ЛЕКЦИЯ 17

Аналитична механика

Съдържание

1. Движение на материална точка под действие на земното привличане.
2. Движение на материална точка под действие на централна сила.
3. Движение под действие на привличане от централно тяло.

1. Движение на точка под действие на земното привличане.

- задача: изследване на движението на материална точка под действие на земното привличане; силата на привличане е обратно пропорционална на квадрата на разстоянието от точката до центъра на Земята
- избор на координатна система: начало O – в центъра на Земята; координатна ос Ox – през началото и дадена точка от земната повърхност
- при пренебрегване на съпротивлението на въздуха и въртенето на Земята уравнението на движение на точката (съгласно втория закон) има вид:

$$m\ddot{x} = -\frac{C}{x^2}, \qquad (1)$$

- на повърхността на Земята: $x = R$ (R – радиус на Земята за разглежданата точка от земната повърхност), $\ddot{x} = -g$ (g - земно ускорение)
- от (1): $mg = -\frac{C}{R^2}$, $C = mgR^2$ и (1) приема вида

$$m\ddot{x} = -\frac{gR^2}{x^2}, \qquad (2)$$

- смяна на променливите: $\dot{x} = v$, $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$; или $\ddot{x} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ и се стига до уравнение с разделящи се променливи

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad vdv = -gR^2\frac{dx}{x^2} \qquad (3)$$

- начални условия: при $t = 0$ $x(0) = x_0 \geq R,$ $\dot{x}(0) = \pm v_0$ (движение при привличане или отблъскване)
- от (3): $d(\frac{v^2}{2}) = gR^2 d(\frac{1}{x})$ и след интегриране в граници от 0 до t (при t стойностите на съответните променливи са съответно v и x) се получава

$$v^2 - v_0^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) \qquad (4)$$

- Максималното разстояние H, на което ще се отдалечи точката, стартирала от повърхността на Земята с начална скорост v_0, ще се постигне, когато скоростта стане нула, т.е. при $v = 0, x = H$ и от (4) следва

  $$v_0^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{H}\right), \qquad H = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}$$

  при безкрайно ($H \to \infty$) отдалечаване от Земята: $2gR - v_0^2 = 0$, $v_0 = \sqrt{2gR}$
- обратно: ако материална точка би започнала падане с нулева начална скорост от безкрайно отдалечена позиция, тя ще достигне Земята със същата скорост $v_* = \sqrt{2gR}$

  - числена стойност (при $g = 9.81[m/s^2], R = 6.4.10^6\,[m]$): $v_* \approx 1.2\,[km/s]$, наричана *втора космическа скорост*
- обобщение за произволна планета с маса M и радиус R: в дясната част на (1) стои $C = fmM$, където f - коефициент в закона за привличаща сила между две тела с маси m_1 и m_2, намиращи се на разстояние r, т.е. $\mathbf{F} = -f\,\frac{m_1 m_2}{r^3}\,\mathbf{r}$

  - аналогично на досегашните разглеждания се стига до: $v_* = \sqrt{\frac{2fM}{R}}$

2. Движение на материална точка под действие на централна сила.

- точка с маса M се движи под действие на сила F, чиято линия на действие през цялото движение минава през неподвижен център O
- означения:

  $\mathbf{r}_0$ - радиус-вектор на M в начално положение M_0

  $\mathbf{v}_0$ - начална скорост

  $\mathbf{r}$ - радиус-вектор на M относно центъра O

  Ox - избрана координатна ос, съвпадаща с $\mathbf{r}_0$

  α - ъгъл между Ox и v_0
- уравнение на движението в полярни координати

  $$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \qquad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi = 0 \qquad (5)$$

  начални условия

  при $t = 0$: $\quad r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = \dot{r}_0 = v_0\cos\alpha, \quad \varphi(0) = \varphi_0 \quad r_0\dot{\varphi}_0 = v_0\sin\alpha$

от второто уравнение на (5): $r^2\dot{\varphi} = 2C = const$ (6)

- смисъл на константата от (6): *площна скорост* – производната по времето $\dot{S}$ на площта, описвана от радиус-вектора на точката M
- определяне на C от началните условия: $\dot{S} = C = \frac{1}{2} r_0^2 \dot{\varphi}_0 = \frac{1}{2} r_0 v_0 \sin\alpha$, т.е.

$$r^2\dot{\varphi} = r_0 v_0 \sin\alpha \qquad (7)$$

изразът (7) – пръв интеграл на уравнението на движението (*площен интеграл*)

- уравнение на траекторията (изключване на времето от системата (5))

- изразяване на $\dot{\varphi}$ от (6): $\dot{\varphi} = \frac{2C}{r^2}$
- изразяване на $\dot{r}$: $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{2C}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -2C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$
- изразяване на $\ddot{r}$: $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\dot{r}}{d\varphi} = \frac{2C}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(-2C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = -\frac{4C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$
- заместване на $\ddot{r}$ в (5) и преобразуване:

$$-\frac{4C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{F_r}{m} + r\left(\frac{2C}{r^2}\right)^2, \quad \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 F_r}{4mC^2} \qquad (8)$$

- траектория на движението (форма на Бине) – изразът (8)

При $F_r < 0$ (привличане) траекторията е обърната (вдлъбната) към центъра O; при $F_r > 0$ (отблъскване) траекторията е обърната с изпъкналата си част към центъра O.

