ЛЕКЦИЯ 12

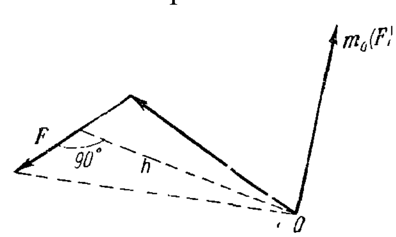
Аналитична механика

Съдържание

1. Момент на сила относно точка.
2. Двоица сили. Свойства. Събиране на двоици сили.
3. Привеждане на пространствена несходяща съвкупност от сили към една двоица.
4. Главен вектор и главен момент на съвкупност от сили.
5. Уравнения на равновесие на твърдо тяло под действие на несходящи сили.
6. Равновесие на твърдо тяло с две закрепени точки.

1. Момент на сила относно точка.

- две основни понятия в статиката (исторически – учение на Архимед за равновесие при лостове)
  - момент на сила относно точка
  - момент на сила относно ос
- Архимед: моментът на сила относно точка се свързва с равнина, определена от линията на действието на силата и самата точка (център на момента); характеризира се с алгебрична величина – произведението на големината на силата и разстоянието от центъра на момента до линията на действието на силата
- моментът $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ на силата $\mathbf{F}$ относно точката O се дефинира като *вектор*, приложен в точката O, равен по големина на произведението на големината на силата $\mathbf{F}$ и разстоянието h от центъра на момента до линията на действието на силата (рамо на силата) и имащ направление, перпендикулярно на равнина, определена от линията на действието на силата и центъра на момента. Посоката на вектора е такава, че завъртането на тяло, към което е приложена силата, е положително.



фиг.1

- дефиниция за положително завъртане: завъртане на оста Ox на ъгъл $\frac{\pi}{2}$ към оста Oy, гледано срещу положителната посока на оста Oz. За дясна система – завъртане срещу часовниковата стрелка; за лява – по часовниковата стрелка.
  - такава дефиниция за положително завъртане води до единно за двете координатни системи (лява или дясна) понятие за вектора на момента на сила относно точка
  - за десни системи: правило на винта, завиващ се в даден материал
  - истински вектори (сила, скорост, ускорение) – нито по големина, нито по посока зависят от координатната система, *с чиято помощ аналитично са изразени*; за вектора $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ това не е в сила – при преход от лява към дясна система или обратно, той не изменя големината си, но посоката се обръща. Такива вектори се наричат *псевдовектори* – още например ъгловата скорост, ъгловото ускорение.
- интерпретация на големината на $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ (фиг.1) – удвоено лице на триъгълник с връх центъра на момента и основа – големината на силата
  - или лице на успоредник със страни самата сила и отсечката, съединяваща центъра на момента и приложната точка, така че

$$\left|\mathbf{m}_O(\mathbf{F})\right| = Fr\sin\alpha\,, \tag{1}$$

    където α е ъгълът между F и r.
- при ненулева сила моментът относно точка е нула, когато линията на действие на тази сила минава през центъра на момента
- определение: моментът $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$ на силата $\mathbf{F}$ относно център О е *вектор*, равен на векторното произведение

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F}\ , \tag{2}$$

  където $\mathbf{r}$ е радиус-векторът на приложната точка на силата относно центъра на момента
  - размерност: кгм (техническа система); Nm = J (система SI)
    1 кгм = 9.81 Nm =9.81 J
- теорема на Вариньон: Моментът на равнодействащата на пространствена съвкупност от сходящи сили относно произволна точка е равен на векторната сума от моментите на тези сили относно същата точка
  Нека $\mathbf{F}_i \ \ (i = 1,2,...n)$ е сходяща съвкупност сили, чиито линии на действие се пресичат в точка А. За равнодействащата $\mathbf{R}$, приложена също в точка А, е в сила $\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{....} + \mathbf{F_n} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F_i}$.

