ЛЕКЦИЯ 18

Аналитична механика

Съдържание

1. Свободни незатихващи колебания на точка под действие на линейна възстановяваща сила.
2. Колебания на точка под действие на хармонична сила.
3. Колебания на точка под действие на периодична сила.

1. Свободни незатихващи колебания на точка под действие на линейна възстановяваща сила.

- задача: изследване на праволинейно движение на материална точка M с маса m под действие на сила P, насочена към неподвижен център, която е пропорционална на първата степен на разстоянието от точката до центъра
- избор на координатна система: начало O – в неподвижния център; координатна ос Ox – през началото O и началното положение на точката
- *възстановяваща сила* P (стреми се да върне точката в положение на равновесие): $\mathbf{P} = -c\mathbf{r}$, където „c“ – положителен коефициент на пропорционалност, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор на точката M спрямо центъра O
- примери:
  - сила на реакция на разтегната пружина
  - махало (компонентата на силата на тежестта, която е по допирателната към траекторията на центъра на тежестта на махалото)
  - колебания на течност в скачени съдове под действие на теглото
- движение: точката се отклонява от равновесното си положение и се пуска със или без начална скорост. Под действие на силата P, насочена към O, точката се ускорява към O (при първоначално отклонение на разстояние, по-голямо от разстоянието r при равновесно положение); по инерция точката подминава центъра O и отново се ускорява към него, т.е. извършва *колебателно движение*
- *свободни (незатихващи колебания):* освен възстановяващата сила на точката не действат други сили – включително и съпротивлението
- *линейна възстановяваща сила*: пропорционална на първата степен на отклонението от равновесното положение
- *линейни колебания*: под действието на линейна възстановяваща сила

- основно диференциално уравнение на свободните колебания:

$$m\ddot{x} = -cx\,, \tag{1}$$

- след полагане на : $\frac{c}{m} = k^2$, (1) приема вида

$$m\ddot{x} + k^2 x = 0\,, \tag{2}$$

- характеристични корени: $\pm k\,i$; общо решение на (2):

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \tag{3}$$

- начални условия: при $t = 0 \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$

- определяне на константите

$$x_0 = C_1;\ \dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt \ \Rightarrow \dot{x}_0 = C_2 k\,,\ \ C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$$

- решението на (2) е: $x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt$ (4)
- записване на (4) във вид

$$x = a \sin(kt + \alpha) \tag{5}$$

  където $a = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2 / k^2}$ - амплитуда;

  α - начална фаза (ъгъл, за който $\sin\alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2 / k^2}}$, $\cos\alpha = \frac{\dot{x}_0}{k\sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2 / k^2}}$)

- резултат: движението под действие на линейна възстановяваща сила е хармонично колебание с честота $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ и период $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$, зависещи само от коефициента на пропорционалност (не от началните условия) и от масата на точката – свойство „изохронност“ на колебанията (Галилей). Честотата на такова движение се нарича *собствена честота* или *честота на свободни колебания*.
  - амплитудата и фазата зависят от началните условия

2. Колебания на точка под действие на хармонична сила.

- наред с възстановяващата сила на точката действа и сила F, изменяща се по хармоничен закон $F(t) = H \sin(pt + \delta)$, където

  H – амплитуда; p – честота; δ - начална фаза

- уравнение на движението: $m\ddot{x} + cx = H \sin(pt + \delta)$; след деление на масата и означение $h = \frac{H}{m}$ уравнението се записва във вида

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta) \tag{6}$$

- решение на (6) – сума от решението на хомогенното уравнение $x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ и частното решение x_2, което се търси във вида $a \sin(pt + \delta)$

  от $\dot{x} = ap\cos(pt + \delta)$, $\ddot{x} = -ap^2 \sin(pt + \delta)$, заместване в (6):

