Петър Бояджиев Ваня Хаджийски

КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ
РЪКОВОДСТВО

Второ издание

Факултет по математика и информатика
на Софийския университет „Св. Кл. Охридски“
София • 2015

Ръководството е предназначено за студентите от специалностите Математика, Приложна математика и Математика и информатика на Факултета по математика и информатика при СУ „Св. Климент Охридски“. То може да бъде полезно и на всички студенти, изучаващи комплексен анализ.

Авторите са преподаватели в Софийския университет с над тридесетгодишна преподавателска практика по тази учебна дисциплина.

СЪДЪРЖАНИЕ

ПРЕДГОВОР КЪМ ПЪРВОТО ИЗДАНИЕ

Тази книга е ръководство за решаване на задачи по комплексен анализ, предназначено главно за студентите от специалностите Математика, Приложна математика и Математика и информатика във Факултета по математика и информатика на Софийския университет. То може да бъде ползвано и от студентите от други висши учебни заведения, изучаващи комплексен анализ. Ръководството може да бъде полезно и за преподаващите тази дисциплина. При съставянето му авторите са се стремили да се ръководят както от съвременното състояние на преподаването на комплексния анализ, така и от установените в Софийския университет дългогодишни традиции в преподаването на тази дисциплина, водещи началото си от акад. Л. Чакалов, акад. Л. Илиев и продължени от проф. Т. Генчев, доц. Т. Аргирова и техните ученици.

Ръководството съдържа над 300 задачи, разпределени в 10 параграфа, които съответстват на основните теми, включени в учебната програма по комплексен анализ на ФМИ при СУ. То до голяма степен осигурява независимост от други източници, тъй като всеки параграф започва с кратки теоретични бележки, сравнително пълно осветляващи съответната тема. Задачите във всеки параграф са разделени тематично на групи (отделени със символа * * *), съдържащи отделните типове задачи. Включени са както чисто упражнителни задачи, целящи усвояването на преподавания материал, така и по-трудни и съдържателни задачи, чието решаване би довело до значително задълбочаване на знанията. За основните задачи във всяка група, както и за всички принципни задачи, са дадени пълни решения. Останалите са снабдени с кратки решения или упътвания и отговори. Разнообразието на включените във всеки параграф задачи гарантира доброто усвояване на съответния материал.

Част от задачите, включени в това ръководство, са съставени от авторите и са давани на писмени изпити през последните 20 години във ФМИ. Включени са и много задачи, подходящи за целите на това ръководство, от великолепния сборник по теория на аналитичните функции на проф. Т. Генчев и доц. Т. Аргирова.

Изложението в ръководството изисква активно отношение от страна на читателя: да извършва самостоятелно всички пресмятания, да проследява внимателно всички изображения, да осмисля решенията на принципните задачи.

Задачите, както и фигурите към тях са номерирани с две числа: първото посочва номера на параграфа, а второто – номера на задачата, съответно фигурата, в параграфа. Например зад. 3.16 е задача 16 от параграф 3, а фиг. 6.25 е фигура 25 от параграф 6.

На авторите е особено приятно да изразят благодарността си на ас. А. Александров и ст. н. с. Н. Николов за това, че прочетоха внимателно ръкописа и със забележките си допринесоха за отстраняване на редица неточности, на гл. ас. В. Черногоров за оказаната ни съществена помощ при подготовката на ръкописа за печат и на редакторката г-жа Х. Памукчиева, чиято отзивчивост и компетентна работа допринесоха за отстраняване на много езикови и стилови неточности.

юли 2004 г. *Авторите*

ПРЕДГОВОР КЪМ ВТОРОТО ИЗДАНИЕ

Второто издание на ръководството е без изменения. Отстранени са забелязаните неточности и печатни грешки.