3. **Движение под действие на привличане от централно тяло.**

- централно тяло: тяло с маса m_0, съсредоточена в центъра, пораждащ движение на привличане под действие на централна сила
- в този случай $F = -f\frac{mm_0}{r^2}$ и (8) добива вида

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{fm_0}{4C^2} = \frac{1}{p}, \qquad (9)$$

където е положено $p = \frac{4C^2}{fm_0}$; след отчитане на $C = \frac{1}{2} r_0 v_0 \sin\alpha$ и $v_* = \sqrt{\frac{2fM}{R}}$, което в случая се записва във вида $v_* = \sqrt{\frac{2fm_0}{r_0}}$,

$fm_0 = v_*^2 r_0 / 2$ - тогава $p = \dfrac{4C^2}{fm_0} = 2r_0 \left(\dfrac{v_0}{v_*}\right)^2 \sin^2 \alpha$, т.е. характеризира се с началните параметри на движението и v_*, които са известни

- решението на (9) има вида (характеристичните корени на хомогенното уравнение са $\pm i$; частното решение се намира като $\dfrac{1}{p}$)

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi + \frac{1}{p} \tag{10}$$

- определяне на константите

при $\varphi = 0$: $\quad \dfrac{1}{r_0} = C_1 + \dfrac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{p}$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi \tag{11}$$

но $\dfrac{d}{d\varphi}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\varphi} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr/dt}{d\varphi/dt} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d\dot{r}}{d\dot{\varphi}}$

или $-\dfrac{1}{r_0^2}\dfrac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = -\dfrac{1}{r_0^2}\dfrac{v_0 \cos\alpha}{(v_0/r_0)\sin\alpha} = -\dfrac{\cot g\alpha}{r_0}$, т.е. $C_2 = -\dfrac{\cot g\alpha}{r_0}$

тогава решението на (10) се записва като

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p}\right)\cos\varphi - \frac{\cot g\alpha}{r_0}\sin\varphi + \frac{1}{p} \tag{12}$$

- опростяване до вид на (12) като конично сечение

полагане: $\delta \cos\varepsilon = \left(\dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{p}\right)$, $\delta \sin\varepsilon = -\dfrac{\cot g\alpha}{r_0}$; $e = p\delta$, $\omega = \varphi - \varepsilon$

тогава: $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\omega}$ (13)

- основни параметри, определящи вида на коничното сечение: p и e; ъгълът $\omega = \varphi - \varepsilon$: истинска аномалия
  - при $e < 1$ таекторията е елипса
  - при $e = 1$ таекторията е парабола
  - при $e > 1$ таекторията е хипербола
  - при $\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad r = r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}$: перихелий – минимално разстояние до фокуса на елипсата

- при $\omega = \pi \quad \Rightarrow \quad r = r_{mdx} = \dfrac{p}{1-e}$: афелий – максимално разстояние до фокуса на елипсата

- връзка на елиптичното движение със задачата за изстрелване на тяло с начална скорост от земната попърхност

  В този случай ъгълът α (между вертикалата, т.е. нормалата към земната повърхност в точката на изстрелване и началната скорост) се заменя с „ъгъл на хвърляне“ λ спрямо земната повърхност.

  Тогава $v_* = \sqrt{2gR}$, където R е радиусът на Земята. С изменение на λ и началната скорост v_0 движението се осъществява по различен вид траектории.

  При „обикновен“ изстрел движението е парабола от точката на изстрелване до точката на падане на земната повърхност (всъщност тази парабола е част от елипса с далечен фокус, съвпадащ с центъра на Земята, а близкият фокус е под повърхността близо до началната точка на движението).

  При увеличаване на началната скорост ексцентрицитетът на елипсата намалява, което съответства на приближаване на близкия фокус до центъра на Земята.

  При $v_0 = \sqrt{gR}$ и $\lambda = 0$ траекторията става окръжност и тялото ще описва кръгова орбита около Земята; стойността на началната скорост е $v_0 \approx 7.9\,[km/s]$, т.нар. „първа космическа скорост“.

  При по-нататъшно увеличаване на началната скорост движението се извършва по елипси, ексцентрицитетът на които намалява до минимално значение $e_{\min} = \sin\lambda$ и при $v_0 = \sqrt{2gR}$ (втора космическа скорост) елипсата се превръща в парабола, която след последващо увеличаване на параметрите на движението (при $e > 1$) преминава в хипербола.