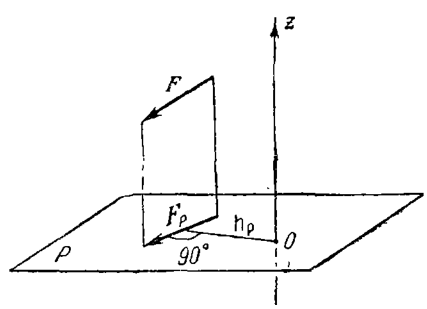
Нека O е произволна точка, спрямо която A има радиус-вектор $\mathbf{r}$. Тогава

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{R}) = \mathbf{r}\times\mathbf{R} = \mathbf{r}\times(\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}+....+\mathbf{F_n}) =$$

$$= (\mathbf{r}\times\mathbf{F_1}) + (\mathbf{r}\times\mathbf{F_2}) + ... + (\mathbf{r}\times\mathbf{F_n}) = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_2) + \ldots\ldots + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_n) \qquad (3)$$

- теоремата е вярна само за сходящи сили; обобщава се и за сили с успоредни линии на действие, като се счита пресечната им точка за безкрайно отдалечена
- удобството на теоремата се състои във факта, че за определяне на момента на равнодействащата сила не е нужно да се определи първо самата тя; достатъчно е да са известни моментите на силите, участващи в разглежданата сходяща система сили
- за несходяща система (равнодействаща няма смисъл) се въвежда понятието *главен вектор*

• проекции на вектора момент на сила по осите на координатна система: смисъл на *момент на сила относно ос*
  - съставяща на вектор в дадена равнина: ортогоналната проекция на вектора в тази равнина (фиг.2)
  - моментът на тази проекция относно център, избран в равнината, е равен на момент относно ос през центъра и перпендикулярен на равнината; ако тази ос се избере за ос z, то означението е $m_z(\mathbf{F})$
  - моментът относно ос е нула в два случая: линията на действие на силата пресича оста или линията на действие на силата е успоредна на оста, т.е. силата и оста лежат в една равнина
  - <u>*проекцията на вектора момент на сила относно точка върху ос, минаваща през тази точка, е равна на момента на силата спрямо тази ос*</u>



фиг.2

• аналитично представяне на момент на сила относно координатните оси
  - нека $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$ има координати на приложната си точка (x, y, z);

тогава са еквивалентни означенията $m_{Ox}(\mathbf{F}) = m_x(\mathbf{F}) = (\mathbf{r}\times\mathbf{F})_x \qquad (4)$

  - или

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(yF_z - zF_y) + \mathbf{j}\,(zF_x - xF_z) + \mathbf{k}\,(xF_y - yF_x)$$

$$= m_x\mathbf{i} + m_y\mathbf{j} + m_z\mathbf{k} \qquad (5)$$

- изразяване на проекциите (5) чрез компонентите $(\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{F_3})$ на $\mathbf{F}$ по координатните оси: от теоремата на Вариньон за сходящи сили

$$m_x(\mathbf{F}) = m_{Ox}(\mathbf{F}) = m_{Ox}(\mathbf{F}_1) + m_{Ox}(\mathbf{F}_2) + m_{Ox}(\mathbf{F}_3) =$$
$$= m_x(\mathbf{F}_1) + m_x(\mathbf{F}_2) + m_x(\mathbf{F}_3) = 0 - zF_y + yF_z = yF_z - zF_y$$

- момент на сила относно ос с произволно направление
  нека OL – произволна ос, минаваща през началото O на координатна система и $\mathbf{l}$ - единичен вектор по нея с директорни косинуси

  $$l_x = \cos\alpha, \qquad l_y = \cos\beta, \qquad l_z = \cos\gamma$$

  Ако δ е ъгъл между оста и вектора $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$, то

  $$m_L(\mathbf{F}) = |\mathbf{m}_O(\mathbf{F})|\cos\delta = \mathbf{l}\,\mathbf{m}_O(\mathbf{F}) \qquad (6)$$