август 2015 г. *В. Хаджийски*

Означения

$\mathbb{N}$ — множеството на естествените числа

$\mathbb{Z}$ — множеството на целите числа

$\mathbb{R}$ — множеството на реалните числа

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ — комплексната равнина

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — разширената комплексна равнина

$A = \{z \in \mathbb{C} : P(z)\} = \{P(z)\}$ — множеството от комплексните числа, притежаващи свойството P

$\overline{A}$ — затворената обвивка на множеството A

$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{|a-b|, a \in A, b \in B\}$ — разстоянието между множествата A и B

$\operatorname{Re} z$ — реалната част на комплексното число z

$\operatorname{Im} z$ — имагинерната част на комплексното число z

$|z|$ — модулът на комплексното число z

$\arg z$ — множеството от аргументите на комплексното число z

$\arg_0 z$ — главен аргумент на комплексното число z: $-\pi < \arg_0 z \leq \pi$

$\overline{z}$ — комплексно спрегнатото на комплексното число z

(z_1, z_2) — правата през z_1 и z_2

$[z_1, z_2]$ — затворената отсечка с краища z_1 и z_2

$(z_1, z_2)^{\rightarrow}$ — лъчът с начало z_1, съдържащ z_2

$Ox^+ = (0, +\infty)^{\rightarrow}$ — положителната абсциса

$Ox^- = (0, -\infty)^{\rightarrow}$ — отрицателната абсциса

$Oy^+ = (0, +i\infty)^{\rightarrow}$ — положителната ордината

$Oy^- = (0, -i\infty)^{\rightarrow}$ — отрицателната ордината

$\sphericalangle(z_1, z_2, z_3)$ — ориентираният ъгъл с рамене $(z_2, z_1)^{\rightarrow}$, $(z_2, z_3)^{\rightarrow}$

$\triangle(z_1, z_2, z_3)$ — триъгълникът с върхове z_1, z_2 и z_3

$\overset{\frown}{(z_1, z_2)}$ — дъга от окръжност с краища z_1 и z_2

$K(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ — кръгът с център a и радиус $R > 0$

$C(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = R\}$ — окръжността с център a и радиус $R > 0$

γ^- — кривата, противоположно ориентирана на кривата γ

$\operatorname{Int} \gamma$ — вътрешността на затворената жорданова крива γ

$\operatorname{Ext} \gamma$ — външността на затворената жорданова крива γ

∂D — ориентираната граница на областта D

$\Delta_\gamma \arg f(z)$ — изменението на аргумента на функцията f по кривата γ
(z_1, z_2, z_3) — простото отношение на точките z_1, z_2 и z_3
(z_1, z_2, z_3, z_4) — двойното отношение на точките z_1, z_2, z_3 и z_4

§ 1. Комплексни числа

Дефиниция 1.1. *Комплексно число* се нарича всяка наредена двойка от реални числа.

В множеството на комплексните числа $\mathbb{C} = \{z : z = (a, b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$ се въвеждат равенство, събиране и умножение:

1. $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ и $b = d$.
2. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
3. $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Относно тези операции $\mathbb{C}$ е поле с нула двойката $(0, 0)$ и единица двойката $(1, 0)$. Ако $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, то обратният му елемент относно събирането е $-z = (-a, -b)$, а относно умножението — $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$. Тъй като изображението $a \to (a, 0)$ на $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ е изоморфизъм, то реалното число a се отъждествява с комплексното число $(a, 0)$. Означаваме $i := (0, 1)$. Имаме $i.i = (-1, 0) = -1$, т. е. i е корен на уравнението $z^2 + 1 = 0$. Числото i се нарича *имагинерна единица* на $\mathbb{C}$. Всяко комплексно число има единствено представяне чрез i, а именно:

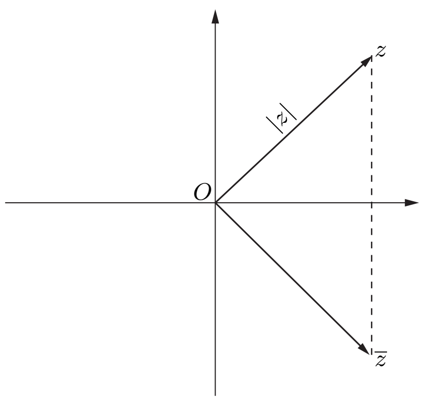
$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib.$$

