ЛЕКЦИЯ 16

Аналитична механика

Съдържание

1. Предмет на динамиката.
2. Закони на Нютон.
3. Основни задачи на динамиката.
4. Вертикално движение на тежка точка в среда със съпротивление, пропорционално на квадрата на скоростта.

1. Предмет на динамиката.

- предмет: моделиране и изучаване движението на материалните тела във връзка с механичните взаимодействия между тях
  - материална точка и системи от материални точки
  - непрекъснати материални среди
  - абсолютно твърдо тяло и системи твърди тела
- задача: установяване на законите, свързващи действащите сили, с кинематичните параметри на движението и използване на тези закони за изучаване на отделни видове движения
- основна разлика с кинематиката и статиката: количествена материална характеристика на телата - *маса* (при непрекъснати среди - *плътност*)
- пространство и време в класическата Нютонова механика
  - абсолютно пространство с инерциална или Галилеева координатна система
  - относителност на това понятие: инерциална или Галилеева система могат да се движат постъпателно, праволинейно и равномерно спрямо друга инерциална система
  - абсолютно време: времето, за което се извършва дадено движение; не зависи от движението на телата, както и от координатните системи
  - относителен характер на понятията „абсолютно пространство“ и „абсолютно време“ (противоречие между схващането за еднакво време в различни координатни системи и крайната скорост на разпространение на светлината – решаване на този въпрос в теорията на относителността)
  - в класическата механика времето се счита за еднакво във всички движещи се една спрямо друга координатни системи; то тече равномерно и е мярка за продължителност на даден процес

- в класическата механика абсолютното пространство е неподвижно и е едно и също за всички явления (Нютон (1642-1726) – „Начала на механиката“)
- Айнщайн (1879-1955): механиката на Нютон като частен случай на релативистката механика; валидна за области и движения, малки по мащаб с мащабите на вселената, и за скорости, малки в сравнение със скоростта на светлината. Този частен случай – добро приближение за „земната практика“.

2. Закони на Нютон.

- първи закон на Нютон (закон за инерцията)

  „ Всяко тяло запазва състоянието си на покой или на равномерно и праволинейно движение, докато приложените към него сили не изменят това състояние“

  - терминът „тяло“ (материална точка): обект, притежаващ *маса* – мярка за инертността на тялото
  - формулировка на Галилей (1564-1642): „Когато тяло се движи по хоризонтална равнина, не срещайки никакво съпротивление, то движението му е равномерно и би продължило до безкрайност, ако равнината би се простирала до безкрайност“

- втори закон на Нютон (количествена връзка между изменението на движението на материална точка и приложената към нея сила)

  „Изменението на движението е пропорционално на движещата сила и се извършва в направление на действието на тази сила.“

  - термин „движение“ (Нютон): разбира се „количество движение“, т.е. произведение на масата и вектора на скоростта на материална точка; масата се приема за постоянна
  - коефициентът на пропорционалност зависи от конкретните (вътрешните) характеристики на материалната точка и е качествено понятие за „мярка на количеството вещество в тялото“ (Нютон)
  - представа за свойството „инертност“: под действие на една и съща сила материална точка получава по-голямо ускорение, колкото по-малка е константата на коефициента на пропорционалност
  - при полагане на коефициента на пропорционалност на m (означение за маса):

  $$m\mathbf{w} = \mathbf{F} \qquad (1)$$

  - мерна единица за маса (измерителна система SI): килограм; 1 kg е маса, получаваща под действие на сила 1 N ускорение 1 m/s^2
  - свойство (закон) за *адитивност* на масата
  - други измерителни системи: *физична* (CGS – сантиметър-грам-секунда) и *техническа* (сила-дължина-време, т.е. килограм-метър-

секунда); в техническата система масата е производна единица на основните единици (единица маса – под действие на сила 1 kg получава ускорение 1 m/s^2)

- връзка между единиците за сила и маса ($\mathbf{G}$-сила на тежестта, $\mathbf{g}$-ускорение при свободно падане, m - маса)