  или

  $$m_L(\mathbf{F}) = m_{Ox}(\mathbf{F})\cos\alpha + m_{Oy}(\mathbf{F})\cos\beta + m_{Oz}(\mathbf{F})\cos\gamma =$$
  $$= m_x(\mathbf{F})\cos\alpha + m_y(\mathbf{F})\cos\beta + m_z(\mathbf{F})\cos\gamma =$$
  $$= (yF_z - zF_y)\cos\alpha + (zF_x - xF_z)\cos\beta + (xF_y - yF_x)\cos\gamma \qquad (7)$$

  чрез детерминанта:

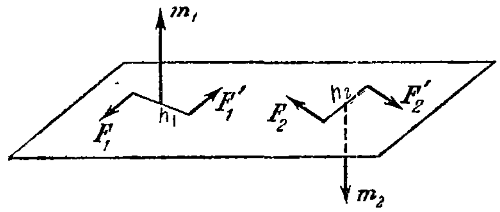
  $$m_L(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (8)$$

2. Двоица сили. Свойства. Събиране на двоици сили.

- определение: *двоица сили* – съвкупност от две равни по големина сили, имащи успоредни линии на действие и противоположни посоки.
- равнина на двоицата – равнината, определена от линиите на действие на двете сили
- момент на двоица сили: нека $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, за които $\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$, е двоица сили, имащи радиус-вектори $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$ на приложните си точки A и B
  - за сумата на моментите на силите относно произволен център в равнината им:

    $$\mathbf{m}_O(\mathbf{P}) + \mathbf{m}_O(\mathbf{Q}) = \mathbf{r}\times P + \mathbf{r}_1\times\mathbf{Q} = \mathbf{r}\times\mathbf{P} - \mathbf{r}_1\times\mathbf{P} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\times\mathbf{P} = \mathbf{m} \qquad (9)$$
  - векторът $\mathbf{m}$ не зависи от избора на центъра, а само от вектора $\overrightarrow{BA} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$, определящ взаимното разположение на точките A и B

<u>определение:</u> момент на двоица сили е векторът $\mathbf{m}$, който има големина $m = P|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|\sin\alpha = Ph$, където α е ъгълът между векторите $\mathbf{P}$ и $\overrightarrow{BA} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$, а h е разстоянието между линиите на действие на силите (рамо на двоицата) – фиг.3



фиг.3

направление на $\mathbf{m}$ - перпендикулярен на равнината на двоицата; посока – съгласно правилото на винта

- *моментът на двоица сили напълно определя статичното действие на двоицата върху твърдо тяло*
- теорема: две двоици с равни по големина, направление и посока моменти, са статично еквивалентни
  - една двоица може да се завърти на произволен ъгъл в равнината си, без да се нарушава нейното действие върху твърдо тяло
  - действието на двоица не се изменя, ако се изменят големината на нейните сили и дължината на рамото, но произведението (големината на момента) им не се измени
  - равнината на двоицата може да се замени с произволна, но успоредна на нея равнина, без това да нарушава нейното действие върху тялото
- *моментът на двоица сили напълно определя статичното действие на двоицата върху твърдо тяло; той няма приложна точка, нито линия на действие – задава се само чрез големината, направлението и посоката си: има характеристиката на <u>свободен вектор</u>*
- теорема за събиране на двоици

  Съвкупност от двоици сили, произволно разположени в пространството, е статически еквивалентна на една двоица с момент, равен на векторната сума на моментите на събираемите двоици.

  Нека ($\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1$) и ($\mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_2$) са две двоици съответно с моменти $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$, като равнините им не са успоредни. Нека LL_1 е пресечницата на тези равнини, като по нея отбележим АВ – едно и също рамо за двете двоици (евентуално след изменение на големините на силите, като произведението им с рамото съответно си остава $|\mathbf{m}_1|$ и $|\mathbf{m}_2|$). Тогава силите $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ са приложени в точка А, а $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ - в точка В. Нека равнодействащата на $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ е означена с $\mathbf{R}$, а на $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ - с $\mathbf{R}'$. Съгласно теоремата на Вариньон (моментите на $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ относно произволен център О ще са равни на сумата от моментите на съставящите ги сили):

$$\mathbf{m}_O(\mathbf{R}) = \mathbf{m}_O(\mathbf{P}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{P}_2),\ \mathbf{m}_O(\mathbf{R}') = \mathbf{m}_O(\mathbf{Q}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{Q}_2) \qquad (10)$$