Това представяне се нарича *алгебричен вид* на комплексното число z. Чрез него действията с комплексни числа се свеждат до съответните действия с реални числа, като просто се разкриват скобите и се взема предвид, че $i^2 = -1$. С всяко комплексно число $z = a + ib$ се свързват означенията $\operatorname{Re} z := a$ — реална част на z; $\operatorname{Im} z := b$ — имагинерна част на z; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модул на z; $\overline{z} := a - ib$ — комплексно спрегнато на z. В сила са равенствата $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z \iff \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z \iff \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$, $z.\overline{z} = |z|^2$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$, $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$, $|\overline{z}| = |z|$, $|zw| = |z|.|w|$ и $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

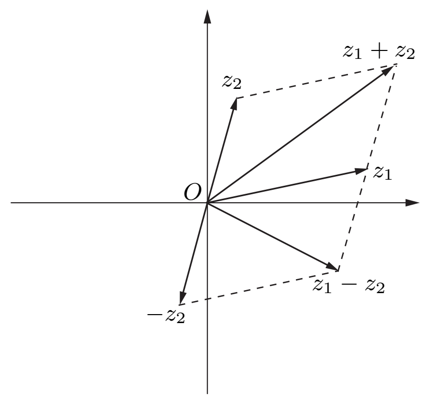
Ще отбележим, че неравенствата $z \lesseqgtr w$ са лишени от смисъл, защото в $\mathbb{C}$ няма наредба, наследяваща тази в $\mathbb{R}$.

Като се следва формалната дефиниция 1.1, с всяко комплексно число $z = a + ib$ се асоциира точката от равнината $\mathbb{R}^2$ с координати (a, b). Така реалните числа се асоциират с абсцисната ос, която се нарича *реална ос*, а чисто имагинерните числа съответстват на точки от ординатната ос, която се нарича *имагинерна ос* и се бележи с $i\mathbb{R}$. Освен това, тъй като всяка точка M от равнината се определя еднозначно от радиус-вектора си $\overrightarrow{OM}$, то оттук нататък ще отъждествяваме комплексното число $z = a + ib$ както с точката $M(a, b)$, така и с радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Равнината $\mathbb{R}^2$ се нарича *комплексна равнина* и се бележи с $\mathbb{C}$.

Сега въведените по-горе означения придобиват ясен геометричен смисъл. Така $|z|$ е дължината на вектора z, а $\overline{z}$ е точката, симетрична на z относно реалната ос (фиг. 1.1). Векторната интерпретация на комплексните числа нагледно



Фиг. 1.1



Фиг. 1.2

илюстрира събирането и изваждането на комплексни числа чрез стандартното *правило на успоредника* (фиг. 1.2). Ясно е, че евклидовото разстояние между точките z_1 и z_2 е равно на дължината на вектора $z_1 - z_2$, т. е. на $|z_1 - z_2|$. Така $|z_2|$ е разстоянието между $z_1 + z_2$ и z_1 и затова са в сила неравенствата на триъгълника (фиг. 1.2)

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

В първото неравенство равенство се достига тогава и само тогава, когато $\arg z_2 = \arg z_1 + \pi$, а във второто — когато $\arg z_2 = \arg z_1$.

По-общо, по индукция се доказва, че

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Векторът $z \neq 0$ се определя еднозначно от дължината си и ъгъла, който сключва с положителния лъч на абсцисата Ox^+. Този ъгъл се нарича *аргумент* на z и се бележи с $\arg z$. Числото $z = 0$ няма аргумент. Ясно е, че ако φ е един аргумент на z, то $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, е също аргумент на z. Измежду всички аргументи на z съществува един единствен, който принадлежи на интервала $(-\pi, \pi]$. Означава се с $\arg_0 z$ и се нарича *главен аргумент* на z. Нека $z = x + iy$, $r = |z|$ и $\varphi = \arg z$. Имаме $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Този запис се нарича *тригонометричен вид* на z. Ясно е, че $\varphi = \arg z$ е решение на системата $\cos\varphi = x/|z|$, $\sin\varphi = y/|z|$. Ще отбележим още, че ако φ е аргумент на z, то $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, но не всяко решение на това уравнение е аргумент на z. Така, ако $z = 1 + i$, то $\operatorname{tg}\varphi = 1$, откъдето $\varphi = \pi/4$ или $\varphi = 5\pi/4$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$) и $\varphi = 5\pi/4$ е аргумент на $-1 - i$, а не на $1 + i$.