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} \qquad (2)$$

- земно ускорение: 9.8311 m/s^2 (на полюса на Земята); 9.7810 m/s^2 (на екватора); прието средно значение 9.8
- смисъл на масата като „привличаща маса“ в закона за всемирното привличане
- принцип на еквивалентност между инертната и привличащата маса

- трети закон на Нютон
  „На всяко действие съответства равно на него и противоположно насочено противодействие; действието на две тела едно на друго е винаги равно и е насочено в противоположни посоки“
- принцип за *независимост на действието на силите*: „При съвместно действие на две сили едно тяло описва диагонал на успоредник, построен от двете сили, за същото време, за което би описало страните на успоредника при отделно действие на тези сили“ (Нютон)
  - векторен характер на силата
  - връзка със закона за запазване на количеството движение (Декарт: основен физичен закон); Нютон: третият закон като основен, а законът за запазване на количеството движение – следствие от него
- различни форми на основното уравнение на динамиката на точка (1)

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad , \quad m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \qquad (3)$$

($\mathbf{v}$ - вектор на скоростта; $\mathbf{r}$ - радиус-вектор на материалната точка)

- проекции по осите на Декартова координатна система (аналитична форма)

$$m\ddot{x} = F_x , \quad m\ddot{y} = F_y , \quad m\ddot{z} = F_z \qquad (4)$$

- естествени уравнения на движението: проектиране по осите на естествения триедър (допирателната, нормалата и бинормалата към траекторията)

$$mw_\tau = m\frac{dv}{dt} = F_\tau , \quad mw_n = m\frac{v^2}{\rho} = F , \quad mw_b = 0 \qquad (5)$$

  - при движение по равнинна траектория: само първите две уравнения на (5)

- проектиране по осите ан криволинейна координатна система (q_i, $i=1,2,3$ - координатни оси; w_{q_i} и F_{q_i} - проекции на ускорението и силата по координатните оси)

$$mw_{q_i} = F_{q_i}\,,\ (i=1,2,3) \tag{6}$$

- чрез коефициентите на Ламе

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2} = H_i \quad (i=1,2,3)$$

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\right], \quad (i=1,2,3) \tag{7}$$

- означение: $T=\frac{1}{2}mv^2$ - кинетична енергия на материална точка; (7) добива вид

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right] = Q_i \quad (i=1,2,3) \tag{8}$$

- обобщени сили: $Q_i = H_i\,F_{q_i}$
- изразът (8): форма на Лагранж на уравнението на движение на материална точка

- вид на (8) в полярни координати : $(q_1,q_2)=(r,\varphi) \quad r\ge 0, \quad \varphi\in[\,0,\,2\pi]$

$$m(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2)=F_r\,, \qquad \frac{m}{r}\frac{\partial}{\partial t}(r^2\dot{\varphi})=F_\varphi \tag{9}$$

- вид на (8) в сферични координати :

$$(q_1,q_2,q_3)=(r,\theta,\varphi) \quad r\ge 0, \quad \theta\in[\,0,\,\pi] \quad \varphi\in[\,0,\,2\pi]$$

$$m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)=F_r\,, \frac{m}{r\sin\theta}\left(\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta\right)\right)=F_\varphi\,, \frac{m}{r}\left(\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)-r^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)=F_\theta$$

3. Основни задачи на динамиката.

- първа задача на динамиката

Дадено е движението на материална точка със зададена маса, т.е. известни са координатите ѝ като функции на времето. Да се определи силата, действаща върху точката.

- втора задача на динамиката

Дадена е силата, действаща върху точка със зададена маса. Да се определи движението на точката, т.е. кинематичното уравнение на движението.

- определяне на закона на действието на сила по зададен клас движения (специална постановка на първата задача на динамиката):

Да се определи общият закон на силите, предизвикващи даден клас движения, които се различават помежду си само по началните условия (начално положение на точката и нейната начална скорост), а следователно и по своите траектории.