  $-ap^2 \sin(pt + \delta) + k^2 a \sin(pt + \delta) = h \sin(pt + \delta)$

  $$\Rightarrow a = \frac{h}{k^2 - p^2} \quad \text{при } (k \neq p) \tag{7}$$

- решението на (6) се получава като

  $$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \tag{8}$$

- резултат: наслагване на свободните колебания и колебанията на смущаващата сила: *принудени колебания*
- при $k > p$ принудените колебания имат същата фаза като смущанащата сила
- при $k < p$ аналогично се стига до

  $$x_2 = -\frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt + \delta) = \frac{h}{p^2 - k^2} \sin(pt + \delta + \pi)$$

  - или принудените колебания са отместени по фаза на стойност π от смущаващата сила
- при начални условия $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0$ константите от (8) се получават във вида

  $$C_1 = x_0 - \frac{h}{p^2 - k^2} \sin\delta, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k} - \frac{ph}{k(p^2 - k^2)} \cos\delta$$

- Движението може да се разглежда като наслагване на:
  - свободни колебания
  - колебания, причинени от смущаваща сила, която има своя честота
  - принудени колебания: частното решение на (8)
- резонанс: $(k = p)$ при този случай честотата на смущаващата сила съвпада с честотата на свободните колебания и тогава колебанията нарастват пропорционално на времето
  - нека членовете от (8), които съдържат $\sin\delta$, $\cos\delta$ и $\sin(pt + \delta)$ са отделени (след заместване на константите в (8)), т.е.

    $$\frac{h}{p^2 - k^2} [-(\cos kt \sin\delta + (p/k) \sin kt \cos\delta) + \sin(pt + \delta)]$$

  при $k = p$ последният израз е неопределеност от вид 0/0, която след разкриване води до следния вид на (8):

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt + \frac{h}{2k^2}\,[\cos\delta \sin kt - kt\cos(kt+\delta)] \tag{9}$$

- характерен признак за резонанс е събираемото $-\dfrac{ht}{2k}\cos(kt+\delta)$;

  изразът $-\dfrac{ht}{2k}$ има смисъл на нарастваща с времето амплитуда

3. Колебания на точка под действие на периодична сила.

- смущаващата сила $F(t)$ е произволна периодична функция на времето с период $\tau = \dfrac{2\pi}{p}$
- разлагане в ред на Фурие

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{s=1}^{\infty}[a_s \cos(spt) + b_s \sin(spt)], \tag{10}$$

  където $a_s = \dfrac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\cos(spt)dt$, $b_s = \dfrac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\sin(spt)dt$

- означения: $H_s = \sqrt{a_s^2 + b_s^2}$, $\sin\delta_s = \dfrac{a_s}{H_s}$, $\cos\delta_s = \dfrac{b_s}{H_s}$

  тогава
$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} H_s \sin(spt+\delta_s\ , \tag{11}$$

- *хармоници*: отделните членове на реда (11)
- уравнението (6) в този случай има вид

$$\ddot{x} + k^2 x = h_0 + \sum_{s=1}^{\infty} h_s \sin(spt+\delta_s), \tag{12}$$

  където $h_0 = \dfrac{a_0}{2m}$, $h_s = \dfrac{H_s}{m}$

- решението на (12) се записва като

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k}\sin kt - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{h_s}{k^2 - s^2p^2}\,[\sin\delta_s \cos kt + p/k\cos\delta_s \sin kt] +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\infty}\frac{h_s}{k^2 - s^2p^2}\sin(spt+\delta_s) \tag{13}$$

- и тук движението може да се разглежда като наслагване на три движения
- Ако честотата на свободните колебания е кратна на честотата на смущаващата сила, т.е. съществува цяло число „n“, така че $k = np$, то възниква резонанс от порядък „n“. В представянето (13) този резонанс се причинява от събираемото с номер $s = n$, докато другите членове на реда не се изменят.

- Нарастващата във времето амплитуда има вид $-\frac{h_n t}{2k}\cos(kt+\delta_n)$
- В конкретни задачи, в които редът (13) не е пълен – например при разлагане на четни или нечетни функции, „теоретично възможният“ резонанс за липсващите членове не се проявява