За удобство се въвежда означението на Ойлер $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$. Така тригонометричният запис на z приема вида $z = re^{i\varphi}$. Очевидно $|e^{i\varphi}| = 1$, $e^{i\varphi} = e^{i\theta} \iff \varphi - \theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$ и са в сила формулите на Ойлер: $\cos\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$, $\sin\varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})/2i$. От събирателните формули за тригонометричните функции следва $e^{i\varphi}e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$, $e^{i\varphi}/e^{i\theta} = e^{i(\varphi-\theta)}$. Така със символа $e^{i\varphi}$ се оперира както с познатата ни функция e^x, $x \in \mathbb{R}$, все едно че i е реално число. След като се дефинира e^z, $z \in \mathbb{C}$, става ясно, че тези равенства са верни. Две комплексни числа $z = re^{i\varphi}$ и $w = \rho e^{i\theta}$ са равни, само ако $r = \rho$ и $\varphi = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Освен това $zw = r\rho e^{i(\varphi+\theta)}$ и $z/w = (r/\rho)e^{i(\varphi-\theta)}$. Оттук следва $|zw| = |z|\,|w|$ и $\arg zw = \arg z + \arg w$. Така zw се получава от z чрез хомотетия с коефициент $|w|$ и въртене на ъгъл $\arg w$.

По индукция следва $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, т. е. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Това равенство се нарича *формула на Моавър*. Нека $z = re^{i\varphi}$, $a = \rho e^{i\theta}$. Тогава уравнението $z^n = a$ е еквивалентно на $r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ и има n различни корена $z_k = \sqrt[n]{\rho}e^{i(\theta+2k\pi)/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Те са върхове на правилен n-ъгълник, вписан в окръжност с център O и радиус $\sqrt[n]{\rho}$. Тази формула за пресмятане на корените ще наричаме също *формула на Моавър*.

1.1. Да се запише в алгебричен вид числото:

а) $(2+i)(4+3i)$; **б)** $\dfrac{3+i}{1-i}$; **в)** $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5$; **г)** $\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$.

Решение. а) $(2+i)(4+3i) = 8 + 6i + 4i + 3i^2 = 5 + 10i$.

б) $\dfrac{3+i}{1-i} = \dfrac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2+4i}{2} = 1 + 2i$.

в) $\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i$, откъдето $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5 = -i^5 = -i^4.i = -i$.

г) $\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \left(\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2 = \left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1.2. Нека $a = 2 + i$, $b = 1 - 2i$. Да се пресметне: $a^2 + b^2$, $|b|$, $a\bar{b}$ и a/b.

Решение. Имаме: $a^2 + b^2 = (2+i)^2 + (1-2i)^2 = 3 + 4i - 3 - 4i = 0$, $|b| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $a\bar{b} = (2+i)(1+2i) = 5i$ и $a/b = a\bar{b}/|b|^2 = i$.

1.3. Да се запише в тригонометричен вид числото:

а) -1; **б)** $-i$; **в)** $1+i$; **г)** $\sqrt{3} - i$; **д)** $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$;

е) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi]$; **ж)** $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$; **з)** $\sin\alpha+i(1+\cos\alpha)$.

