ЛЕКЦИЯ 15

Аналитична механика

Съдържание

1. Разпределение на сили в непрекъсната среда.

- модел на непрекъсната среда:
  - непрекъснато разпределено вещество
  - физични характеристики: плътност, вискозност, топлопроводимост, електропроводимост и т.н.
  - общи механични характеристики на движението: премествания, скорости, ускорения, сили и т.н.
- вътрешни (молекулярни) движения
  - топлинни характеристики: в газове, течности и аморфни тела
  - колебания относно кристалната решетка
  - закони на Бойл-Мариот, Клапейрон (газове), закони за вискозни течности (Навие-Стокс), закон на Хук (твърди тела)
- моделът на абсолютно твърдо тяло: най–прост пример за непрекъсната среда
- характерна особеност на статиката (чийто предмет е общо изучаване на силите) на абсолютно твърдо тяло: обръща се сравнително малко внимание на вътрешните сили
  - принцип на втвърдяването
  - метод на сеченията
- изучаване на вътрешните сили: механика на непрекъснатите среди
- преход от съсредоточени в отделни точки физични величини към непрекъснато разпределени:
  - характеристика: плътност на разпределение на физична величина в непрекъсната среда
  - пример: плътност на разпределение на масата
- средна плътност ρ_{cp} на разпределение на масата в обем v

$$\rho_{cp} = \frac{m}{v} \tag{1}$$

- означения: δm - безкрайно малка маса; δv - безкрайно малък обем
  - разлика с диференциал d (безкрайно малко изменение на дадена величина в зависимост от безкрайно малко нарастване dt на времето)
  - плътност ρ_{cp} на разпределение на масата

$$\rho = \lim_{v \to 0} \frac{m}{v} \qquad \text{или} \qquad \rho = \frac{\delta m}{\delta v} \tag{2}$$

  - изразяване на елементарната маса чрез плътността и елементарния обем

$$\delta m = \rho \delta v \tag{3}$$

- средна плътност на разпределение на *силите*, приложени в точки от непрекъсната среда (средна обемна сила): отношението на главния вектор $\mathbf{V}$ на тези сили, приложени в точки от обем V на средата, към масата на този обем
  -

$$\mathbf{F}_{cp} = \frac{\mathbf{V}}{\rho_{cp} v} \tag{4}$$

  - обемна сила в дадена точка: $\mathbf{F} = \lim_{v \to 0} \frac{\mathbf{V}}{\rho v} = \frac{\delta \mathbf{V}}{\rho \delta v}$ (5)
  - изразяване на главния вектор на сили в точка: $\delta \mathbf{V} = \rho \mathbf{F} \delta v$ (6)
- примери:
  - обемна сила за силата на тежестта: векторът на ускорението при свободно падане $\mathbf{g}$
  - за центробежна сила: центробежното ускорение $\omega^2 \mathbf{r}$

2. Напрежения.

- средна плътност на повърхностни сили – *напрежение* $\mathbf{p}$
  - елементарна повърхност $\delta\sigma$
  - елементарна повърхностна сила: $\delta \mathbf{F} = \mathbf{p} \delta\sigma$
- за крайни обеми (повърхности) с непресъснато разпределени обемни (повърхностни) сили: главните вектори на тези сили се определят чрез обемни (повърхностни) интеграли
- елементарна равнинна площ около материална точка
  - вътрешна сила, действаща на елементарната площ (метод на сеченията) от страна на мислено премахнатата част на средата
  - отношението на вътрешна сила към елементарната площ: *напрежение* в дадена точка на средата (вектор)
  - ориентация на елементарната площ: чрез единичен вектор $\mathbf{n}$ по нормалата на елементарната площ

- посоката единичният вектор индуцира „положително“ полупространство (равнината на елементарната площ определя две полупространства)

- означение: $\mathbf{p}_n$ - вектор на напрежението, действащ върху елементарната площ в „положителното“ полупространство (във второто полупространство векторът на напрежението, действащ върху елементарната площ, ще се означава с $-\mathbf{p}_n$)

