

ЛЕКЦИЯ 10

Аналитична механика

Съдържание

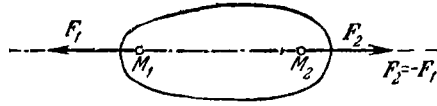
1. Общи сведения за силите.
2. Действие и противодействие.
3. Метод на сеченията.
4. Опорни реакции.
5. Видове прости опори.

1. Общи сведения за силите.

- силата – модел на механичното взаимодействие
ежедневен опит: механично взаимодействие на материалните тела помежду им или с физични полета – гравитационно, на привличане, електромагнитно
- мерни единици: килограм (в техническа система); нютон (в система SI), като $1 \text{ кг} = 9.81 \text{ N}$
- Нютон – три закона:
 - за инерцията: изолирана материална точка или се намира в покой, или се движи равномерно и праволинейно. Под състояние на равновесие на точка или тяло се разбира не само покой, но и движение по инерция
 - за зависимост на силата от ускорението
 - за действието и противодействието
 - четвърти закон: за всемирното привличане – само количествен израз
- модел на силата (Нютон, “Математически основи на философията,,)
 - величина (големина, интензивност)
 - направление на действието
 - приложна точка

- Математическа интерпретация на този модел: **вектор**
- основни постановки:
 - равни сили: равни по големина, с еднакво направление и една и съща приложна точка, т.е. *могат да се заменят една с друга*
 - това сравнение не е във всяко отношение (тъждество), а само в смисъла на избраните за сравнение параметри
 - на две равни сили съответстват „тъждествени“ в геометричен смисъл вектори
 - съвкупността от няколко сили, приложени в една и съща точка, може да се замени с една сила - *равнодействаща*
 - обратно: всяка сила може да бъде разложена на съвкупност от сили, приложени в една и съща точка
- *статически еквивалентни* съвкупности от сили: при замяна на едната съвкупност от сили с другата, покоят (равновесието) на едно тяло или система от тела, към което са приложени, *не се изменя*
- *сходяща* система от сили: приложени в една точка
- правило за събиране на сили: *силов многоъгълник* (както събиране на вектори)
- деформируемост на телата
 - физично свойство: изменение на тяхната форма
 - величината на това изменение зависи от различни условия: от материала на телата, формата им, големината и посоката на приложените към тях сили
 - в техническите задачи: въпрос за ограничаване или оценка на възможните деформации; приближен модел – недеформируеми тела
- абсолютно твърдо тяло: абстракция – система от точки, чието взаимно разположение остава неизменно
- свободно тяло: не е подложено на никакви въздействия от други тела или полета, освен включените в разглеждането като зададени
- основно свойство на модела на абсолютно твърдо тяло:

Едно свободно абсолютно твърдо тяло под действие на две сили ще се намира в равновесие само в случая, когато тези сили са равни по големина, имат една линия на действие (права) и имат противоположни посоки.



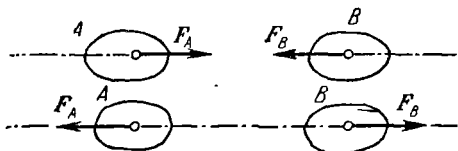
фиг.1.

- Твърдение:
Приложената точка на една сила може да изменя положението си върху правата (линията на действие), по която е насочена силата, без това да нарушава равновесието на дадено твърдо тяло
Векторите, интерпретиращи силите, губят свойството си на свързани вектори – с фиксирана приложна точка, а се обобщават като **хлъзгащи вектори**.
- характеристика на силата в статиката на абсолютно твърдо тяло
 - големина (интензивност)
 - линия на действие
 - посока (по линията на действие)
- принцип на втвърдяването
 - ако едно деформируемо тяло е в равновесие, то равновесието не се нарушава, ако тялото или отделни негови части се заменят със съответни твърди тела
 - друга формулировка: в условията за равновесие на деформируемо тяло се включват и тези условия за равновесие, които се отнасят за абсолютно твърдо тяло, което може да се разглежда като получено от деформируемото изходно тяло чрез неговото втвърдяване
 - условията за равновесие на твърда система тела са *необходими*, но не и достатъчни условия за равновесие на деформируема система
 - значение: позволява решаване на прости задачи от статиката на деформируеми тела – нишки, ремъци, вериги, чрез методите на статиката на твърдо тяло

2. Действие и противодействие.

- Разглежда се взаимодействие на две материални точки А и В. Ако се счита, че В *действа* на А, то се казва, че А *противодейства* на В.

- Двете сили – на действие и противодействие, имат равни големина, обща линия на действие и са противоположни по посока (трети закон на Нютон)
- Тези сили не се уравновесяват, защото са приложени в различни материални точки



фиг.2.

