ЛЕКЦИЯ 1

Аналитична механика

Библиография

Основна:

Анчев А., Л. Лилов, С. Радев (1988). Лекции по аналитична механика, част 1. Унив. изд. „Св. Кл. Охридски“, София.

Младенов К. (2001) . Теоретична механика, ч. 1 и 2, ABC – Техника.

Лойцянский Л. Г., А. И. Лурье (1995). Курс теоретической механики. ч. 1 и 2, „Наука“, Москва.

Бл. Долапчиев, Аналитична механика, 2-ро издание, София, 1966.

Бухгольц, Н. Н., Основной курс теоретической механики, изд. 6-ое, Наука, Москва, 1976.

Допълнителна:

Марков К. (1995). Ръководство по аналитична механика. Унив. изд. „Св. Кл. Охридски“, София.

Писарев А., Ц. Парасков, С. Бъчваров (1986, 1988). Курс по теоретична механика. ч. 1 и 2. ДИ „Техника“, София.

Литература

1. Percey F. Smith, William R. Lfngley, Yale University, Theoretical Mechanics, Ginn and Company, Boston-New York-Chicago-London, 1910.
2. A. Nony Mous, A Short Introduction to Theoretical Mechanics, Brigham University, 2007.
3. Rugerro M. Santilli, Foundation of Theoretical Mechanics, Cambridge, USA, Springer-Verlag Ney York Inc.,1983

Text: "*Classical Mechanics, 3th Edition*," H. Goldstein, C.P. Poole, J.L. Safko, Addison-Wesley (2002).

"*Mathematical methods in classical mechanics*," V.I Arnold (1989).

Web Site: http://www.colorado.edu/physics/phys5210/

Съдържание

1. **Предмет на аналитичната механика.**

- движението като философско понятие: всички процеси и явления във вселената

- механично движение – изменение във времето на взаимното разположение на телата в пространството

- изучаване на общите закони на механичното движение и механичното взаимодействие на материалните тела

- основни понятия: пространство, време, сила, маса

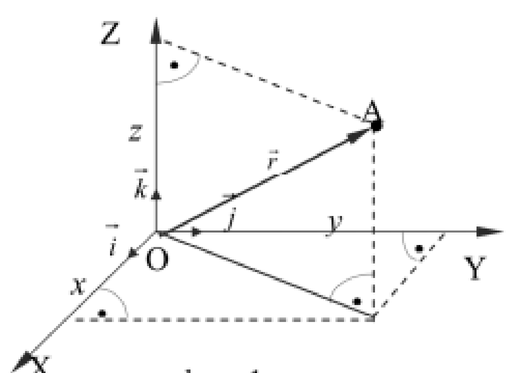
- материална точка: материален обект с пренебрежимо малки размери

- абсолютно твърдо тяло: разстоянието между произволни негови точки остава неизменно независимо от механичните въздействия

- движението - векторна функция със скаларен аргумент времето

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

- координатна система – средство за описание на движението

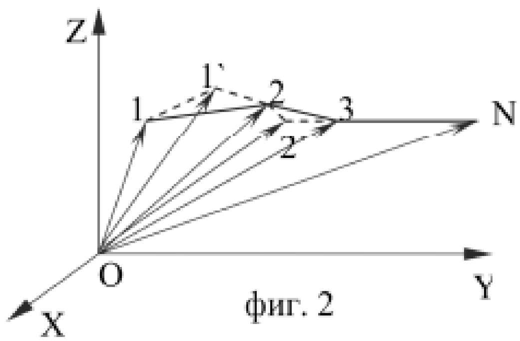


фиг. 1

- Скаларни функции : x=x(t); y=y(t); z=z(t)

2. Траектория на точка.

- Непрекъсната крива в пространството



фиг. 2

3. **Векторна функция** $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ **на скаларен аргумент** t.

- *определение:* на всяко числено значение на t съответства определено значение на вектора – определени модул и направление

- скаларна функция $x = x(t)$ на скаларен аргумент t

- представяне

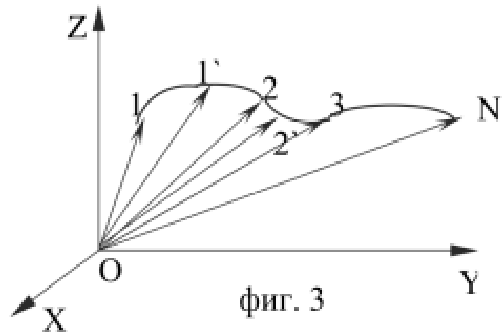
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

i , j , k - единични вектори по координатните оси на Декартова система

4. Ходограф на вектор-функция.

