ЛЕКЦИЯ 13

Аналитична механика

Съдържание

1. Изменение на центъра на привеждане на несходяща пространствена съвкупност сили.

- Произволна пространствена несходяща система сили $\mathbf{F}_i \quad (i = 1,2,...n)$, действаща на абсолютно твърдо тяло, е статически еквивалентна на една сила $\mathbf{V}$ (главен вектор) и една двоица с момент $\mathbf{m}$. Главният вектор е приложен в произволно избрана точка от тялото - център на привеждането, а моментът $\mathbf{m}$ е равен на главния момент $\mathbf{m}^{(O)}$ на силите относно центъра на привеждането.
- при изменение на центъра на привеждане в друга точка главният вектор запазва големината и посоката си
- връзка между моментите на дадена сила $\mathbf{F}$ относно два различни центъра на привеждане O и O^*
  - нека $\mathbf{r}$ е радиус-векторът на приложната точка М на силата $\mathbf{F}$ относно O, а $\mathbf{r}_0$ е радиус-векторът на точка O^* относно O;
  - тогава за радиус-вектора $\mathbf{r}^*$ на точката М относно O^*

$$\overrightarrow{O^*M} = \mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$$

  - съгласно определението за момент на сила относно точка

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}^*) \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}^* \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F} + \mathbf{m}_{O^*}(\mathbf{F}) \qquad (1)$$

векторното произведение $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}$ може да се интерпретира като момент на силата $\mathbf{F}$, пренесена в точката O^* (означена като $\mathbf{F}^*$); тогава (1) се записва като

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}^*) + \mathbf{m}_{O^*}(\mathbf{F}) \qquad (2)$$

Моментът на сила относно някаква точка е равен на момента на тази сила относно друга точка, сумиран векторно с момента на същата *сила (след като е пренесена във втората точка) относно първата точка.*

- връзка между главния момент $\mathbf{m}^{(O)}$ на съвкупност от сили относно точка O и главния момент $\mathbf{m}^{(O^*)}$ на тази съвкупност относно точката O^*

$$\mathbf{m}^{(O)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_{O^*}(\mathbf{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i^*)$$

Но $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_{O^*}(\mathbf{F}_i)$ е всъщност главният момент $\mathbf{m}^{(O^*)}$ относно O^*, а съгласно теоремата на Вариньон за съвкупността сили $\mathbf{F}_i^*$, която е сходяща в точка O^*, изразът $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i^*)$ е моментът на главния вектор $\mathbf{V}^*$, който е приложен в точка O^*, относно точката O, т.е.

$$\mathbf{m}^{(O)} = \mathbf{m}^{(O^*)} + \mathbf{m}_O(\mathbf{V}^*) \qquad (3)$$

Или *главният момент на съвкупност сили относно някаква точка е равен на главния момент на тази съвкупност относно друга точка, сумиран векторно с момента относно първата точка на главния вектор, пренесен във втората точка.*

Отчитайки, че по определение $\mathbf{m}_O(\mathbf{V}^*)$ е перпендикулярен на главния вектор $\mathbf{V}$, след скаларно умножение на двете части на (3) с $\mathbf{V}$, т.е. $\mathbf{m}_O(\mathbf{V}^*)\mathbf{V} = 0$, се стига до

$$\mathbf{m}^{(O)}\,\mathbf{V} = \mathbf{m}^{(O^*)}\,\mathbf{V} \qquad (4)$$

Скаларното произведение на главния момент и главния вектор *не зависи* от избора на центъра на привеждане. Това скаларно произведение се нарича *първи статичен инвариант*; докато *втори статичен инвариант* е големината на главния вектор.

2. Привеждане на несходяща пространствена съвкупност сили към силов винт.

- твърдение: при $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$ (ненулев главен вектор) и $\mathbf{m}^{(O)}\,\mathbf{V} \neq 0$ (главният вектор не е перпендикулярен на главния момент) за център на привеждане може да се избере такава точка O^*, че главният момент $\mathbf{m}^{(O^*)}$ относно тази точка и главният вектор $\mathbf{V}$ да лежат на една права.

