

ЛЕКЦИЯ 14

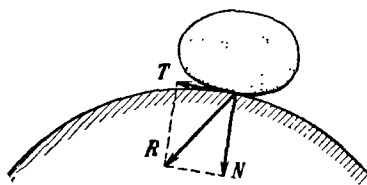
Аналитична механика

Съдържание

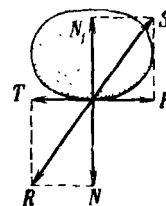
1. Триене при хлъзгане.
2. Триене при търкаляне.
3. Триене при нишки.
4. Център на успоредни сили.
5. Център на тежестта.
6. Методи за определяне на центъра на тежестта
7. Теорема на Пап-Гулден.

1. Триене при хлъзгане.

- триенето – сложно физично явление
 - нагряване на триещите се тела
 - наелектризиране
 - дифузия на веществата
 - разрушаване на триещите се повърхности
- експериментално изучаване
 - Амонтон (1663-1705) независимост на силите на триене от площта на триещите се повърхности
 - закони на триене, формулирани от Кулон (1736-1806)
- силите на триене възникват, когато равнодействащата на активните сили не е насочена по нормалата на допиращите се грапави повърхности на тела, които се намират в покой (фиг.1,а)



фиг.1,а



фиг.1,б

- при равновесие реакцията S трябва да бъде равна по големина и противоположна по посока на равнодействащата на активните сили R
- разлагане на активната сила R на съставяща по нормалата N и по тангентата T (фиг.1,б)
- разлагане на реакцията на грапавата повърхност на съставяща по нормалата N_1 и по тангентата F (фиг.1,б)

- определение: *сила на триене при хлъзгане* – тангенциалната съставляща F на реакцията на връзката, възникваща при действие на активни сили, които се стремят да придвижат тялото, намиращо се в покой; нейната посока е противоположна на възможното движение на тялото
- при равновесие трябва да са в сила равенствата

$$\mathbf{N} - \mathbf{N}_1 = \mathbf{0} \quad \mathbf{T} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

- опитите показват, че при изменение на тангенциалната съставляща T в определени граници равновесието не се нарушава – тогава и силата на триене при хлъзгане също се изменя в определени граници
- разлика от другите реакции на връзките – големината на силата на триене при хлъзгане не може да надвиши определена граница
- закон на Кулон: максималната стойност на силата на триене при хлъзгане е пропорционална на нормалния натиск на тялото върху повърхността

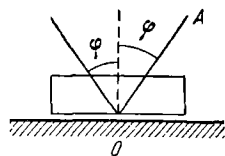
$$F_{\max} = f N, \quad (1)$$

f - коефициент на триене при хлъзгане; зависи от материала на телата и степента на обработка на триещите се повърхности, като за идеално гладки тела е нула, докато при реални тела е положителен

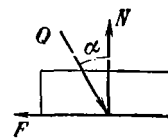
- при превишаване на F_{\max} започва движение на тялото; опитите показват, че силата на триене при хлъзгане (за разлика от силата на триене при покой) е по-малка от F_{\max}
- ъгъл на триене*: ъгълът φ между максималната стойност на силата на триене при хлъзгане и нормалния натиск на тялото

$$\operatorname{tg} \varphi = f \quad (2)$$

- конус на триене*: образуващата му OA сключва ъгъл φ с нормалата (фиг.2)



фиг.2



фиг.3

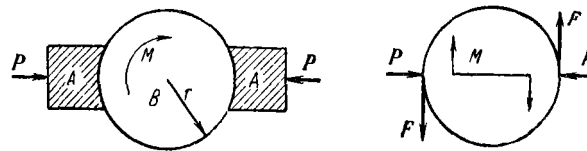
- нека Q е равнодействаща на активните сили, приложена към тяло, намиращо се в покой, под ъгъл α с нормалата (фиг.3)
 - съгласно условията за равновесие : $N = Q \cos \alpha$, $F = Q \sin \alpha$
 - тялото остава в покой, когато $F \leq F_{\max}$, т.е.

$$F = Q \sin \alpha \leq F_{\max} = fN = fQ \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \leq f, \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \operatorname{tg} \varphi, \quad \alpha \leq \varphi$$

При известен коефициент на триене може да се определи ъгъл α , така че когато приложената към тялото сила (независимо от

големината $\dot{\varphi}$) е наклонена към нормалата под по-малък ъгъл, т.е. линията на действието $\dot{\varphi}$ е вътре в конуса на триене, то тялото остава в равновесие.