- В природата не съществува едностранно действие на сили – материалните тела могат само да си взаимодействат, т.е. броят на силите на взаимодействие е винаги четен
- ако се разглежда въпросът за равновесие на дадено тяло, трябва да се разграничават силите, приложени към тялото – за разлика от противодействията, които това тяло причинява на другите тела, с които взаимодейства и които предизвикват *действието* върху това тяло

3. Метод на сеченията.

- при изучаване на условията за равновесие на дадено тяло то мислено се отделя от общото множество взаимодействащи си тела, като самото тяло се разглежда като свободно; цялото внимание се съсредоточава върху силите, приложени към разглежданото тяло
- този метод се нарича метод на сеченията, когато става въпрос за определяне на вътрешни сили в случая на непрекъснати системи; в общия случай вместо една сила се разглежда система от *напрежения*
- Пример:
необходимо е да се определи вътрешната сила в произволна точка С на обтегната нишка (или прът) с краища А и В. Отделя се частта АС от тялото АВ, като действието на СВ върху АС се заменя със силата T_C , която представлява обтягането в точката С.

4. Опорни реакции.

- принцип на освобождаването

При изучаване на равновесието на дадено тяло то може да се разглежда като свободно, след като се включат всички въздействия върху него от страна на окръжаващите го тела.

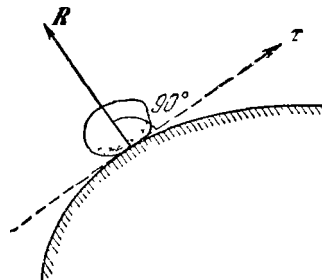
Този принцип се обобщава в динамиката.

- дефиниция:

- *връзки*: тела, ограничаващи свободата на движение на дадено тяло
- *реакции на връзките*: въздействията върху тялото, произтичащи от връзките
- *активни сили*: които не са реакции на връзки

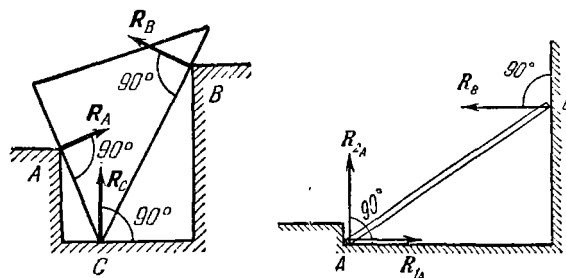
- гладки повърхности – силата на триене е малка и може да се пренебрегне

При идеално гладки повърхности опората се характеризира само с *нормална реакция* – насочена по общата нормала на допиращите се повърхности.



фиг.3.

- когато нормалата не е определена за едната повърхност, за *нормална реакция* се взема тази, която е определена по нормалата за другата (фиг. 4) - когато за другата повърхност нормалата може да се определи:



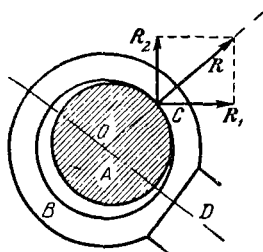
фиг. 4

- когато нормалата не е определена и за двете повърхности, реакцията се разглежда в общ вид – имаща компоненти по различни направления в зависимост от задачата, заедно с момент, породен от двоица сили

5. Видове прости опори.

- цилиндричен шарнир

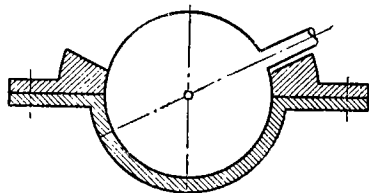
Реакцията на опората е неопределена; допирните точки на повърхностите са различни в различни моменти. Може само да се твърди, че реакцията на опората е в равнина, перпендикулярна на оста на цилиндъра; при пренебрегване на триенето реакцията пресича оста на цилиндъра (фиг.5).



фиг.5

- сферичен шарнир

Реакцията на опората е неопределена; допирните точки на повърхностите са различни в различни моменти. Реакцията на опората при пренебрегване на триенето минава през центъра на сферата (фиг.6).

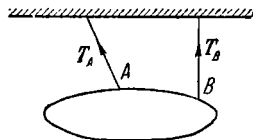


фиг.6

- опори, осъществявани чрез междинни тела

Подпори или окачване на нишки (въжета, вериги).

В първия случай реакциите имат линия на действие, минаваща през точките, в които се осъществява подпирането; във втория – по линията между точките на окачване (фиг.7).

