Ръководство за упражненията по Числени методи на анализа за спец. Приложна математика

Драгомир Алексов

4 април 2016 г.

Приложение A

Определение 1. *Казваме, че H е реално **линейно пространство**, ако на всеки два елемента $u, v \in H$ е съпоставен трети, наречен тяхна сума $u + v \in H$ и на всеки елемент u и всяко реално число λ е съпоставен елемент $\lambda u \in H$ така, че са изпълнени следните равенства:*
1) $u + v = v + u$ (комутативност);
2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (асоциативност);
3) Съществува такъв елемент ϑ, че $u + \vartheta = \vartheta + u = u$, за всеки елемент $u \in H$ (съществуване на нулев елемент);
4) За всяко $u \in H$ съществува такъв елемент $(-u) \in H$, че $u + (-u) = (-u) + u = \vartheta$ (съществуване на обратен елемент за всеки елемент от пространството);
5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ (дистрибутивност);
6) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ (дистрибутивност);
7) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$;
8) $1.u = u$.

Забележка. Важното за нас ще бъде не да помним 8-те изброени по-горе свойства (които са крайно естествени), а факта, че сумата на два елемента от H е пак елемент на H, и че ако умножим елемент на H с реално число, получаваме отново елемент на H (т.е., трябва да **знаем** това, което пише преди изброените свойства).

Популярни примери за линейни пространтства (за които много студенти не са се замисляли преди да се срещнат с числените методи) са множеството от непрекъснатите в даден интервал $[a, b]$ функции (означено с $C[a, b]$) и множеството от алгебрични полиноми от степен n. Наистина тривиално се проверява, че ако съберем две непрекъснати функции (или два полинома от степен n), получаваме отново непрекъсната функция (полином от същата степен) и ако умножим една непрекъсната функция (полином от степен n), получаваме пак непрекъсната функция (полином от степен n).

Определение 2. *Нека $f_1, \ldots, f_n$ са елементи от линейното пространство H. Казваме, че те са **линейно независими**, ако от това, че някоя тяхна линейна комбинация с реални числа*

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$$

е равна на нулевия елемент в H следва, че $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$

Забележка. Коректността изисква авторът да спомене, че при линейните пространства не е нужно да се работи с реални числа. Всички определения и свойства ще са в сила ако работим с кое да е числово поле. Тъй като все пак ще боравим само с реални линейни пространства, то няма да се затормозяваме допълнително (авторът да пише и читателите да четат).

В споменатите по-горе пространства ($C[a, b]$ и π_n) нулевите елементи са съответно функциията, която е равна на константата нула в интервала $[a, b]$ и нулевият полином. Лесно се вижда, че те удовлетворяват третото свойство в определението за линейно пространство.

Определение 3. *Казваме, че елементите $f_1, \ldots, f_n$ от H са* ***линейно зависими****, ако съществуват реални числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не всички от които са нула, но*

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = \vartheta,$$

където ϑ е нулевият елемент на H.

Определение 4. *Нека H е ненулево линейно пространство и B е непразно подмножество на H. Казваме, че B е базис на H, ако:*
1) елементите на B са линейно независими; 2) всеки елемент на H е линейна комбинация на елементите на B.

Определение 5. *Едно линейно пространство H се нарича крайномерно, ако съществуват краен брой елементи $f_1, \ldots, f_n$, такива че всеки елемент на H се представя като тяхна линейна комбинация.*

Теорема A.0.2. *Всяко ненулево крайномерно линейно пространство притежава краен базис.*

Теорема A.0.3. *Всеки два базиса на едно линейно пространство съдържат равен брой елементи.*

Определение 6. *Броят на елементите в кой да е базис на ненулевото крайномерно пространство H наричаме размерност на H и се означава с $dim\, H$. По определение размерността на нулевото пространство е реавна на нула. Ако H е безкрайномерно, пишем $dim\, H = \infty$.*

Теорема A.0.4. *Нека H е линейно пространство. Тогава*
1) H е крайномерно с размерност n тогава и само тогав,а когато в H съществуват n на брой линейно независими елемента и всеки $(n+1)$ на брой елемента са линейно завивсими. В този случай всеки n на брой линейно независими елемента от H са негов базис;
2) H е безкрайномерномерно тогава и само тогава, когато за всяко естествено число n във H има n на брой линейно независими елемента.

Говорейки за линейна независимост, размерност и базис, нека отново се спрем на пространствата $C[a, b]$ и π_n.
Функциите 1, x, x^2, $\ldots, x^n$ са линейно независими елементи на π_n, понеже всяка тяхна ненулева линейна комбинация

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

има най-много n на брой нули (в цялата реалната права), но не е равен на нулевия полином.
От друга страна всеки полином от n-та степен се представя като линейна комбинация на функциите 1, $x, \ldots, x^n$. Следователно (от определение 4 от настоящето приложение)

те са базис в π_n, а размерността на въпросното линейно пространство е равна на $(n+1)$. Относно пространството $C[a,b]$, за всяко естествено число n можем да разгледаме същите функции $1, x, \dots, x^{n-1}$. Те са непрекъснати във всеки интервал $[a,b]$ и вече стана на въпрос, че са линейно независими. Следователно (от теорема A.0.4 2)) добре известното пространство $C[a,b]$ се оказва, че е безкрайномерно.

Определение 7. *Съответствието L, с което на всяка функция $f \in A$ се съпоставя функция (означена с) $L(f) \in V$, се нарича **оператор** с дефиниционна област A и област от стойности V.*

Забележка. Стойността на функцията $L(f)$ в точката x се означава с $L(f;x)$.

Теорема A.0.5. ***(Теорема на Рол.)*** *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$, диференцируема в (a,b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува такаава точка $\xi \in (a,b)$, че $f'(x) = 0$.*

Забележка. Тази теорема има прост геометричен смисъл. А именно, твърди се, че ако в две различни точки a и b функцията f има равни стойности, то поне в една междинна точка $\xi \in (a,b)$ допирателната към графиката на f в точката $(\xi, f(\xi))$ е хоризонтална. Самата производна бе равна на тангесът на ъгъла (отношението на срещуположна върху прилежаща страна) между допирателната на функцията и абсцисата $Ox^{\rightarrow}$.