- сила на триене при хлъзгане при постъпателно и въртливо движение
 - при постъпателно движение: коефициент на триене при хлъзгане f
 - при постъпателно и въртливо движение: коефициент на триене при завъртане (усукване) μ
- Пример: Диск е свързан с вал на двигател, който му придава въртящ момент M . Спирането се осъществява с барабанни спирачки, към чиито накладки е приложена сила P . Да се определят силите P , удържащи диска в равновесие, ако радиусът му е r , а коефициентът на триене между диска и накладките е f (фиг.4)



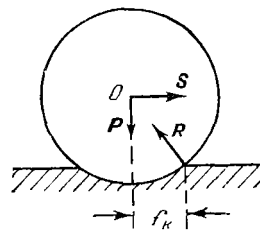
фиг.4

Реакцията между диска и накладките може да се разложи на нормален натиск (силите P) и силите на триенето F , като те са свързани чрез $F = fP$. Въртящият момент M (който се поражда от някаква двоица), по условие трябва да се уравни с момента на двоицата от сили F , чието рамо е $2r$ (двете сили на натиск P се уравнисяват). Тогава

$$F \cdot 2r - M = 0, \quad F = fP = \frac{M}{2r}, \quad P = \frac{M}{2fr}.$$

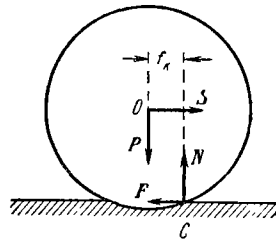
2. Триене при търкаляне.

- нека към диск с тегло P , намиращ се в покой върху грапава повърхност, е приложена сила S , стремяща се да го приведе в движение (фиг.5)
- сили на триене при търкаляне – възникват заради деформациите, така че допирането между телата става по повърхност



фиг.5

- към диска са приложени три сили; съгласно теоремата за трите сили при равновесие реакцията трябва да е насочена към общата точка O на активните сили P и S .
- реакцията трябва да има хоризонтална съставяща, която да уравновесява силата S - приложената ѝ точка е изместена на някакво разстояние към посоката на движение
- разлагане на реакцията на вертикална компонента N и хоризонтална F – силата на триене
- условия за равновесие – равенство на нула на сумите на проекциите по хоризонталното и вертикалното направление, както и на сумите на моментите на двоиците (P, N – с рамо f_k) и (F, S_{\max} - с рамо радиуса на диска) ; S_{\max} е силата, след превишаване на която покоят се нарушава

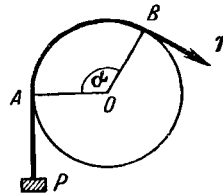


фиг.6

- момент на триене при търкаляне: $m_{\max} = f_k N$, f_k - коефициент на триене при търкаляне
- интерпретация на f_k - разстоянието, на което е изместена приложената точка на реакцията N от вертикалата, минаваща през центъра на диска
- необходимо условие за чисто търкаляне (без хлъзгане) – силата на триене да е по-малка от максималната сила на триене при хлъзгане, т.е. $F < fN$, където f е коефициентът на триене при хлъзгане

3. Триене при нишки.