- Траектория, описвана от краищата на вектора на вектор-функцията, като векторите имат общо начало - една неподвижна точка

- Съпоставяне на траектория на точка и ходограф на вектор-функция *траекторията на точка – ходограф на вектор-функция*



фиг. 3

5. Производна на векторна функция.

- дефиниция

$$\mathbf{a}'(u) = \frac{d\mathbf{a}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{a}(u+\Delta u) - \mathbf{a}(u)}{\Delta u}$$

Вектор с направление на допирателната към ходографа и посока, съответна на нарастване на аргумента

$|\mathbf{a}'(u)|$ - модул на производната

a - големина на вектора $\mathbf{a}$

a' - големина (стойност) на производната на вектора $\mathbf{a}$

- Правила за диференциране

$$\frac{d}{du}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{du}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{du}$$

- Пример: производна на единичен вектор $\mathbf{e}$ с постоянно направление

$$\frac{d\mathbf{e}}{du} = \mathbf{0}$$

- Пример: производна на вектор **a** с постоянна големина

$$\frac{da^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{a}\,\mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{a} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 2\mathbf{a}\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{a} \perp \frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

- За координатна система с неподвижни (с постоянни направления) оси

$$\mathbf{a}(u) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad , \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

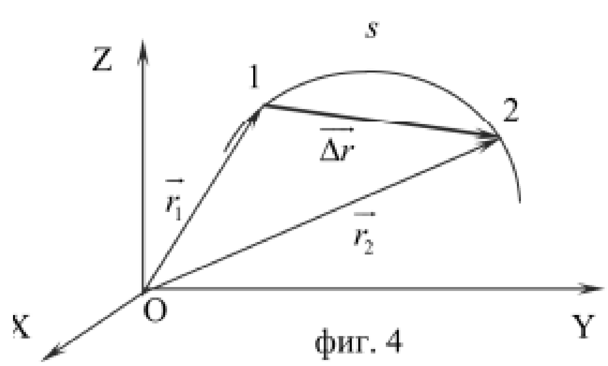
$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \frac{da_x}{du}\mathbf{i} + \frac{da_y}{du}\mathbf{j} + \frac{da_z}{du}\mathbf{k}\,, \qquad \left|\frac{d\mathbf{a}}{du}\right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{du}\right)^2}$$

$$a'(u) = \frac{da}{du} = \frac{a_x\frac{da_x}{du} + a_y\frac{da_y}{du} + a_z\frac{da_z}{du}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$|\mathbf{a}'(u)| \neq a'(u)$$

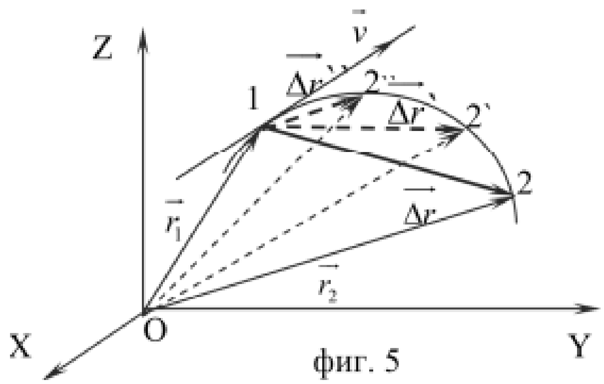
6. Вектори скорост и ускорение на движеща се точка.

$$\Delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)$$



фиг. 4

средна скорост: $\mathbf{v}_{cp} = \dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ **моментна скорост:** $\mathbf{v} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$



фиг. 5

$$\mathbf{v}(t) = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Средно ускорение: $\mathbf{w}_{cp} = \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$

моментно ускорение: $\mathbf{w} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$

$$w = |\mathbf{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

7. **Триедър на Френе.**

- естествена координатна ситема

регулярна крива: допуска задаване с векторно-параметрично уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, където $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ е n пъти непрекъснато диференцируема функция; при $n = 1$ кривата се налича *гладка*

s - криволинейна абсциса; s = s(t) естествен закон на движение на точката

$\boldsymbol{\tau}$ - вектор по тангентата към траекторията

$$\boldsymbol{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Теорема: Всяка непрекъсната и диференцируема функция (гладка крива) притежава единствена допирателна във всяка точка. Ако $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ е векторно-параметричното уравнение на кривата, то допирателната в точката, съответна на стойността на аргумента t, има направлението на вектора $\dot{\mathbf{r}}(t)$.

