Задачи по ЧМА от Лозко Милев,

спец. “Приложна математика”, II курс, 2015/2016г.

Първи тип задачи

Задача 1. Като използвате интерполационната формула на Лагранж, намерете полинома $p \in \pi_2$, който удовлетворява условията: $p(-1) = 2,\ p(1) = 2,\ p(2) = 5.$

Задача 2. Полиномът $L_2(f; x)$ интерполира $f(x) = e^x$ в точките -1, 0, 1. Като използвате формулата за оценка на грешката, докажете, че:

$$\max_{x \in [-1; 1]} |f(x) - L_2(f; x)| \leq \frac{1}{5}$$

Задача 3. Като използвате интерполационната формула на Нютон с разделени разлики, намерете полинома $p \in \pi_3$, който удовлетворява условията: $p(-2) = -8,\ p(0) = 2,$ $p(1) = 4,\ p(2) = 12.$ Представете $p(x)$ по степени на x.

Задача 4. Нека $S_k := 1^2 + \dots + k^2$ за $k \geq 1$ и $S_0 := 0$. Покажете, че $\exists!$ полином $p \in \pi_3$: $p(k) = S_k$ за $k = 0, 1, 2 \dots$ Намерете S_k като използвате формулата на Нютон с крайни разлики за интерполиране напред.

Задача 5. Като използвате интерполационната формула на Нютон с разделени разлики с кратни възли, намерете интерполационния полином на Ермит, който удовлетворява условията: $p(0) = -1,\ p'(0) = 1,\ p''(0) = 2,\ p(1) = 0,\ p'(1) = -1.$ Представете $p(x)$ по степени на x.

Задача 6. Като използвате формулата за тригонометрична интерполация при равноотдалечени възли, определете коефициентите $a_0,\ a_1,\ b_1$, така че

$$\tau(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$$

да удовлетворява условията: $\tau(0) = -1,\ \tau\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2,\ \tau\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2.$

Задача 7. Да се намери явният вид на $B(1, 2, 4;\ t)$ за $t \in [1; 4]$.

Задача 8. Да се намери полиномът на най-добро равномерно приближение от π_1 за функцията $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$ в интервала $[-1; 1]$ и да се намери $E_1(f)$.

Задача 9. Да се намери полиномът на най-добро средноквадратично приближение от π_1 за функцията $f(x) = e^x$ в интервала $[-1; 1]$ при тегло $\mu(x) = 1$.

Задача 10. Да се намери полиномът от π_1, приближаващ по метода на най-малките квадрати таблицата:

x_i	0	1	3	4
f_i	5	2	2	1

Задача 11. Напишете съставната квадратурна формула на трапеците, осигуряваща пресмятане на $\int_0^1 \sin(x)\, dx$ с грешка по малка от $0{,}01$. Обосновете като използвате формулата за оценка на грешката.

Задача 12. Намерете с грешка по-малка от $0{,}001$ положителен корен на уравнението $x^3 - 2x - 5 = 0$ по метода на:

а) свиващите изображения;

б) хордите;

в) Нютон.

Втори тип задачи

Задача 1. Нека $l_{kn}(x)$ за $k = \overline{0,n}$ са базисните полиноми на Лагранж, съответстващи на възлите $x_0, \dots, x_n$. Да се намери с доказателство

$$\sum_{k=0}^{n} (x - x_k)^{n+1}\, l_{kn}(x).$$

Задача 2. Нека $f(x) \in C^2[0;1]$ и е изпълнено, че $|f''(x)| \le x^2,\ \forall x \in [0;1]$. За $\xi \in (0;1)$ да означим с $P_\xi(x)$ линейната в $[0;\xi]$ и $[\xi;1]$ непрекъсната функция, която интерполира $f(x)$ в точките $0, \xi, 1$. Да се определи ξ, така че

$$\max_{x \in [0;1]} \left|f(x) - P_\xi(x)\right| \le 0{,}02.$$

Задача 3. Нека $(\eta_k)_0^n$ са екстремалните точки на полинома на Чебишов $T_n(x)$. Да се докаже, че ако $p \in \pi_n$ и $|p(\eta_k)| \le 1$ за $k = \overline{0,n}$, то $|p(x)| \le |T_n(x)|$ за всяко $|x| \ge 1$.

Задача 4. Нека $x_k \ne 0, -1$ за $k = \overline{1,n}$. Да се намери с доказателство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n . f\left(\frac{1}{x_k}\right)}{f'(x_k).(1 + x_k)}\ ,$$

където $f(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Задача 5. Нека $l_{kn}(x)$ за $k = \overline{0,n}$ са базисните полиноми на Лагранж, съответстващи на възлите $x_0, \dots, x_n$. Нека $w(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ и

$$\varphi_k(x) = \left(1 - \frac{w''(x_k)}{w'(x_k)}(x - x_k)\right) l_{kn}^2(x).$$

Да се докаже, че $\varphi_k'(x_k) = 0$ за $k = \overline{0,n}$.

Задача 6. Да се докаже, че функциите $\left\{1, e^{2x}, e^{5x^2}\right\}$ образуват система на Чебишов в $(-\infty; \infty)$.

Задача 7. Нека $B(x_0, \dots, x_r; t)$ е B-сплайн от степен $r-1$ с възли $x_0 < \cdots < x_r$. Да се намери:

$$\int_{x_0}^{x_r} B(x_0, \dots, x_r; t)dt$$

Упътване: Да се представи като функция, зависеща само от r.

Задача 8. Да се докаже, че най-доброто равномерно приближение с полиноми от π_n за функцията $f(x) = \cos(x)$ в $[-1; 1]$ удовлетворява неравенството:

$$E_n(f) \leq \frac{1}{2^n(n+1)!}$$

Задача 9. Да се докаже, че ако $f \in C^1[0; 1]$, то за производната на полинома на Бернщайн е изпълнено, че

$$B'_{n+1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f'(\xi_k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

където $\xi_k \in \left[\frac{k}{n+1}; \frac{k+1}{n+1}\right], k = \overline{0, n}$.

Задача 10. Да се докаже, че полиномите на Льожандър

$$Ln(x) = \frac{1}{2^n n!}((x^2-1)^n)^{(n)}$$

удовлетворяват

$$\int_{-1}^{1} Ln^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Упътване: $Ln(1) = 1, Ln(-1) = (-1)^n$.

Задача 11. Нека $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ е квадратурна формула на Гаус. Да се докаже, че

$$A_k = \frac{1}{(1-x_k^2)(Ln'(x_k))^2}$$

за $k = \overline{1, n}$, където $Ln(x)$ е полиномът на Льожандър от степен n, удовлетворяващ условията: $Ln(1) = 1, Ln(-1) = (-1)^n$.

Упътване: Квадратурната формула е точна за $f(x) = \frac{Ln(x)}{x-x_k} Ln'(x)$.