- на неподвижен цилиндър е навита нишка, към единия край на която е закачен товар P , удържан в равновесие от сила T (фиг.7)



фиг.7

- формула на Ойлер:

$$T = Pe^{-f\alpha},$$

f - коефициент на триене между нишката и цилиндъра; α - централен ъгъл на дъгата АВ (ъгъл на „обхват“ на цилиндъра от нишката)

- удържащата сила T не зависи от радиуса на цилиндъра, а само от коефициента на триене между нишката и цилиндъра и ъгъла на „обхвата“, като намалява по експоненциален закон
- пример: при $\alpha = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ и $f = 0.2$ за силата се получава $T = 0.21P$

4. Център на успоредни сили.

- Нека \mathbf{F}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) е съвкупност от сили с успоредни линии на действие. Тя се свежда до равнодействаща (пресечната им точка се счита за безкрайно отдалечена).

- За равнодействащата \mathbf{R} е в сила $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$

- определение: *център на успоредни сили* – приложна точка на равнодействащата на успоредни сили, имаща свойството, че ако всички сили се завъртят на един и същи ъгъл (като успоредността им не се нарушава), то и равнодействащата се завърта на същия ъгъл
- нека след евентуално завъртане на линиите на действие силите се считат успоредни на оста Oz . Тогава:

$$F_{ix} = F_{iy} = 0, \quad F_{iz} = F_i, \quad R_x = R_y = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = \sum_{i=1}^n F_i \quad (3)$$

- момент относно оста Oy (съгласно теоремата на Вариньон)

$$m_y(R) = \sum_{i=1}^n m_y(F_i) \quad (4)$$

- означение: (x_C, y_C, z_C) - координати на центъра на успоредни сили;

тогава $m_y(R) = x_C R_z = x_C \sum_{i=1}^n F_i$, $\sum_{i=1}^n m_y(F_i) = \sum_{i=1}^n x_i F_i$ и отчитайки (4):

$$x_C \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n x_i F_i \Rightarrow x_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (5)$$

аналогично:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (6)$$

- изразите (5) и (6) могат да се интерпретират като проекции на радиус-вектора на центъра на успоредни сили

- радиус-вектор на центъра на успоредни сили (\mathbf{r}_c - радиус-вектори на приложените точки на силите \mathbf{F}_i)

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (7)$$

5. Център на тежестта.

- определение: *център на тежестта* на твърдо тяло – центърът на успоредните сили на тежестта на материалните частици, от които е съставено тялото
- *тегло* на твърдо тяло – сумата от силите на тежестта \mathbf{P}_i на материалните частици, от които е съставено тялото

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (8)$$

- означения:
 - елементарен обем Δv_i : обем около материална точка с координати x_i, y_i, z_i (обемът V на тялото е сума от елементарни обеми)
 - сила, отнесена към единица обем: ρ_i (в случая на сила на тежестта – относително тегло; плътност)
 - $F_i = \rho_i \Delta v_i$: сила (в частност силата на тежестта P_i), приложена към елементарния обем (разглежда се непрекъснато разпределение на силите по обема на твърдото тяло)
- тогава (6) и (7) добиват вида

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \rho_i \Delta v_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta v_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \rho_i \Delta v_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta v_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \rho_i \Delta v_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta v_i} \quad (9)$$

- изразите (9) са приблизителни; стават по-точни при $\Delta v_i \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ и сумите преминават в интеграли, т.е. (при хомогенно тяло $\rho_i = \rho$ и се съкращава)

$$x_c = \frac{\int x dv}{V}, \quad y_c = \frac{\int y dv}{V}, \quad z_c = \frac{\int z dv}{V} \quad (10)$$

- аналогично за еднородни повърхности (S – площ на повърхността)

$$x_c = \frac{1}{S} \int_S x ds, \quad y_c = \frac{1}{S} \int_S y ds, \quad z_c = \frac{1}{S} \int_S z ds \quad (11)$$

- и еднородни линии (L – дължина на линията)

$$x_c = \frac{1}{L} \int_L x dl, \quad y_c = \frac{1}{L} \int_L y dl, \quad z_c = \frac{1}{L} \int_L z dl \quad (12)$$

- *статичен момент на площ относно ос*: сумата от произведенията на елементарните площи, на които е разделено тялото, и разстоянието до тази ос (числителите на (9) в двумерния случай)