Решение. а) *Отг.* $e^{i(\pi+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$. б) *Отг.* $e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$. в) *Отг.* $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$. г) Имаме $|\sqrt{3}-i| = 2$, а $\varphi = \arg(\sqrt{3}-i)$ е решение на системата $\cos\varphi = \sqrt{3}/2$, $\sin\varphi = -1/2$, откъдето намираме $\varphi = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ и тогава $\sqrt{3} - i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$. д) *Отг.* $2e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)}$, $k \in \mathbb{Z}$. е) Имаме $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + i2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos\dfrac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}$. Ако $\alpha \in [0,\pi]$, то $\cos\dfrac{\alpha}{2} \geq 0$ и следователно това е тригонометричният вид на z. Ако $\alpha \in [\pi, 2\pi]$, то $\cos\dfrac{\alpha}{2} \leq 0$ и тогава $z = -2\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|e^{i\frac{\alpha}{2}} = 2\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|e^{i\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}$ е търсеният тригонометричен вид.

ж) *Отг.* $z = \begin{cases} 2\sin\dfrac{\alpha}{2}e^{i\frac{\pi-\alpha}{2}}, & \alpha \in [4k\pi, (2k+1)2\pi], \\ -2\sin\dfrac{\alpha}{2}e^{i\frac{3\pi-\alpha}{2}}, & \alpha \in [(2k+1)2\pi, 4(k+1)\pi],\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

з) *Отг.* $z = \begin{cases} 2\cos\dfrac{\alpha}{2}e^{i\frac{\pi-\alpha}{2}}, & \alpha \in [(4k-1)\pi, (4k+1)\pi], \\ -2\cos\dfrac{\alpha}{2}e^{i\frac{3\pi-\alpha}{2}}, & \alpha \in [(4k+1)\pi, (4k+3)\pi],\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

1.4. Нека $a = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $b = 1 + i\sqrt{3}$. Да се запишат в тригонометричен вид чрез главен аргумент числата: a, b, $\overline{a}$, $\overline{b}$, ab, a/b, a^7b^{-6} и $a + b$.

Решение. Имаме $a = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $b = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ и тогава $\overline{a} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $\overline{b} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$,

$$ab = 4e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{13\pi}{12}} = 4e^{-i\frac{11\pi}{12}}, \qquad \frac{a}{b} = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{12}},$$

$$a^7b^{-6} = 2^7e^{i\frac{21\pi}{4}}.2^{-6}e^{-i\frac{6\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}},$$

$$a + b = 2(e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{3}}) = 2e^{i\frac{13\pi}{24}}(e^{i\frac{5\pi}{24}} + e^{-i\frac{5\pi}{24}}) = 4\cos\frac{5\pi}{24}e^{i\frac{13\pi}{24}}.$$

1.5. Да се реши уравнението:

а) $z^2 = 5 - 12i$; **б)** $z^2 = -4 + 3i$; **в)** $z^6 = 1$; **г)** $z^3 = -1$;
д) $z^4 = -i$; **е)** $z^3 = \sqrt{3} + 3i$; **ж)** $z^2 = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Решение. а) Нека $z = x + iy$. Тогава $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ и уравнението е еквивалентно на системата: $x^2 - y^2 = 5$, $xy = -6$. Изразяваме $y = -6/x$ и след заместване получаваме $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$, откъдето намираме $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, а оттам и $y_1 = 2$, $y_2 = -2$. Така корените на уравнението са $z_1 = -3 + 2i$ и $z_2 = 3 - 2i$.

Забележка. От формулата на Моавър е ясно, че ако z_1 е единият корен на уравнението $z^2 = a$, то другият е $z_2 = -z_1$, така че при решаване на системата е достатъчно да се намери само едното ѝ решение.

б) *Отг.* $z_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

в) *Отг.* $z_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

г) *Отг.* $z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$.

д) *Отг.* $z_k = e^{i\frac{(4k-1)\pi}{8}}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

е) Имаме $\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$ и от формулата на Моавър получаваме $z_k = \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\, e^{i\frac{(6k+1)\pi}{9}}$, $k = 0, 1, 2$.

ж) *Отг.* $z_k = \begin{cases} \sqrt{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}\, e^{i\frac{\alpha+4k\pi}{4}}, & \alpha \in [0, \pi], \\ \sqrt{-2\cos\dfrac{\alpha}{2}}\, e^{i\frac{\alpha+(4k+2)\pi}{4}}, & \alpha \in [\pi, 2\pi],\ k = 0, 1. \end{cases}$

1.6. Да се реши уравнението:
а) $z^4 + 5z^2 + 9 = 0$; **б)** $(z+1)(z+2)(z+3)(z+4) + 5 = 0$;
в) $|z| + (1+i)z = 4 + 7i$; **г)** $|z+i| + |z-i| = 2$;
д) $z^4 + 8z^3 + 16z^2 + 9 = 0$.