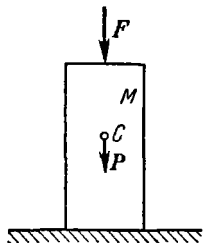


фиг.7

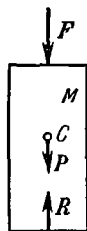
Примери.

1. Хомогенен цилиндър M , чието тегло е $P=20$ кг, лежи на гладка хоризонтална равнина. Върху него е приложена вертикална сила $F=50$ кг, чиято линия на действие минава през центъра на тежестта на цилиндъра. Да се определи силата, с която цилиндърът действа върху равнината.

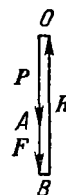
Цилиндърът се намира в равновесие, като на него му действат две активни сили: теглото P и вертикалната сила F . Теглото е приложено в центъра на тежестта C на цилиндъра и има направление по вертикалата надолу. Вертикалната сила съвпада по направление с теглото на цилиндъра – фиг.8а.



Фиг.8а



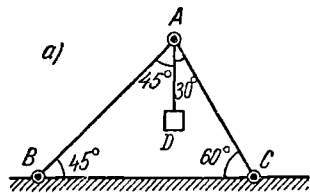
Фиг.8б



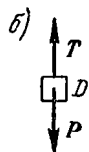
Фиг.8в

На цилиндъра е наложена една връзка - гладката хоризонтална равнина, която възпрепятства преместването на цилиндъра по вертикалата надолу. Съгласно правилото за освобождаване от връзките, действието на хоризонталната равнина върху цилиндъра може да се замени със съответната реакция R – фиг.8б. Така несвободното тяло може да се разглежда като свободно, към което са приложени три сили – две активни и една реакция, като и трите лежат върху една права, т.е. и върховете на силовия многоъгълник са върху тази права - фиг.8в. Изобразява се вектор, равен на силата P , като началото му нека е произволна точка O . От края му – от точка A , се изобразява вектор, равен на силата F . От неговия край – точка B , се изобразява вектор, равен на силата R . Тъй като при равновесие на твърдото тяло сумата от приложените към него сили трябва да бъде равна на нула, то краят на вектора R трябва да съвпада с точката O , т.е. с началото на вектора на първата сила P . Тогава $R=P+F=70$ кг. Силата, с която цилиндърът действа върху равнината, е равна на големината на реакцията R и е насочена противоположно на нея, т.е. по вертикалата надолу.

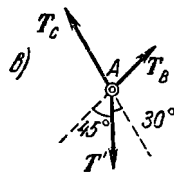
2. Два абсолютно твърди пръта AB и AC са съединени шарнирно в точка A и са закрепени към пода с шарнири B и C , образуващи с него съответно ъгли 45° и 60° (фиг.9а). В точка A на неразтяжима нишка е окачен товар D с тегло $P=100$ кг. Да се определят силите, действащи в прътите AB и AC , като теглото им се пренебрегне.



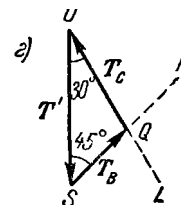
Фиг.9а



Фиг.9б



Фиг.9в



Фиг.9г

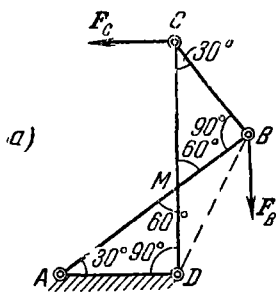
За определяне на силите, действащи в прътите AB и AC , трябва да се определи равновесието на шарнира A . Но непосредствено това е невъзможно, тъй като той е в

равновесие под действие на три сили, които засега са неизвестни – реакциите на АВ, на АС и на нишката AD. Затова за определяне на реакцията на нишката предварително се разглежда равновесието на товара D. Той е в равновесие под действие на две сили: теглото P и реакцията на нишката T. Тези сили са насочени в противоположни посоки (фиг.9б). Съгласно условието за равновесие на товара се получава $T=P=100$ кг. Сега когато една от трите сили, приложени към шарнира A, е известна, може да се разгледа равновесието на шарнира A. Към него известната приложена сила е реакцията на нишката T' , насочена по вертикалата надолу – съгласно закона за действието и противодействието, т.е. $T' = -T$. Реакциите T_B и T_C са насочени по направление на прътите (фиг.9в). При равновесие на шарнира A равнодействащата на всички приложени към него сили трябва да е нула, следователно силите T' , T_B и T_C образуват затворен силов многоъгълник (фиг.9г). Построяването му се осъществява като се започне от силата T' (известна по големина и посока), която се прилага към произволна точка O. След това през началото и края на T' се построяват прави, успоредни на АВ и АС, които се пресичат в точка Q. На страните на триъгълника OSQ се изобразяват стрелките така, че сумата на силите T' , T_B и T_C да бъде равна на нулевия вектор. От триъгълника OSQ следва, че $\angle SOQ = \angle DAC = 30^\circ$ и $\angle OSQ = \angle BAD = 45^\circ$ (ъгли с взаимно успоредни рамене). Следователно $\angle SQO = 105^\circ$. От синусова теорема :