3. **Равенства на Коши.**
   - нека в непрекъсната среда е разгледан тетраедър с прав тристенен ъгъл М при върха си
   - правоъгълна координатна система: начало – върхът на тетраедъра и оси по неговите ръбове (единични вектори по осите: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$)
   - върховете на тетраедъра: точки M_1, M_2, M_3 съответно по осите x,y,z
   - елементарни площи $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z$ - околните страни на тетраедъра, съответно препендикулярни на осите x,y,z
     - сили, действащи съответно върху елементарните площи $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y$, $\delta\sigma_z$: $-\mathbf{p}_x\delta\sigma_x, -\mathbf{p}_y\delta\sigma_y, -\mathbf{p}_z\delta\sigma_z$
   - сила, действаща върху основата ($\mathbf{n}$ - единичен вектор по нормалата към основата) на тетраедъра: $\mathbf{p}_n\delta\sigma_n$, където $\delta\sigma_n$ е площта на основата
   - тетраедърът е в равновесие (равенство на нула на главния вектор):
     $$\mathbf{p}_n\delta\sigma_n = \mathbf{p}_x\delta\sigma_x + \mathbf{p}_y\delta\sigma_y + \mathbf{p}_z\delta\sigma_z \qquad (7)$$
   - $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z$ - може да се считат за проекции на $\delta\sigma_n$ върху координатните равнини
     - n_x, n_y, n_z: косинуси между $\mathbf{n}$ и единичните вектори по осите: $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$
     - тогава $\delta\sigma_x = n_x\delta\sigma_n, \quad \delta\sigma_y = n_y\delta\sigma_n, \quad \delta\sigma_z = n_z\delta\sigma_n \qquad (8)$
   - заместване в (7) и след съкращаване на $\delta\sigma_n$: $\mathbf{p}_n = n_x\mathbf{p}_x + n_y\mathbf{p}_y + n_z\mathbf{p}_z$
   - смяна на означенита: $x = x_1, y = x_2, z = x_3; n_1 = n_x, n_2 = n_y, n_3 = n_z$
     $$\mathbf{p}_n = n_1\mathbf{p}_1 + n_2\mathbf{p}_2 + n_3\mathbf{p}_3 \qquad (9)$$
   - проектиране на (9) върху координатните оси:
     $$\begin{aligned} p_{n1} &= n_1 p_{11} + n_2 p_{21} + n_3 p_{31} \\ p_{n2} &= n_1 p_{12} + n_2 p_{22} + n_3 p_{32} \\ p_{n3} &= n_1 p_{13} + n_2 p_{23} + n_3 p_{33} \end{aligned} \qquad (10)$$
   - равенствата (10) - *равенства на Коши*: изразяват напрежението, действащо върху произволна елементарна площ, чрез напреженията, действащи върху три взаимно перпендикулярни елементарни площи

- векторите $\mathbf{p}_n$ зависят от ориентацията на елементарната площ, към която са приложени – *не са векторна функция*

4. **Тангенциални и нормални напрежения.**

- определение: величините $p_{ij}\ (i \neq j)$ - *тангенциални напрежения*
  - величините $p_{ij}\ (i \neq j)$ се отнасят за координатните равнини
  - пример: напрежения при триене на непрекъснати среди
- определение: величините $p_{ij}\ (i = j)$ - *нормални напрежения*
  - величините $p_{ij}\ \ (i = j)$ са проекции по нормалите към координатните равнини
  - пример: напрежения на налягане на непрекъснати среди
- означения (в технически курсове):
  - за нормални напрежения: $p_{11} = \sigma_1$, $p_{22} = \sigma_2$, $p_{33} = \sigma_3$
  - за тангенциални напрежения: $p_{ij} = \tau_{ij}\ (i \neq j)$