- статичен момент на площ относно осите x и y

$$M_y = \sum_{i=1}^n x_i \Delta s_i, \quad M_x = \sum_{i=1}^n y_i \Delta s_i$$

- определяне на разстоянието от центъра на тежестта до дадена ос при известни статични моменти на площта относно тази ос

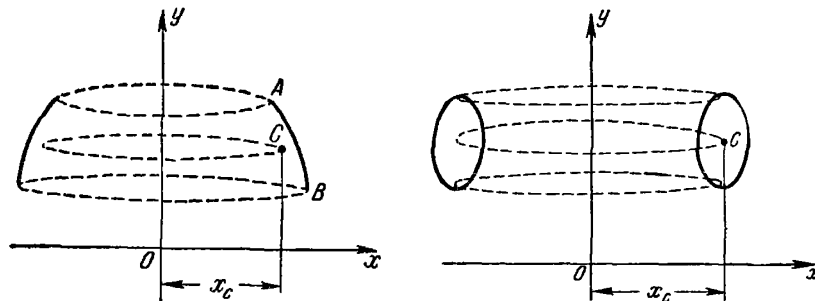
$$x_c = \frac{M_y}{S}, \quad y_c = \frac{M_x}{S} \quad (13)$$

6. Методи за определяне на центъра на тежестта

- тялото има равнина на симетрия: центърът на тежестта е в тази равнина
 - при две равнини на симетрия центърът на тежестта е по пресечницата им
- тялото има ос на симетрия: центърът на тежестта лежи на тази ос
 - при две оси на симетрия центърът на тежестта е на пресечната им точка
- възможност за представяне на тяло като комбинация от тела с известни или лесно определяеми центрове на тежестта:
 - сумите в числителите на (9) са крайни – в зависимост от броя на телата; аналогично за двумерния и едномерния случай
 - допълване на тяло, имащо празнини, до плътно тяло чрез добавяне на обеми (площи) с отрицателен знак

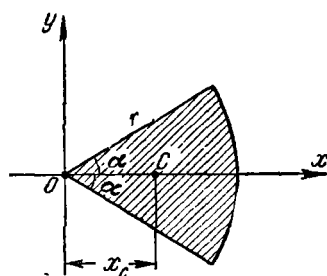
1. Теорема на Пап-Гулден.

- първа теорема: *Ако дъга от крива, лежаща в равнина, се върти около ос, лежаща в тази равнина и непресичаща кривата, то повърхнината на образуваното ротационно тяло е равна на произведението от дължината на кривата и дължината на окръжността, описана от центъра на тежестта на кривата.*



фиг.8

- АВ: равнинна крива с дължина L
- С: център на тежестта на кривата, чието разстояние до оста y е x_C
- дължина на окръжността, описана от точка С: $2\pi x_C$
- повърхнина S на ротационното тяло: $S = 2\pi x_C L$
- втора теорема: Ако равнинна фигура се върти около ос, лежаща в равнината на фигурата и непресичаща контура на фигурата, то обемът на образуваното ротационно тяло е равен на произведението от площта на фигурата и дължината на окръжността, описана от центъра на тежестта на фигурата.