Нека главният момент $\mathbf{m}^{(O)}$ е разложен на две съставящи – едната $\mathbf{m}_V{}^{(O)}$ по направление на главния вектор, а другата $\mathbf{m}_1{}^{(O)}$ - перпендикулярно на главния вектор. По този начин еквивалентната двоица сили, за която нейният момент е равен на главния момент, също се разлага на две двоици с моменти $\mathbf{m}_V = \mathbf{m}_V{}^{(O)}$ и $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_1{}^{(O)}$. Равнината на първата двоица е перпендикулярна на $\mathbf{V}$, а равнината, перпендикулярна на $\mathbf{m}_1$, ще е съдържа вектора $\mathbf{V}$. Двоицата с момент $\mathbf{m}_1$ и силата $\mathbf{V}$ образуват равнинна съвкупност сили, която може да се сведе до една равнодействаща сила. Ако за рамо на двоицата се избере $h = \dfrac{m_1}{V}$, тогава съставящите я сили $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ ще бъдат равни по големина на $\mathbf{V}$. Двоицата може така да се разположи в равнината, че едната нейна сила $\mathbf{V}_1$ да бъде приложена в точка O и посоката ѝ да бъде противоположна на $\mathbf{V}$. Тогава съвкупността от трите сили $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ се привежда към една равнодействаща сила $\mathbf{V}^*$, чиято линия на действие е успоредна на линията на действие на $\mathbf{V}$ (приложен в първоначалната точка O) и разстоянието между двете линии на действие е $h = \dfrac{m_1}{V}$.

Нека O^* е точка от линията на действие на $\mathbf{V}^*$. Тогава моментът на силата $\mathbf{V}_2$ относно O^* ще е равен на $\mathbf{m}_1$ (и не зависи от избора на O^* върху линията на действие на $\mathbf{V}^*$).

- Или: съвкупността от главния вектор $\mathbf{V}$ и главния момент $\mathbf{m}^{(O)}$ в точката O се свежда до сила $\mathbf{V}^*$ с линия на действие през точка O^* (успоредна на направлението на $\mathbf{V}$) и двоица с момент $\mathbf{m}_V$, успореден на тази линия на действие.

- Моментът $\mathbf{m}_V$ е равен на главният момент $\mathbf{m}^{(O^*)}$ на разглежданата съвкупност сили относно точката O^*, която е произволна върху линията на действие на $\mathbf{V}^*$.

  Наистина, съгласно връзката (3) между главните моменти на съвкупност сили относно различни центрове на привеждане $\mathbf{m}^{(O)} = \mathbf{m}^{(O^*)} + \mathbf{m}_O(\mathbf{V}^*)$ може да се напише

$$\mathbf{m}^{(O^*)} = \mathbf{m}^{(O)} - \mathbf{m}_O(\mathbf{V}^*) = \mathbf{m}^{(O)} - \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_V \qquad (5)$$

- определение: съвкупност от сила и двоица, чиято равнина е перпендикулярна на линията на действие на силата, се нарича *силов винт*

  интерпретация – завиване на винт; при еднакви посоки на $\mathbf{m}_V$ и $\mathbf{V}$ - винт с дясна резба, а при различни посоки на $\mathbf{m}_V$ и $\mathbf{V}$ - лява.

- пространствена съвкупност сили, чийто главен вектор е различен от нулевия вектор и не е перпендикулярен на главния момент, може да се приведе към силов винт; линията на действие на силата, влизаща в силов винт – *централна ос* (ос на минималните моменти)
- *централната ос – геометрично място на точки, в които главният момент е успореден на главния вектор*
- частни случаи
  1. Съставящата на главния момент по направление на главния вектор е нула, т.е. $\mathbf{m}_V^{(O)} = \mathbf{0}$ - главният момент е перпендикулярен на главния вектор. Съвкупността сили се свежда до една равнодействаща; централната ос е самата линия на действие на тази равнодействаща.
  2. Съставящата на главния момент по направление, перпендикулярно на главния вектор, е нула. Центърът на привеждане е разположен на самата централна ос за съвкупността от сили.
  3. Главният момент е нула, но главният вектор не нула. Центърът на привеждане е върху линията на действие на равнодействащата на съвкупността сили.