Решение. Ще използваме, че ако z е корен на полином с реални коефициенти, то $\overline{z}$ е също негов корен.

а) Корените на съответното квадратно уравнение $y^2 + 5y + 9 = 0$ $(y = z^2)$ са $y_1 = (-5 + i\sqrt{11})/2$ и $y_2 = \overline{y}_1$. Тогава корените на даденото уравнение са $z_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$ и $z_{3,4} = \overline{z}_{1,2}$, където $\sqrt{y_1}$ е една от стойностите на корена. Както в зад. 1.5 а), пресмятаме $\sqrt{y_1} = (1 + i\sqrt{11})/2$ и получаваме $z_{1,2} = \pm(1 + i\sqrt{11})/2$ и $z_{3,4} = \pm(1 - i\sqrt{11})/2$.

б) Полагаме $y = (z+1)(z+4) = z^2 + 5z + 4$. Тогава $(z+2)(z+3) = y + 2$ и получаваме уравнението $y^2 + 2y + 5 = 0$, чиито корени са $y_1 = -1 + 2i$, $y_2 = \overline{y}_1$. След това от $z^2 + 5z + 4 = y_1$ намираме $z_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left[-5 \pm \left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{89}+5}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{89}-5}{2}}\right)\right]$. Тогава $z_{3,4} = \overline{z}_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left[-5 \pm \left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{89}+5}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{89}-5}{2}}\right)\right]$.

в) Отделете реална и имагинерна част и решете получената система. *Отг.* $3 + 4i$.

г) От неравенството на триъгълника имаме

$$|z+i| + |z-i| = |z+i| + |i-z| \geq |z+i+i-z| = |2i| = 2,$$

като равенство се достига само ако z принадлежи на отсечката $[-i, i]$. Следователно решенията на уравнението са $z \in [-i, i]$.

д) Уравнението е еквивалентно на $(z(z+4))^2 = -9$.

Отг. $z_{1,2} = -2 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}(3+i)$, $z_{3,4} = \overline{z}_{1,2}$.

1.7. Да се докаже тъждеството:

а) $|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re} z\overline{w} + |w|^2$;

б) $|z-w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re} z\overline{w} + |w|^2$;

в) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Изтълкувайте го геометрично;

г) $|1+z\overline{w}|^2 + |z-w|^2 = (1+|z|^2)(1+|w|^2)$;

д) $|1-z\overline{w}|^2 - |z-w|^2 = (1-|z|^2)(1-|w|^2)$;

е) $2|z| + 2|w| = |z+w+2\sqrt{zw}| + |z+w-2\sqrt{zw}|$;

ж) $|z+w| + |z-w| = |z+\sqrt{z^2-w^2}| + |z-\sqrt{z^2-w^2}|$.

Решение. а) Имаме $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re} z\overline{w} + |w|^2$.

в) Следва от а) и б). В успоредника с върхове 0, z, $z+w$, w числата $|z+w|$, $|z-w|$ са дължините на диагоналите му, а числата $|z|$, $|w|$ — на страните му. Така тъждеството съответства на известното свойство на успоредника: сумата от квадратите на диагоналите е равна на сумата от квадратите на страните.

г) *Упътване.* Използвайте равенството $|a|^2 = a\overline{a}$, $a \in \mathbb{C}$.

е) Избираме $\sqrt{z}$ и $\sqrt{w}$ така, че $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$. Тогава $|z+w+2\sqrt{zw}| + |z+w-2\sqrt{zw}| = |\sqrt{z}+\sqrt{w}|^2 + |\sqrt{z}-\sqrt{w}|^2$. Сега твърдението следва от в).