- оскулачна равнина

  Нека P_0 - точка от гладка крива, а $\boldsymbol{\tau_0}$ - вектор по тангентата в тази точка.

  Нека P_1 - друга точка от кривата, а $\boldsymbol{\tau}_1$ - вектор по тангентата в тази точка.

  Векторите $\boldsymbol{\tau_0}$ и $\boldsymbol{\tau}_1$ с начало P_0 характеризират в общия случай равнина, която при граничен преход $P_1 \to P_0$ се дефинира като оскулачна.

  Смисъл: оскулачната равнина е „най-плътно“ приближена до кривата.

  Следствие: оскулачната равнина или е единствена, или всяка равнина през допирателната към кривата в дадена точка е оскулачна.

- нормална равнина и главна нормала

  нормална равнина в точка – перпендикулярна равнина към тангентата в тази точка

  главна нормала – пресечница на оскулачната и нормалната равнина

- единични вектори $\boldsymbol{\tau}$ по тангентата и $\mathbf{n}$ по главната нормала
- бинормала и единичен вектор по бинормалата

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}$$

С всяка точка от траекторията може да се свърже естествена координатна система (естествен триедър , триедър на Френе) с оси, насочени по тангентата, нормалата и бинормалата.

Единичните вектори по тези оси образуват дясна координатна система.

Примери.

1.Точка се движи съгласно уравненията $x = 6 + 3t$, $y = 4t$. *Да се определи траекторията на точката.*

Изключване на t от двете уравнения: $t = \frac{y}{4}$ и се получава $x = 6 + 0.75y$.

Траекторията е *полуправа*, започваща от точката, съответна на $t = 0$, т.е. $x_0 = 6$, $y_0 = 0$. Точката се движи по нея с нарастване на времето t. При избор на полуправата за абцисна ос (как ?) уравненията на движение приемат вида $x_1 = 5t$, $y_1 = 0$.

2. *Точка се движи съгласно уравненията* $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, *където* $\varphi = kt$. *Да се определи траекторията на точката, времето за пълен оборот и моментът, когато двете координати станат равни помежду си.*

Изключване на t от двете уравнения: $x^2 + y^2 = a^2$ - окръжност с център в координатното начало. Пълен оборот – времето, за което ъгълът стане 2π, т.е. $\varphi = kT = 2\pi$ или $T = \frac{2\pi}{k}$.

Моментът t_1, в който координатите станат равни, е $x = y = a\cos kt_1 = a\sin kt_1$ или $tg\, kt_1 = 1$. На практика такива моменти са безкрайно много и се дават с $t_1 = \frac{\pi}{4k} + \frac{\pi}{k}n, \quad n \in N$.

3. *Точка се движи съгласно уравненията* $x = a\cos(kt - \varepsilon)$, $y = b\cos kt$. *Да се определи траекторията на точката. Как се изменя тя при нарастване на* ε *от 0 до* 2π *?*

За изключване на t от: $\cos kt = \frac{y}{b}$, и $x = a\cos(kt - \varepsilon) = a[\cos kt \cos\varepsilon + \sin kt \sin\varepsilon]$, като от първото се замества $\cos kt$ във второто, което после се решава относно $\sin kt$, т.е.

$\sin kt = \frac{x/a - (y/b)\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}$. След сумиране на квадратите на $\sin kt$ и $\cos kt$ и преобразуване се стига до

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{x}{a}\frac{y}{b}\cos\varepsilon = \sin^2\varepsilon$$

- уравнение на елипса.

От него се вижда, че най-големите и най-малките стойности на x и y съответно по координатните оси са $\pm a$ и $\pm b$, т.е. винаги елипсата е вписана в правоъгълник със страни $2a$ и $2b$.

Изменение на траекторията при нарастване на ε от 0 до 2π ?