3. **Аналитично изразяване на елементите на силовия винт.**

   Нека са известни проекциите (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}) на силите $\mathbf{F}_i \quad (i = 1,2,...n)$, а също и координатите (x_i, y_i, z_i) на приложните им точки

- определяне на главния вектор

$$V_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad V_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \quad V_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \qquad (6)$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

- определяне на главния момент относно координатното начало O

$$m_x = \sum_{i=1}^{n}(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}), \quad m_y = \sum_{i=1}^{n}(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}), \quad m_z = \sum_{i=1}^{n}(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \qquad (7)$$

- първи статичен инвариант (проекцията на главния момент по направление на главния вектор)

$$\mathbf{m}^{(O)} \frac{\mathbf{V}}{V} = \frac{1}{V}(m_x^{(O)} V_x + m_y^{(O)} V_y + m_z^{(O)} V_z) \qquad (8)$$

- параметър на силовия винт

$$p = \frac{1}{V^2}(\mathbf{m}^{(O)}\mathbf{V}) = \frac{m_x^{(O)} V_x + m_y^{(O)} V_y + m_z^{(O)} V_z}{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \qquad (9)$$

- уравнение на централната ос

$$\frac{m_x^{(O^*)}}{V_x} = \frac{m_y^{(O^*)}}{V_y} = \frac{m_z^{(O^*)}}{V_z} \qquad (10)$$

Съгласно (5) : $\mathbf{m}^{(O^*)} = \mathbf{m}^{(O)}$ - $\mathbf{m}_O(\mathbf{V}^*)$, където $\mathbf{m}_O(\mathbf{V}^*)$ е моментът относно точката О на силата $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}$, имаща линия на действие по централната ос. Но

$$m_{Ox}(V^*) = yV_z - zV_y, \; m_{Oy}(V^*) = zV_x - xV_z, \; m_{Oz}(V^*) = xV_y - yV_x \quad , \quad (11)$$

където (x, y, z) са координатите на текущата точка O^* на централната ос, когато координатното начало е в центъра на привеждането O.
От (11):

$$\frac{m_x^{(O)} - yV_z + zV_y}{V_x} = \frac{m_y^{(O)} - zV_x + xV_z}{V_y} = \frac{m_z^{(O)} - xV_y + yV_x}{V_z} \qquad (12)$$

- твърдение: *положението на централната ос в пространството не зависи от центъра на привеждане на силите*

Нека вместо координатното начало O за център на привеждането е избрана друга точка A с координати (a, b, c). Тогава съгласно (12):

$$\frac{m_x^{(A)}-(y-b)V_z+(z-c)V_y}{V_x}=\frac{m_y^{(A)}-(z-c)V_x+(x-a)V_z}{V_y}=\frac{m_z^{(A)}-(x-a)V_y+(y-b)V_x}{V_z} \quad (13)$$

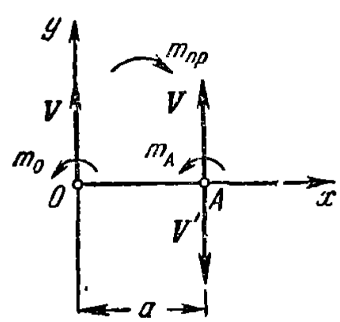
Но от (3): $\mathbf{m}^{(A)}=\mathbf{m}^{(O)}+\mathbf{m}_A(\mathbf{V}')$, където $\mathbf{V}'$ е главният вектор, пренесен в точка O, чиито координати относно точка A са $(-a,-b,-c)$. След проектиране на последното векторно равенство по осите на координатната система се получава:

$$m_x^{(A)}=m_x^{(O)}-bV_z+cV_y,\quad m_y^{(A)}=m_y^{(O)}-cV_x+aV_z,\quad m_z^{(A)}=m_z^{(O)}-aV_y+bV_x$$

След заместване в (13) след известна преработка се стига до (12), което доказва твърдението.