ж) *Упътване.* Повдигнете двете страни на равенството на квадрат и използвайте равенството $|a|^2 = a\overline{a}$, $a \in \mathbb{C}$.

1.8. Да се докаже неравенството:

а) $\big||z| - |w|\big| \le |z \pm w| \le |z| + |w|$;

б) $\big(|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|\big)/\sqrt{2} \le |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;

в) $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \le |\arg z|$. Изтълкувайте го геометрично;

г) $|z-1| \le \big||z|-1\big| + |z||\arg z|$;

д) $|z+w| \ge \dfrac{1}{2}\,(|z|+|w|)\left|\dfrac{z}{|z|} + \dfrac{w}{|w|}\right|$.

Решение. а) От зад. 1.7 а), предвид очевидните неравенства $\operatorname{Re}(z\overline{w}) \le |\operatorname{Re}(z\overline{w})| \le |z\overline{w}| = |z|\,|w|$, следва

$$(1)\quad |z+w|^2 \le |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2 \iff |z+w| \le |z| + |w|.$$

Оттук, заменяйки w с $-w$, получаваме $|z-w| \leq |z|+|w|$. За да докажем и лявата страна на неравенството, записваме $z = (z-w)+w$, $w = (w-z)+z$ и прилагаме (1). Получаваме $|z| - |w| \leq |z - w|$ и $|w| - |z| \leq |z - w|$, т. е. $\big||z|-|w|\big| \leq |z-w|$. Оттук след замяната на w с $-w$ следва и $\big||z|-|w|\big| \leq |z+w|$.

б) Нека $z = x+iy$. Неравенствата са еквивалентни на $(|x| + |y|)^2/2 \leq x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2$, т. е. на очевидните неравенства $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ и $2|x|\,|y| \geq 0$. Равенство в лявата страна се достига, ако $|x| = |y|$, а в дясната — ако или $x = 0$, или $y = 0$.

в) Нека $z = |z|e^{i\alpha}$, $\alpha = \arg z$, е тригонометричният вид на z. Имаме

$$\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| = |e^{i\alpha} - 1| = \left|e^{i\frac{\alpha}{2}}\right|\left|e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right| = \left|2i\sin\frac{\alpha}{2}\right| \leq 2\left|\frac{\alpha}{2}\right| = |\alpha|.$$

Тук сме използвали известното неравенство $|\sin x| \leq |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Геометрично неравенството означава, че дължината на дъгата от единичната окръжност с краища точките 1 и $e^{i\alpha}$ е по-голяма от дължината на хордата с краища същите точки.

Равенство се достига само ако $z > 0$, $\arg z = 0$.

г) *Упътване.* Следва от в) и неравенството на триъгълника.

д) Като повдигнем на квадрат, използваме равенството $|a|^2 = a\overline{a}$ и приведем под общ знаменател, получаваме, че даденото неравенство е еквивалентно на

$$4|z|\,|w|\left(|z|^2+|w|^2+z\overline{w}+\overline{z}w\right) \geq \left(|z|^2+|w|^2+2|z|\,|w|\right)(2|z|\,|w|+z\overline{w}+\overline{z}w)\,,$$

или, предвид $z\overline{w} + \overline{z}w = 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$, на

$$|z|\,|w|(|z| - |w|)^2 \geq \operatorname{Re}(z\overline{w})(|z| - |w|)^2.$$

При $|z| = |w|$ то е тривиално, а при $|z| \neq |w|$ е еквивалентно на очевидното неравенство $|z|\,|w| \geq \operatorname{Re}(z\overline{w})$.

Равенство се достига или ако $|z| = |w|$, или ако $z\overline{w} > 0$, т. е. ако z и w лежат на окръжност с център 0 или на лъч с начало 0.