а) $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$, т.е. две съвпадащи прави, явяващи се диагонал на правоъгълника.

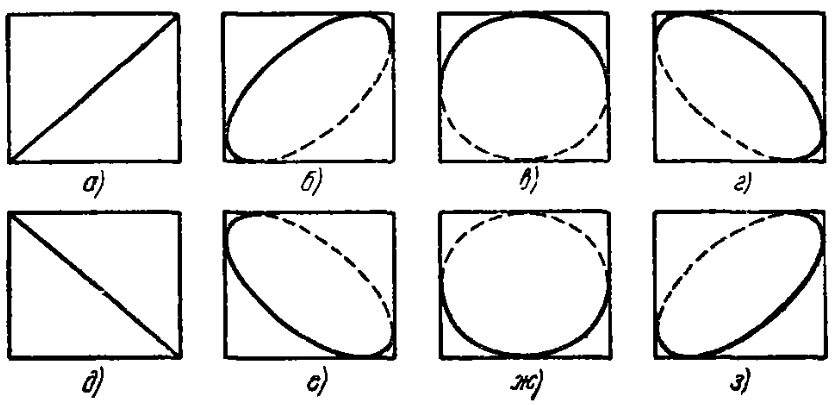
б) ε расте до $\pi / 2 \ \Rightarrow$ една от осите на елипсата постепенно се разширява.

в) $\varepsilon = \pi / 2 \ \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, уравнението на елипсата е в каноничен вид.

г) ε расте до $\pi \ \Rightarrow$ една от осите на елипсата постепенно се стеснява.

д) $\varepsilon = \pi \ \Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$ и отново се получават две съвпадащи прави, явяващи се другия диагонал на правоъгълника.

При увеличаване на ε по-нататък до 2π процесът се повтаря, като фигурите се явяват огледално отражение на случаите б), в) и г).

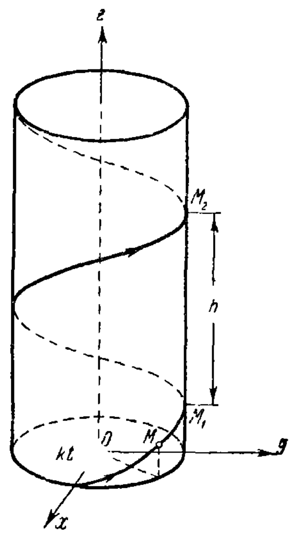


4. *Точка се движи в равнина съгласно уравненията* $x = e^{-t}\cos kt$, $y = e^{-t}\sin kt$. *Да се определи траекторията на точката в полярни координати.*

От $\frac{y}{x} = tg\varphi = tg\, kt \quad \Rightarrow \varphi = kt$. От $x^2 + y^2 = \rho^2 = e^{-2t}$ и изключване на времето: $\rho = e^{-\varphi/k}$.
Движението е по траектория, която е навиваща се към координатното начало спирала.

5. *Точка се движи съгласно уравненията* $x = a\cos kt$, $y = a\sin kt$, $z = bt$ *Да се определи траекторията и законът за движение по траекторията. Начални условия* $s = 0$ *при* $t = 0$.
Изключване на t от първите две уравнения: $x^2 + y^2 = a^2$ - проекцията на траекторията в координатната равнина Oxy е окръжност с център в координатното начало. Пълен оборот – времето, за което ъгълът стане 2π, т.е. $\varphi = kT = 2\pi$ или $T = \frac{2\pi}{k}$. За това време z ще

приеме стойност $z = h = b\dfrac{2\pi}{k}$. Траекторията е винтова линия със стъпка $h = b\dfrac{2\pi}{k}$, т.е. спирала, която се навива на цилиндър с радиус a.



За определяне на закона за движение по траекторията е необходимо да се намери диференциалът на дъга от нея, след което да се интегрира по времето. Или:

$d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$, където $dx = -ak\sin ktdt$, $dy = ak\cos ktdt$, $dz = bdt$.

Тогава $d\sigma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{a^2k^2 + b^2}dt$ и $\sigma = \sqrt{a^2k^2 + b^2}t + C$.

От началните условия следва $C = 0$.

Движението започва от точката $x_0 = a, y_0 = 0, z_0 = 0$ при $t = 0$ и се извършва по винтова линия срещу часовниковата стрелка.