Примери.

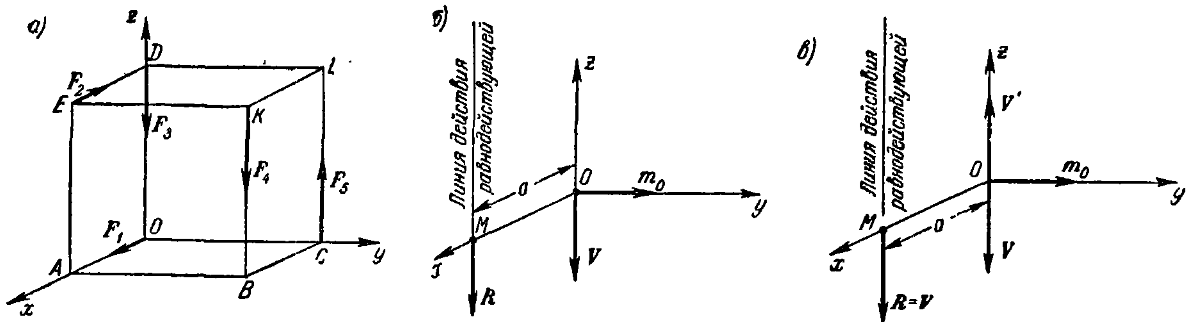
1. Равнинна система сили е била приведена към център О (фиг.1), като в резултат е получена сила V и двоица с момент, равен на главния момент относно О, който е равен на $m_O=4V_A$. Да се определи главният момент на тази система сили спрямо нов център на привеждане A, намиращ се на разстояние $OA=a$ по оста x от стария център



фиг.1

Силата V всъщност е главният вектор, който е статичен инвариант и следователно не зависи от центъра на привеждането А. Докато главният момент на тази система сили спрямо новия център на привеждане A ще се измени, като връзката между тези моменти се дава с (3), т.е. $\mathbf{m}^{(A)}=\mathbf{m}^{(O)}+\mathbf{m}_A(\mathbf{V})$. Но $m_A(V)=--Va$ и тогава $m^{(A)}=4Va-Va=3Va$.

2. На фиг.2 е показана система сили. Да се приведе към най-прост вид, ако за големините им е дадено $F_1=F_2=F_3=F$, $F_4=F_5=2F$ и кубът има ръб a.



фиг.2

За център на привеждането се избира началото O на координатната система. Проекциите V_x, V_y, V_z на главния вектор по осите x, y, z на координатната система са:

$$V_x = \sum_{i=1}^{5} F_{ix} = F_1 - F_2 = 0, \quad V_y = \sum_{i=1}^{5} F_{iy} = 0, \quad V_z = \sum_{i=1}^{5} F_{iz} = -F_3 - F_4 + F_5 = -F$$

Тогава $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = F$ и посоката му е противоположна на оста z.

Проекции на главния момент по осите x, y, z на координатната система:

$$m_x^{(O)} = \sum_{i=1}^{5} m_x(\mathbf{F}_i) = -F_4 a + F_5 a = 0$$

$$m_y^{(O)} = \sum_{i=1}^{5} m_y(\mathbf{F}_i) = -F_2 a + F_4 a = Fa$$

$$m_z^{(O)} = \sum_{i=1}^{5} m_z(\mathbf{F}_i) = 0$$

Или $m^{(O)} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = Fa$, като посоката му е по оста y. Главният вектор и главният момент са перпендикулярни, т.е. те могат да се приведат само към равнодействаща (фиг.2,б), тъй като проекция на главния момент по направление на главния вектор няма.