Но моментът $\mathbf{m}$ на равнодействащата двоица $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ съгласно (9) е:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_O(\mathbf{R}) + \mathbf{m}_O(\mathbf{R}') = \mathbf{m}_O(\mathbf{P}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{Q}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{P}_2) + \mathbf{m}_O(\mathbf{Q}_2) = \mathbf{m_1} + \mathbf{m}_2 \qquad (11)$$

При случая на успоредни равнини на двоиците векторното събиране на моментите е по-просто; те са по една права с еднакви или противоположни посоки. При повече двоици моментите им се събират по правилото на векторния многоъгълник.

3. **Привеждане на пространствена несходяща съвкупност от сили към една двоица. Метод на Пуансо.**

- нека към твърдо тяло е приложена пространствена несходяща система сили $\mathbf{F}_i\ (i = 1,2,...n)$, приложени съответно в точки $A_i\ (i = 1,2,...n)$
- произволно се избира точка О за център на привеждането (в тялото или твърдо свързана с него точка, ако тя не принадлежи на тялото)
- пренасяне на силите в точка О:

  за $\mathbf{F_1}$: в точка О се построяват две сили $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_1''$, които взаимно се уравновесяват (всяка с големината на $\mathbf{F_1}$ и успоредни на нейното направление, но с различни посоки)

  Силата $\mathbf{F}_1'$ се разглежда като пренесена от точка A_1 в О, а останалите сили $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F}_1''$, които са успоредни, но с противоположни посоки – като *присъединена двоица* с момент $\mathbf{m}_1$
- аналогично се постъпва с всички останали сили
- резултат: произволна пространствена несходяща система сили $\mathbf{F}_i$ $(i = 1,2,...n)$ се привежда към еквивалентна сходяща система сили $\mathbf{F}_i'$ $(i = 1,2,...n)$ и съвкупност от двоици с моменти $\mathbf{m}_i\ (i = 1,2,...n)$, които се явяват свободни вектори.
- сходящата система сили $\mathbf{F}_i'\ (i = 1,2,...n)$ е еквивалентна на една сила $\mathbf{V}$,

  $$\mathbf{V} = \mathbf{F_1'} + \mathbf{F_2'} + ... + \mathbf{F_n'} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F_i'},$$

  която е една и съща от гледна точка на построяване на силов многоъгълник като сумата

  $$\mathbf{V} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + ... + \mathbf{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F_i} \qquad (12)$$

4. Главен вектор и главен момент на съвкупност от сили.

- за $\mathbf{F}_i \quad (i = 1,2,...n)$ тяхната векторна сума се нарича *главен вектор*
- *главният вектор на съвкупност от сили* $\mathbf{F}_i \quad (i = 1,2,...n)$ *не е тяхна равнодействаща, т.е. не може да замени тяхното действие; главният вектор* $\mathbf{V}$ *е равнодействаща на силите* $\mathbf{F}_i' \quad (i = 1,2,...n)$, *докато в общия случай силите* $\mathbf{F}_i \quad (i = 1,2,...n)$ *може да са приложени към различни тела и понятието равнодействаща няма смисъл*
- съвкупността от присъединени двоици с моменти $\mathbf{m}_i \quad (i = 1,2,...n)$ има за еквивалентна една двоица с момент

$$\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i \tag{13}$$

- отчитайки, че моментът на една двоица сили е равен на сумата на моментите на влизащите в двоицата сили относно произволна точка (център на привеждане), то:

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1'') = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1)\text{, т.е. } \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1'') = \mathbf{0}\,,$$

  защото линията на действие на $\mathbf{F}_1''$ минава през точката O

  или: *моментът на присъединената двоица е равен на момента на приложената към тялото сила относно избрания център на привеждане*
- аналогично: $$\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_2)\,,......., \ \mathbf{m}_n = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_n) \tag{14}$$