5. **Теорема за тангенциалните напрежения.**

- второ условие за равновесие на тетраедъра – равенство на нула на главния момент на приложените сили
- приемане, че силите, приложени към стените на тетраедъра, са съсредоточени в медицентровете им N_1, N_2, N_3 и N съответно за околните стени и основата му
- означения: $\overrightarrow{MN} = \mathbf{r}$, $\overrightarrow{MN_1} = \mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{MN_2} = \mathbf{r}_2$, $\overrightarrow{MN_3} = \mathbf{r}_3$
- уравнение на моментите

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n \delta\sigma_n = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 \delta\sigma_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \delta\sigma_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{p}_3 \delta\sigma_3 \qquad (11)$$

  - след заместване на $\mathbf{p}_n$ от (9), отчитайки (8) и съкращаване на $\delta\sigma_n$, се стига до

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{p}_1 n_1 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{p}_2 n_2 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{p}_3 n_3 = \mathbf{0} \qquad (12)$$

  - но N_3 е проекция на N в равнината (xy), като

$\overrightarrow{N_3N} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MN_3} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_3 = \lambda_3 \mathbf{k}$, λ_3 - множител пред единичния вектор;

аналогично $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda_1 \mathbf{i}$, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = \lambda_2 \mathbf{j}$ (13)

- след отчитане на (13) изразът (12) добива вид

$$\lambda_1 n_1 (\mathbf{i} \times \mathbf{p}_1) + \lambda_2 n_2 (\mathbf{j} \times \mathbf{p}_2) + \lambda_3 n_3 (\mathbf{k} \times \mathbf{p}_3) = \mathbf{0} \qquad (14)$$

- означения: N_1', N_2', N_3'- среди съответно на страните M_2M_3, M_1M_3, M_1M_2 на триъгълника $M_1M_2M_3$
- тогава $\overrightarrow{MN_1'} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MN_1} = \dfrac{3}{2}\mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{MN_2'} = \dfrac{3}{2}\mathbf{r}_2$, $\overrightarrow{MN_3'} = \dfrac{3}{2}\mathbf{r}_3$

- проекциите на векторите $\overrightarrow{MN'_1}$, $\overrightarrow{MN'_2}$, $\overrightarrow{MN'_3}$, $\overrightarrow{MN}$ по нормалата $\mathbf{n}$ към равнината на триъгълника $M_1M_2M_3$ са равни, т.е. те са всъщност височината h на тетраедъра, спусната от М; или

$$\frac{3}{2}(\mathbf{r}_1\mathbf{n}) = \frac{3}{2}(\mathbf{r}_2\mathbf{n}) = \frac{3}{2}(\mathbf{r}_3\mathbf{n}) = h \qquad (15)$$

- след умножение скаларно на двете части на (13) с $\mathbf{n}$ се получава

$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\mathbf{n} = \lambda_1(\mathbf{i}\,\mathbf{n})$, $\mathbf{rn}-\mathbf{r}_1\mathbf{n} = \lambda_1 n_1$, $h - \dfrac{2}{3}h = \lambda_1 n_1$, $\dfrac{1}{3}h = \lambda_1 n_1$, т.е.

$$\frac{1}{3}h = \lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2 = \lambda_3 n_3 \qquad (16)$$

- след заместване в (14) и съкращаване на h се стига до

$$\mathbf{i}\times\mathbf{p}_1 + \mathbf{j}\times\mathbf{p}_2 + \mathbf{k}\times\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \qquad (17)$$

- след проектиране на последното равенство на координатните оси се стига до

$$p_{12} = p_{21}, \quad p_{23} = p_{32}, \quad p_{31} = p_{13} \qquad (18)$$

- теорема за тангенциалните напрежения:
  Ако през произволна точка на непрекъсната среда се прекарат три взаимно перпендикулярни елементарни площи, то за всеки две от тях проекциите на вектора на напрежението, приложен към едната, върху нормалата на другата, са равни.
- съвкупността от деветте величини p_{ks} $(k,s=1,2,3)$ са компоненти на тензор от втори ранг – *тензор на напреженията*