Съгласно (12) може да се запише

$$\frac{y}{0} = \frac{a - x}{0} = \frac{0}{F},$$

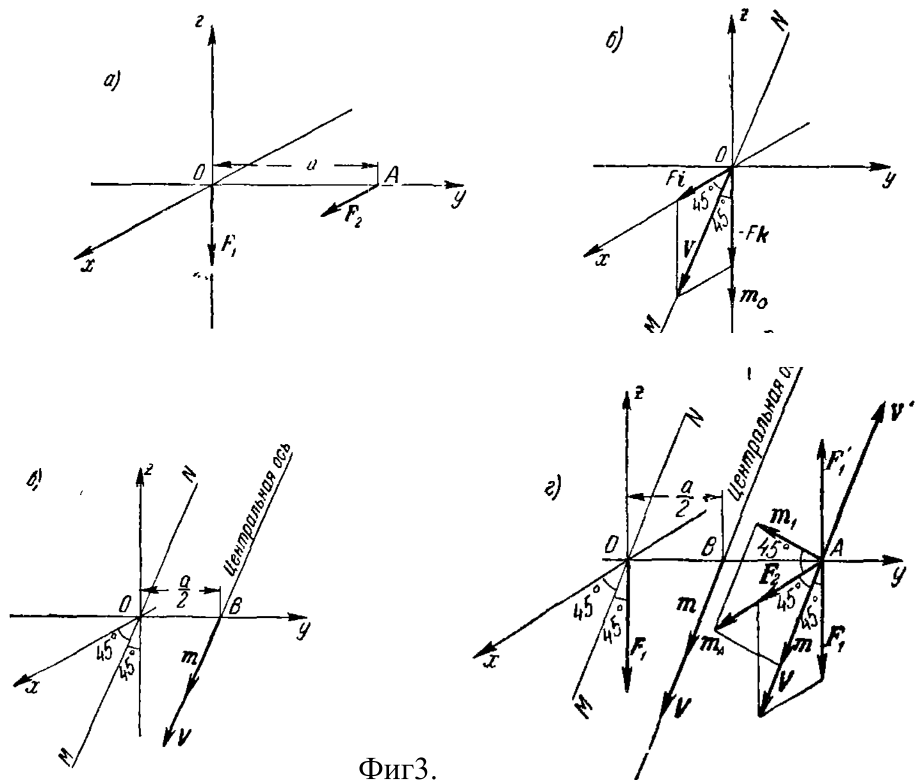
откъдето $x = a$, $y = 0$, т.е. равнодействащата R лежи в равнината ($x\ z$), успоредна на оста z и е на разстояние от нея $x = a$ (фиг.2,б).

В случая за определане на равнодействащата R може да се приложи и друг подход. На главния момент съответства двоица, лежаща в равнината (xz). Съгласно свойството на двоиците, че големините на силите и рамото на двоицата могат да се променят, но произведението да остава едно и също, избира се сила на двоицата, равна на V', имаща приложна точка в O (фиг.2,б). Тогава рамото на двоицата трябва да има големина $OM = \dfrac{m^{(O)}}{V}$.

След заместване: $OM = \dfrac{m^{(O)}}{V} = \dfrac{Fa}{F} = a$.

Системата сили се оказва еквивалентна на три сили: V', V - приложени в точка О, и $V = R$, приложена в точка М. Първите две се уравновесяват и в краен резултат като най-прост вид на привеждането е равнодействащата R, приложена в точка М.

3. На фиг.3 са показани две сили, чиито линии на действие са кръстосани прави. Да се приведе към най-прост вид, ако е дадено $F_1 = F_2 = F$, $OA = a$ и силата F_2 е успоредна на оста x на координатната система.



Фиг3.

За център на привеждането се избира началото О на координатната система. Проекциите V_x, V_y, V_z на главния вектор по осите x, y, z на координатната система са:

$$V_x = \sum_{i=1}^{2} F_{ix} = F_1, \quad V_y = \sum_{i=1}^{2} F_{iy} = 0, \quad V_z = \sum_{i=1}^{2} F_{iz} = -F_2 = -F$$

Тогава $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = F\sqrt{2}$ и $\mathbf{V} = F\mathbf{i} - F\mathbf{k}$, където $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ са единичните вектори по осите на координатната система.