  тогава $$\mathbf{m} = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_2) + ... + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_n) \tag{15}$$
- определение: *главен момент* на съвкупност от сили (относно произволно избран център на привеждане) е векторната сума от моментите на приложените към тялото сили относно избрания център на привеждане
  - означение: $\mathbf{m}^{(O)}$ - главен момент относно център на привеждане O
- обща теорема на статиката на абсолютно твърдо тяло

  Произволна пространствена несходяща система сили, действаща на абсолютно твърдо тяло, е статически еквивалентна на една сила – главния вектор, приложен в произволно избрана точка от тялото (център на привеждането), и една двоица с момент, равен на главния момент на силите относно центъра на привеждането.

  аналитично представяне
  - главен вектор: чрез проекциите си върху осите на избрана координатна система $\mathbf{V} = \mathbf{V}\,(V_x, V_y, V_z)$
  - главен момент относно началото $\mathbf{m}^{(O)}$: чрез проекциите $m_x^{(O)}, m_y^{(O)}$, $m_z^{(O)}$, които са равни съответно на

$$m_x^{(O)} = \sum_{i=1}^{n} m_{Ox}(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_i)$$

$$m_y^{(O)} = \sum_{i=1}^{n} m_{Oy}(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_i) \qquad (16)$$

$$m_z^{(O)} = \sum_{i=1}^{n} m_{Oz}(\mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\mathbf{F}_i)$$

- главен момент на съвкупност от сили относно ос: алгебричната сума от моментите на всички сили от съвкупността относно тази ос

означение: $\mathbf{m} = \mathbf{m}\,(m_x, m_y, m_z)$, където $m_x^{(O)} = m_x$, $m_y^{(O)} = m_y$, $m_z^{(O)} = m_z$ (17)

- аналитични изрази за главните моменти на съвкупност от сили относно координатните оси:

  $$m_x = \sum_{i=1}^{n}(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}),\; m_y = \sum_{i=1}^{n}(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}),\; m_z = \sum_{i=1}^{n}(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}), \quad (18)$$

  където $\left(F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}\right)$ са проекциите на силата $\mathbf{F}_i$, а (x_i, y_i, z_i) са координатите на приложната ѝ точка

5. Уравнения на равновесие на твърдо тяло под действие на несходящи сили.

- равновесие на тяло: относителен покой в дадена координатна система - за разлика от движение по инерция в отсъствие на външни сили и двоици
- условия за равновесие на твърдо тяло: равенство на нула (в смисъл на нулев вектор) на главния вектор и главния момент на приложените сили към тялото

  $$\mathbf{V} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{m}^{(O)} = \mathbf{0} \qquad (19)$$

  или:

  $$\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \dots + \mathbf{F_n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_1) + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_2) + \dots + \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_n) = \mathbf{0} \qquad (20)$$

- *условията (20) – необходими и достатъчни условия за равновесие на свободно твърдо тяло под действие на съвкупност от сили, произволно разположени в пространството*
- записване на векторните уравнения (20) като 6 алгебрични уравнения – проектиране по осите на произволно избрана координатна система (отчитайки, че проекцията на момент върху ос е всъщност моментът относно тази ос)

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$$

$$F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$

(21)

$$m_x(\mathbf{F}_1) + m_x(\mathbf{F}_2) + ... + m_x(\mathbf{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_i) = 0$$

$$m_y(\mathbf{F}_1) + m_y(\mathbf{F}_2) + ... + m_y(\mathbf{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_i) = 0$$

$$m_z(\mathbf{F}_1) + m_z(\mathbf{F}_2) + ... + m_z(\mathbf{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} m_z(\mathbf{F}_i) = 0$$