- *централна сила* – приложена към движеща се точка сила, чиято линия на действие минава винаги през една и съща неподвижна точка
- задача на Бертран (1832-1900): „Да се определи законът на централна сила, зависеща само от положението на движеща се точка, която сила я принуждава да описва конични сечения независимо от началните условия"
- основни диференциални уравнения на движението на материална точка: система три обикновени диференциални уравнения относно три неизвестни функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F_x\ (t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\
m\ddot{y} &= F_y\ (t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\
m\ddot{z} &= F_z\ (t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})
\end{aligned}
\tag{10}
$$

- общ интеграл на системата (10):

$$
\begin{aligned}
\Psi_1\ (t, x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0 \\
\Psi_2\ (t, x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0 \\
\Psi_3\ (t, x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

  където C_i $(i = 1,2,....,6)$ - интеграционни константи

- първи интеграли на уравненията на движение: (след диференциране по времето на (11))

$$\Phi_i\ (t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0,\ (i = 1,2,3) \tag{12}$$

  - чрез задаване на стойностите на координатите и скоростите в начален момент $t = t_0$, т.е. $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$, $\dot{z} = \dot{z}_0$, системите (11) и (12) се превръщат в системи от 6 уравнения с 6 неизвестни константи;
  - след намиране на константите и заместване в (11), решаване след това относно координатите (x, y, z) - стига се до търсените уравнения на движение наматериалната точка

- задача на Коши: намиране на решенията на (10) при дадени начални условия
- гранични задачи: при задаване на положението на точката в два различни момента от време $t = t_0$ и $t = t_1$; в общия случай тези задачи

може и да нямат решение или то да не е единствено – докато задачата на Коши винаги има единствено решение

4. **Вертикално движение на тежка точка в среда със съпротивление, пропорционално на квадрата на скоростта.**

- означения:
  - $\mathbf{D}$: съпротивителна сила
  - $|\mathbf{D}| = \lambda v^2$, v - големина на скоростта; λ - коефициент на съпротивление
- задача: вертикално движение на тежка точка в съпротивителна среда
  - избор на координатна ос Ox по вертикалата с посока надолу
  - на точка M действат две сили: силата на тежестта $\mathbf{G}$ и съпротивителната сила $\mathbf{D}$
  - уравнение на движението (m – маса на точката)

$$m\ddot{x} = G \pm \lambda \dot{x}^2 \qquad (13)$$

  - да се определи $x = x(t)$ от диференциалното уравнение (13)
  - v_0 : големина на началната скорост
- случай на низходящо движение (в (13) знакът е минус; началната скорост е положителна)

$$m\ddot{x} = G - \lambda \dot{x}^2, \qquad m\ddot{x} = mg - \lambda \dot{x}^2, \qquad \ddot{x} = g - \frac{\lambda}{m}\dot{x}^2$$

  - означения: $\frac{\lambda}{m} = a = const$; $\frac{mg}{\lambda} = c^2 = const$
  - смяна на променливите: $\dot{x} = v$, $\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$; стига се до уравнение с разделящи се променливи

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\lambda g}{m}\left(\frac{m}{\lambda} - \frac{\dot{x}^2}{g}\right) = \frac{\lambda}{m}\left(\frac{mg}{\lambda} - v^2\right) = a(c^2 - v^2) \qquad (14)$$

$$\frac{dv}{c^2 - v^2} = a\,dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{c^2 - v^2} = \int a\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2c}\ln\left|\frac{c+v}{c-v}\right| = at + \frac{\delta}{c},$$

(δ - интеграционна константа)

❖ случай, когато $v_0 < c$, т.е. $\left|\frac{c+v}{c-v}\right| = \frac{c+v}{c-v} \Rightarrow \frac{c+v}{c-v} = e^{2(act+\delta)}$ (15)

полагане на $e^{2(act+\delta)} = z$, решаване на (15) относно v, т.е. $v = c\frac{z-1}{z+1}$ и

граничен преход при $t \to \infty$: $v \to c = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$ (16)

смисъл на c: пределната скорост, която може да се достигне, когато точката би падала безкрайно под действие на силата на тежестта в среда със съпротивление, характеризиращо се с коефициент λ

❖ случай, когато $v_0 > c$, т.е. $\left|\dfrac{c+v}{c-v}\right| = \dfrac{v+c}{v-c}$: аналогично $v = c\dfrac{z+1}{z-1}$ и