Проекции на главния момент по осите x, y, z на координатната система:

$$m_x^{(O)} = \sum_{i=1}^{2} m_x(\mathbf{F}_i) = 0$$

$$m_y^{(O)} = \sum_{i=1}^{2} m_y(\mathbf{F}_i) = 0$$

$$m_z^{(O)} = \sum_{i=1}^{2} m_z(\mathbf{F}_i) = -Fa$$

Или $m^{(O)} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = Fa$ и $\mathbf{m^{(O)}} = -Fa\mathbf{k}$. Главният вектор и главният момент са не перпендикулярни – скаларното им произведение е $\mathbf{V}\,\mathbf{m^{(O)}} = F^2 a \neq 0$, т.е. те могат да се приведат към силов винт (фиг.3,б и 3,в).

Съгласно (12) може да се запише уравнението на централната ос

$$\frac{y}{1} = \frac{-z-x}{0} = \frac{a-y}{1},$$

откъдето $y = \dfrac{a}{2}$, $z = -x$, т.е. централната ос лежи в равнина, успоредна на координатната равнина ($x\ z$) и се намира на разстояние $\dfrac{a}{2}$ от нея, като е успоредна на ъглополовящата MN (фиг.2,в).

Остава да се определи главният момент по направлението на централната ос. Съгласно (8) се получава:

$$\mathbf{m}^{(O)} \frac{\mathbf{V}}{V} = \frac{1}{V}(m_x^{(O)} V_x + m_y^{(O)} V_y + m_z^{(O)} V_z) = \frac{Fa\sqrt{2}}{2}.$$

Изходната система сили се оказва еквивалентна на силов винт, т.е. към сила $\mathbf{V} = F\mathbf{i} - F\mathbf{k}$ и двоица сили, чиято равнина е перпендикулярна на $\mathbf{V}$. Моментът на тази двоица (по направление на $\mathbf{V}$) се явява минималният момент, който е равен на $\dfrac{Fa\sqrt{2}}{2}$.

На фиг.3,г е илюстриран подходът, показан в края на предишния пример. За център на привеждане е избрана точка А – приложната точка на F_2. В нея се построяват две уравновесяващи се сили F_1 и F_1'. Намира се векторната сума $\mathbf{V}$ на F_1 и F_2, която по големина е $V = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = F\sqrt{2}$, а посоката ѝ е по MN. В резултат на привеждането в точка А наред с F_1 се появява присъединена двоица сили (F_1-приложена в точка О, и F_1' - приложена в точка А); рамото на двоицата е a. Тъй като присъединената двоица лежи в равнината ($y\ z$), то нейният момент – явяващ се главен момент $\mathbf{m}_A$, е перпендикулярен на равнината ($y\ z$), т.е. успореден на оста x и има големина Fa. Разлага се $\mathbf{m}_A$ на два вектора – един вектор $\mathbf{m}$ по направление на $\mathbf{V}$ и един вектор $\mathbf{m}_1$, перпендикулярен на него, т.е.

$\mathbf{m}_A = \mathbf{m} + \mathbf{m}_1$. От фиг.3,г се вижда, че $m_1 = m = m_A \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{Fa\sqrt{2}}{2}$. На $\mathbf{m}_1$ съответства двоица, чиято сила е означена с $\mathbf{V}'$ и е насочена така, че да уравновесява силата $\mathbf{V}$. Тогава рамото AB на двоицата е разположено по оста y, като $AB = \dfrac{m_1}{V} = \dfrac{a}{2}$.

Системата сили се оказва еквивалентна на три сили: V', V - приложени в точка A; V - приложена в точка B, и момент $\mathbf{m}$, който може успоредно да се пренесе, докото съвпадне с линията на действие на V (както и да се пренася по протежение на тази линия на действие). Първите две се уравновесяват. Линията на действие на V - приложена в точка B, се явява централната ос на винта, успоредна на ъглополовящата MN. Окончателно $V = F\sqrt{2}$ и $m = \dfrac{Fa\sqrt{2}}{2}$, което е същият резултат, получен с общия подход.