- *при равновесие на свободно твърдо тяло под действие на съвкупност от сили, произволно разположени в пространството, сумите от проекциите на силите върху координатните оси и сумите от моментите на силите относно координатните оси са равни на нула*
- частни случаи:
  1. Сходяща съвкупност от сили: при избор на пресечната точка на линиите на действие на силите за център на привеждане, последните три уравнения на (21) се обръщат в нули – линиите на действие пресичат координатните оси.
  2. Равнинна съвкупност от сили: нека за определеност направлението, перпендикулярно на равнината на силите, се означи като ос z. Тъждествено се обръщат в нули левите части на третото уравнение на (21) – няма проекции по оста z, както четвъртото и петото уравнение на (21) - линиите на действие на силите пресичат осите на моментите x и y или са успоредни на тях.
  3. Съвкупност от успоредни сили: нека за определеност направлението на успоредните сили се означи като ос z. По останалите оси проекции няма – първите две уравнения на (21) тъждектвено са нули, както и последното – силите са успоредни на оста z и по нея няма моменти.
- в общия случай на произволна пространствена система задачата е статически определена, ако броят на неизвестните не превишава 6
- случаи на различен тип закрепване на тяло и съответния брой неизвестни
  - неподвижно закрепване на точка от тяло (сферичен шарнир): реакцията влиза с трите си проекции по трите оси в уравненията на равновесие
  - реакция на опора, допускаща свободно преместване по протежение на някоя ос (цилиндричен шарнир): реакцията е перпендикулярна на тази ос и в уравненията влизат две неизвестни нейни проекции

- при съприкосновение на две гладки тела: реакцията е по общата им нормала; в уравненията влиза една неизвестна проекция по тази нормала

Пример: Неподвижно закрепване на тяло чрез 3 точки, нележащи на една права – например чрез сферичен шарнир във всяка точка. Неизвестните реакции са общо 9 и задачата става неопределена статически. За да стане определена, една точка е неподвижна – 3 неизвестни реакции; втората може да се движи по дадено направление – 2 неизвестни реакции (перпендикулярни на това направление), а третата точка се опира на гладка равнина – една неизвестна реакция по нормалата. Този метод се прилага в строителството, установка на физични прибори или геодезични инструменти. Обезпечава неподвижност на положението, но също така има възможност и за „движение“ – например температурно разширение. Пример: Неподвижно закрепване на тяло чрез 6 неразтяжими пръта, шарнирно свързани с тялото и с опората. Тук е съществен въпросът за избор на координатни оси – ако е възможно системата (21) да се разпадне на независими подсистеми, в които влизат част от неизвестните. Доказва се, че тяло може да се закрепи на 6 пръта, като реакциите могат да се определят от три системи, във всяка от които влизат само две неизвестни.

- не е задължително да се използват всичките 6 уравнения на (21) – трябва да се прави „удачен“ избор на осите, по които се проектират неизвестните реакции; както и осите, за които се съставят уравненията на моментите – така че в тях да влизат най-малко неизвестни

6. **Равновесие на твърдо тяло с две закрепени точки.**

- нека O и O' са две закрепени точки – тялото може да се върти около оста $O\,O'$; нека реакциите по координатните оси съответно за точките са означени с N_1, N_2, N_3 и N_1', N_2', N_3'. Задачата е статично неопределена; в уравнението за моментите относно оста $O\,O'$, избрана за ос z, реакциите, пресичащи тази ос, не влизат и за 6-те неизвестни има само 5 уравнения. Нека $\mathbf{F}_i \quad (i = 1,2,...n)$ са зададените сили, приложени към тялото. Уравненията на проекциите са

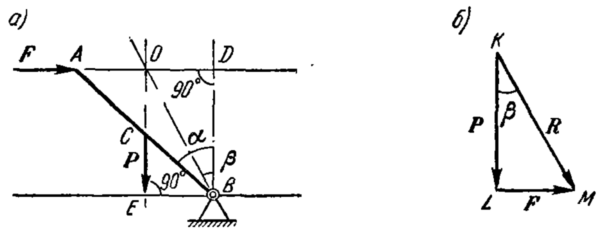
$$N_1 + N_1' + \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \quad N_2 + N_2' + \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \quad N_3 + N_3' + \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \qquad (22)$$