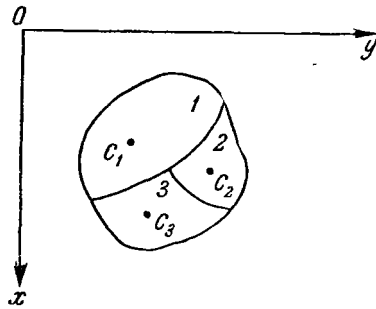


фиг.9

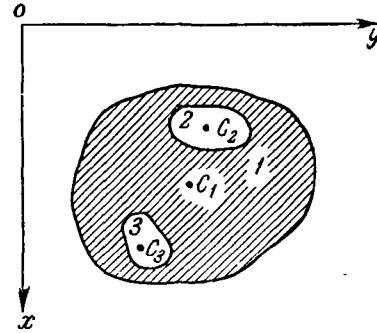
- S : повърхнина на равнинната фигура
- обем V на ротационното тяло: $V = 2\pi x_C S$
- теоремите на Пап.Гулден позволяват да се определи положението на центъра на тежестта на линия и равнинна фигура, когато са известни повърхнината или обемът на съответните ротационни тела
- Определяне на положението на центъра на тежестта на тела с проста геометрична форма.
 - за хомогенен правоъгълник: пресечна точка на диагоналите
 - за хомогенен триъгълник: пресечна точка на медианите
 - за дъга от хомогенна окръжност: $x_C = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ (фиг.9)
 - за хомогенен кръгов сектор $x_C = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ (фиг.9)
 - за хомогенна призма: среда на разстоянието между центровете на тежестта на основите ѝ
 - за хомогенна пирамида: $3/4$ от разстоянието между върха и центъра на тежестта на основата ѝ, считано от върха
 - за хомогенен прав кръгов конус: $3/4$ от височината му, считано от върха на конуса

- метод за разделяне на тялото на съставни части, чиито центрове на тежестта са известни или лесно определями

Пример: Да се определи центърът на тежестта на показаната равнинна фигура



фиг.10



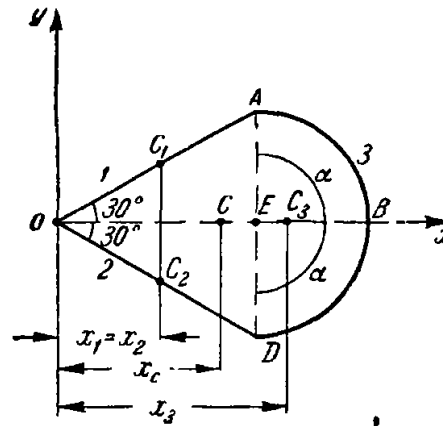
фиг.11

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 + x_2 \Delta s_2 + x_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3}, \quad y_C = \frac{y_1 \Delta s_1 + y_2 \Delta s_2 + y_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3}, \quad z_C = 0 \quad (\text{фиг.10})$$

$$x_C = \frac{x_1 \Delta s_1 - x_2 \Delta s_2 - x_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3}, \quad y_C = \frac{y_1 \Delta s_1 - y_2 \Delta s_2 - y_3 \Delta s_3}{\Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3}, \quad z_C = 0 \quad (\text{фиг.11})$$

Пример.

- Да се намери центърът на тежестта на хомогенен контур OABD (фиг.12), състоящ се от две отсечки OA=OD=a, разположени под ъгъл 60° , и полуокръжност ABD с диаметър AD.



фиг.12

Контурът може да се раздели на три части (индексирани съответно с 1, 2 и 3) – отсечки OA и OD с дължина a и полуокръжност ABD с радиус AD/2.

Заради оста на симетрия центърът на тежестта C на контура лежи по оста x,

т.е. $y_C = 0$. За координатата x_C се получава: $x_C = \frac{x_1 \Delta l_1 + x_2 \Delta l_2 + x_3 \Delta l_3}{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3}$,

където $x_1 = x_2 = \frac{OA}{2} \cos 30 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $EC_3 = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

В случая $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $r = \frac{a}{2}$; тогава $EC_3 = \frac{a}{\pi}$.

Тогава $x_3 = OE + EC_3 = OA \cos 30 + \frac{a}{\pi} = \frac{2 + \pi\sqrt{3}}{2\pi} a$.

Но $\Delta l_1 = \Delta l_2 = a$, $\Delta l_3 = \frac{\pi a}{2}$ и след заместване се получава:

$$x_c = \frac{a \frac{\sqrt{3}}{4} a + a \frac{\sqrt{3}}{4} a + \frac{2 + \pi\sqrt{3}}{2\pi} a \frac{\pi a}{2}}{a + a + \frac{\pi a}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 2 + \pi\sqrt{3}}{2(4 + \pi)} a = 0.76a$$