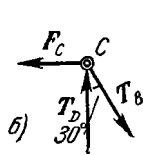
$$\frac{T_B}{\sin 30^\circ} = \frac{T_C}{\sin 45^\circ} = \frac{T}{\sin 105^\circ} \quad \text{или} \quad T_B = T' \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ}, \quad T_C = T' \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}.$$

След заместване на числените стойности се получава: $T_B = 51,8$ кг, $T_C = 73,2$ кг.

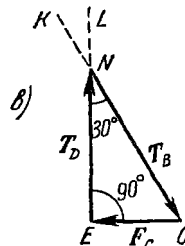
3. На фиг.10а е изобразен механизъм ABCD (антиуспоредник), състоящ се от абсолютно твърди звена АВ, ВС и CD, шарнирно свързани в точки В и С и закрепени чрез шарнирите А и D към неподвижното звено AD, като $AD=BC$, $AB=CD$. Към С е приложена наляво хоризонтална сила $F_C=10$ кг. Да се определи големината на силата F_B , приложена в В по вертикалата, ако механизмът е в равновесие и $\angle BAD = 30^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$. Теглото на звената да се пренебрегне.



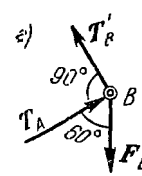
Фиг.10а



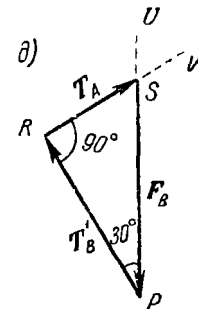
Фиг.10б



Фиг.10в



Фиг.10г



Фиг.10д

За определяне на силата F_B трябва да се определи равновесието на шарнира В. Но това е невъзможно, тъй като той е в равновесие под действие на три сили, които засега са неизвестни – реакциите на АВ, на ВС и на силата F_B . Затова за определяне на реакцията на звеното ВС предварително се разглежда равновесието на шарнира С. Към него са приложени активната сила F_C и реакциите на CD и СВ, които са

насочени по направление на звената. На фиг.10в е показан силовият триъгълник за възела С. От произволна точка О е построена сила F_C . През началото и края на F_C се построяват прави ОК и ЕЛ, успоредни на СВ и CD, които се пресичат в точка N - третият връх на силовия триъгълник. Ориентират се векторите T_D и T_B така, че сумата им с F_C да бъде равна на нулевия вектор.

Ъглите на на триъгълник OEN се определят с помощта на еднаквите триъгълници ABD и DCB (по три страни – фиг.10а). Тогава $\angle DCB = \angle DAB = 30^\circ$. Оттук следва еднаквостта на триъгълниците AMD и CMB ($AD=BC$; $\angle DAM = \angle MCB = 30^\circ$; $\angle AMD = \angle CMB = 60^\circ$) и $\angle CBM = \angle ADM = 90^\circ$. Но $\angle ENO = \angle MCB = 30^\circ$ и от

$$F_C \perp T_D \text{ следва } T_B = \frac{F_C}{\sin 30^\circ} = 2F_C.$$

Сега може да се определи търсената сила F_B като се разгледа равновесието на шарнира В (фиг.10г). Към него са приложени активната сила F_B и реакциите на АВ и ВС, които са насочени по направление на звената, като реакцията в звеното ВС е противоположна на тази от силовия триъгълник, показан на фиг.10в, т.е. $T'_B = -T_B$.

Построяване на силовия триъгълник за възела В: Нанася се реакцията T'_B от произволна точка Р (фиг.10д). През началото и края на T'_B се построяват прави PU и RV, успоредни на линията на действие на търсената сила F_B и на звеното АВ, които се пресичат в точка S - третият връх на силовия триъгълник PRS. Ориентират се векторите T_A и F_B така, че силовият триъгълник PRS да бъде затворен. Тъй като линиите на действие на силите T'_B и T_A съответно са успоредни на звената ВС и АВ, то $\angle PRS = \angle MBC = 90^\circ$. Но $\angle RPS = \angle BAD = 30^\circ$ като ъгли с взаимно перпендикулярни рамене. Тоава от силовия триъгълник PRS:

$$F_B = \frac{T'_B}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{3}\sqrt{3}T_B = \frac{4}{3}\sqrt{3}F_C = 23,1 \text{ кг}$$