В уравненията на моментите относно осите x и y влизат само N_2' и N_1'; (N_3' е по оста z, т.е. пресича осите x и y). Ако $O\,O' = h$, то:

$$-hN_2' + \sum_{i=1}^{n} m_x(\mathbf{F}_i) = 0, \qquad hN_1' + \sum_{i=1}^{n} m_y(\mathbf{F}_i) = 0 \qquad (23)$$

Уравнението на моментите относно оста z не съдържа реакции; то изразява условието, налагано на силите, което обезпечава равновесието на тялото. От уравненията (23) и първите две на (22) се определят N_1, N_2, N_1' и N_2'. За N_3 и N_3' остава само последното уравнение на (22), от което се определя сумата на тези реакции; поотделно намирането им е невъзможно. Статичната неопределеност се отстранява, като точката O' може да се „движи“ по оста z, т.е. $N_3' = 0$ и N_3 може да се определи.

Пример. Хомогенен лост с тегло P може да се върти около неподвижно закрепен към пода шарнир B (фиг.4). Да се определи големината на сила F, която да се приложи хоризонтално в края A на лоста, така че той да е в равновесие, сключвайки ъгъл α с вертикалата.



фиг. 4.

Към лоста са приложени две активни сили P е F, чиито линии на действие се пресичат в точка O. Единствената връзка, наложена на лоста, е шарнирът B. Линията на действие на реакцията N на шарнира трябва да минава през точката O - съгласно теоремата за трите сили, като сключва ъгъл β с вертикалата. Отчитайки, че теглото P е приложено в средата C на лоста, следва, че AC=BC и AO =OD. Или

$$tg\,\alpha = \frac{AD}{DB} = \frac{2OD}{DB}, \quad tg\,\beta = \frac{OD}{DB} \text{ , т.е. } \quad tg\,\beta = \frac{1}{2} tg\,\alpha \,.$$

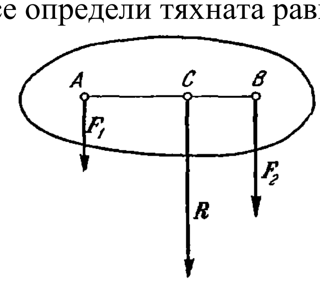
От силовия многоъгълник – в случая триъгълника KLM, се определя и условието за равновесие: $F = \frac{P}{2} tg\,\alpha$. Ако $F > \frac{P}{2} tg\,\alpha$, то лостът ще се завърти около B по часовниковата стрелка; при $F < \frac{P}{2} tg\,\alpha$ той ще се завърти около B срещу часовниковата стрелка.

Сравнение – чрез условието за равновесие, изразено чрез моментите на силите относно B:

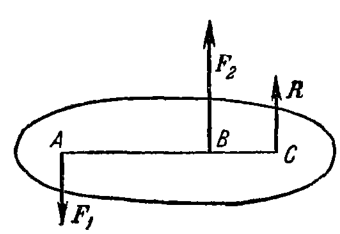
$$\mathbf{m}_B(\mathbf{P}) + \mathbf{m}_B(\mathbf{F}) = \mathbf{0} \text{ , т.е.}$$

$$\frac{1}{2} P.AB \sin\alpha \text{ - } F.AB\cos\alpha = 0 \text{, т.е. отново се получава } F = \frac{P}{2} tg\,\alpha \,.$$

Пример. На фиг. 5а и фиг. 5б са показани сили с успоредни линии на действие. Да се определи тяхната равнодействаща.



фиг. 5а



фиг. 5б

Понятието равнодействаща в този случай се обобщава, считайки пресечната точка на линиите на действие на силите за безкрайно отдалечена.

Тогава ако за определеност $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$, то

$$R = F_1 + F_2 \qquad \text{и} \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}$$ (С дели вътрешно АВ) - фиг. 5а

$$R = F_2 - F_1 \qquad \text{и} \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}$$ (С дели външно АВ) - фиг. 5б

При $|\mathbf{F}_2| = |\mathbf{F}_1|$ и посоките на силите са противоположни – те образуват двоица.