната на главния момент на количеството движение е равна на главния момент на външните сили) (29) приема вида (тук главният момент на външните сили относно оста е означен с m_z , а ε - ъгловото ускорение):

$$K_z = J_z \omega, \dot{K}_z = J_z \dot{\omega} = m_z; \text{ но } J_z \dot{\omega} = J_z \ddot{\phi} = J_z \varepsilon \text{ и } m_z = \sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i)$$

или:
$$J_z \varepsilon = \sum_{i=1}^n m_z(\mathbf{F}_i) \quad (32)$$

- аналогия с постъпателното движение (смяна на термините):

линейно преместване \leftrightarrow ъглово преместване (завъртане);

(линейна) скорост \leftrightarrow ъглова скорост;

(линейно) ускорение \leftrightarrow ъглово ускорение;

маса \leftrightarrow момент на инерция (инерчен момент);

сила \leftrightarrow момент на сила