при при $t \to \infty$: $v \to c = \sqrt{\dfrac{mg}{\lambda}}$ (17)

- интегриране на скоростта за определяне на траекторията $x = x(t)$

използване на хиперболични функции (17)

$$th\ p = \frac{e^{p} - e^{-p}}{e^{p} + e^{-p}} = \frac{e^{2p} - 1}{e^{2p} + 1} \quad \text{и} \quad cth\ p = \frac{e^{p} + e^{-p}}{e^{p} - e^{-p}} = \frac{e^{2p} + 1}{e^{2p} - 1}$$

за случая при $v_0 < c$ се получава:

$$v = c\,th(act + \delta)\text{, при } t = 0 \ \ v_0 = c\,th\delta\,;$$

за случая при $v_0 > c$ се получава:

$$v = c\,cth(act + \delta)\text{, при } t = 0 \ \ v_0 = c\,cth\delta$$

тогава съответно при двата случая се получава за $x = x(t)$:

❖ $v = \dot{x} = c\,th(act + \delta) \quad \Rightarrow$

$$x = c\int \frac{sh(act + \delta)}{ch(act + \delta)}dt = \frac{c}{ac}\int \frac{sh(act + \delta)}{ch(act + \delta)}d(act) = \frac{1}{a}\int \frac{dch(act + \delta)}{ch(act + \delta)},$$

$$x(t) = \frac{1}{a}\ln ch(act + \delta) + \beta\,, \quad \beta = const$$

след отчитане на началните условия $x = 0$ при $t = 0$: $\beta = -\dfrac{1}{a}\ln ch(\delta)$

и при $\delta = 0$: $ch(\delta) = 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \dfrac{1}{a}\ln ch(act)$ (18)

➢ зависимост на скоростта от височината на падане h (изключване на времето от (18) и израза за скоростта $v = c\,th(act)$): $ch(act) = e^{ax}$

от тъждеството $sh^2 z = ch^2 z - 1$:

$$v = c\,th(act) = c\frac{sh(act)}{ch(act)} = c\frac{\sqrt{ch^2(act) - 1}}{ch(act)} = c\sqrt{1 - \frac{1}{ch^2(act)}} = c\sqrt{1 - e^{-2ax}}$$

вертикалната координата има смисъл на височината на падане h и след връщане в термините $ah = \dfrac{\lambda}{m}h = \dfrac{gh}{c^2}$ и разлагане в ред $e^z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + ...$

$$\Rightarrow v = c\sqrt{1-1+\frac{2gh}{c^2}-\frac{2g^2h^2}{c^4}+...} = \sqrt{2gh}\sqrt{1-\frac{gh}{c^2}+...} \approx \sqrt{2gh}(1-\frac{1}{2}\frac{gh}{c^2})$$ след

разлагане в ред $\sqrt{1+z} = 1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2.4}z^2+\frac{1.3}{2.4.6}z^3+...$ и на последния множител в равенството

- резултат: съпротивителната среда внася поправки в известната формула за скоростта при падане в празно пространство $v_* = \sqrt{2gh}$

  или в термини на относително намаление на скоростта: $\frac{v_* - v}{v_*} = \frac{1}{2}\frac{gh}{c^2}$

- аналогично за $v = \dot{x} = c\, cth(act+\delta) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{a}\ln\frac{sh(act+\delta)}{sh\delta}$

- случай на възходящо движение (в (13) знакът е плюс; началната скорост е отрицателна) и (14) приема вида

$$\frac{dv}{dt} = a(c^2+v^2) \qquad (19)$$

$\Rightarrow \int\frac{dv}{c^2+v^2} = \int adt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c}arctg\frac{v}{c} = at+\frac{\delta}{c}$, ($\delta$ - интеграционна константа)

или $\qquad v = c\,tg(act+\delta) \qquad (20)$

при $t=0$: $v(0) = -v_0$, т.е. противоположна посока на положителната посока на координатната ос

тогава $\delta = -arctg\frac{v_0}{c}$ и след още едно интегриране на (20) се получава

$x(t) = c\int_0^t tg(act+\delta)dt = -\frac{1}{a}\ln\frac{\cos(act+\delta)}{\cos\delta}$ (отчитане на $x=0$ при $t=0$) (21)

възходящото движение продължава, докато скоростта стане нула, т.е. до момент $t_1 = -\frac{\delta}{ac} = \frac{1}{ac}arctg\frac{v_0}{c}$

максималната височина на издигане се постига при $t = t_1$, заместено в (21):

$$h = |x(t)| = \left|-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\cos\delta}\right| = \left|\frac{1}{a}\ln\cos\delta\right| = \left|\frac{1}{a}\ln(\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\delta}})\right| = \left|-\frac{1}{2a}\ln(1+\frac{v_0^2}{c^2})\right| =$$

$= \frac{1}{2a}\left(\frac{v_0^2}{c^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{c^2}\right)^2\right) = \frac{1}{2a}\frac{v_0^2}{c^2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{c^2}\right)$ (разлагане в редове на

$\frac{1}{\sqrt{1+z}} = 1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2.4}z^2-\frac{1.3}{2.4.6}z^3+...$ и $\ln(1+z) = \frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-...$):

или $h = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{\lambda v_0^2}{2G}\right)$ (22)

Максималната височина на издигане е по-малка в сравнение с максималната височина $h_* = \frac{v_0^2}{2g}$, достигана при движение в среда без съпротивление.

- приложение на резултатите при движение в среда със съпротивление, пропорционално на квадрата на скоростта

- спускаеми апарати от космически кораби
- метеорологични ракети

- трудности:

- променлива плътност на атмосферата: при разстояния от порядък на 11 километра (тропосфера) до 200 километра плътността намалява около три пъти
- емпиричен закон за изменение на плътността на атмосферата

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{H}{44300}\right)^{4.256}, \text{ където}$$

  H - височина над морското равнище (метри)

  $\rho_0 = 1.23\,kg/m^3$- плътност на атмосферата на морското равнище при температура 15 градуса Целзий

- При малки скорости съпротивителната сила може да се счита пропорционална на първата степен на скоростта, т.е. на самата скорост
- пример: падане на тежка точка във вискозна течност

  Стоманено топче с радиус r пада без начална скорост в глицерин. Да се определи движението му, ако силата на съпротивление се дава с формулата $D = 6\pi r\mu v$, където μ е коефициент на вискозитет на глицерина.

  Диференциалното уравнение на движението е

$$m\ddot{x} = mg - 6\pi\mu r\dot{x} \quad (23)$$

  преобразуване: почленно деление на m и въвеждане на означенията

  $\lambda = \frac{6\pi\mu r}{m}$, $m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$, ρ - плътност на стоманата; (23) приема вида

  $\ddot{x} + \lambda\dot{x} = g$ - нехомогенно от втори ред с постоянни коефициенти

  решение на хомогенното уравнение: $x_1 = C_1 + C_2 e^{-\lambda t}$

  частно решение: $x_2 = \frac{gt}{\lambda}$

общо решение: $x = \frac{gt}{\lambda} + C_1 + C_2 e^{-\lambda t}$

начални условия: $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$

определяне на константите: $C_2 = \frac{g}{\lambda^2}, \qquad C_1 = -\frac{g}{\lambda^2}$

или: $x = \frac{gt}{\lambda} - \frac{g}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda t}), \quad \dot{x} = v = \frac{g}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$

Аналогично на случая с пропорционално на квадрата на скоростта съпротивление и тук има пределна скорост, т.е. при $t \to \infty$ тя е $v_* = \frac{g}{\lambda}$

числови данни:

$r = 10^{-3}\,[m], \quad \mu = 1.07\,[Pa.s\}, \quad \rho = 8.10^3\,[kg/m^3], \quad \lambda \approx 600\,[s^{-1}]$

скоростта на движение се доближава до пределната за време $t \approx 0.1[s]$;

пределната скорост е $v_* \approx 1.6.10^{-2}\,[m/s]$

изминато разстояние за времето $t \approx 0.1[s]$ на достигане на пределната скорост: $h \approx 10^{-4}\,[m]$

Пределната скорост сравнително не е голяма и се достига за малък интервал от време при движението, на който съответства малко разстояние.