1.9. Да се докаже, че съществува множество $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ от индекси, така че

$$\left|\sum_{k\in S} z_k\right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{n}|z_k|, \quad z_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Решение. Нека $\sigma=\sum\limits_{k=1}^{n}|z_k|$. Правите $y=\pm x$ разделят комплексната равнина на четири квадранта. Поне в един от тях, да го означим с A, сумата на числата $|z_k|$, $z_k\in A$, е по-голяма или равна на $\sigma/4$. Без ограничение ще считаме, че $A=\{z=x+iy:|y|\le x\}$. Очевидно за $z\in A$ имаме $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}x=\sqrt{2}\operatorname{Re}z$. Тогава ако $S=\{k:z_k\in A\}$, то

$$\left|\sum_{k\in S}z_k\right|\ge\left|\operatorname{Re}\left(\sum_{k\in S}z_k\right)\right|=\sum_{k\in S}\operatorname{Re}z_k\ge\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k\in S}|z_k|\ge\frac{1}{4\sqrt{2}}\sigma.$$

1.10. Да се пресметне:
а) $(1+i\sqrt{3})^7+(1-i\sqrt{3})^7$; **б)** $(1+i)^{100}(1-i\sqrt{3})^{-51}$;
в) $(e^{i\alpha}+e^{i\beta})/(e^{i\alpha}-e^{i\beta})$; **г)** $1+\cos\alpha+\dots+\cos n\alpha$;
д) $\sin\alpha+\sin3\alpha+\dots+\sin(2n-1)\alpha$; **е)** $\sin\alpha-\sin2\alpha+\dots+(-1)^{n-1}\sin n\alpha$;
ж) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$;
з) $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}$;
и) $1+2\cos\alpha+\dots+(n+1)\cos n\alpha$; **к)** $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\dots+\cos^2 n\alpha$;
л) $\cos\alpha+\binom{n}{1}\cos2\alpha+\dots+\binom{n}{n}\cos(n+1)\alpha$; **м)** $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$;
н) $1-\cos^n\frac{\pi}{n}+\cos^n\frac{2\pi}{n}-\dots+(-1)^{n-1}\cos^n\frac{(n-1)\pi}{n}$.

Решение. а) Нека $a=1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Тогава $1-i\sqrt{3}=\overline{a}$ и $a^7+(\overline{a})^7=a^7+\overline{(a^7)}=2\operatorname{Re}a^7=2.2^7\cos\frac{7\pi}{3}=2^7$.

б) Тъй като $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, то $(1+i)^{100}(1-i\sqrt{3})^{-51}=(\sqrt{2})^{100}e^{25i\pi}2^{-51}e^{17i\pi}=2^{-1}e^{42i\pi}=2^{-1}$.

в) От формулите на Ойлер следва, че

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

и

$$e^{i\alpha}-e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)=2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Тогава $(e^{i\alpha}+e^{i\beta})/(e^{i\alpha}-e^{i\beta})=-i\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}$.

г) Нека $A=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\alpha$ и $B=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\alpha$, $\alpha\ne2k\pi$. Тогава $S=A+iB=1+\sum\limits_{k=1}^{n}(\cos k\alpha+i\sin k\alpha)=1+\sum\limits_{k=1}^{n}e^{ik\alpha}=\sum\limits_{k=0}^{n}(e^{i\alpha})^k$ е сума на геометрична прогресия с първи член 1 и частно $e^{i\alpha}$, т. е. $S = \dfrac{e^{i(n+1)\alpha}-1}{e^{i\alpha}-1}$. Както във в), пресмятаме $S = \dfrac{\sin(n+1)\alpha/2}{\sin\alpha/2}e^{i\frac{n\alpha}{2}}$ и получаваме $A = \operatorname{Re} S = \dfrac{\sin(n+1)\alpha/2.\cos n\alpha/2}{\sin\alpha/2}$ и $B = \operatorname{Im} S = \dfrac{\sin(n+1)\alpha/2.\sin n\alpha/2}{\sin\alpha/2}$.

Ако $\alpha = 2k\pi$, то $A = n+1$, $B = 0$.

д) *Отг.* $\sin^2 n\alpha/\sin\alpha$, $\alpha \neq k\pi$.

е) *Отг.* $\dfrac{\sin k\alpha.\cos(2k-1)\alpha/2}{\cos\alpha/2}$ при $n = 2k-1$ и $-\dfrac{\sin k\alpha.\cos(2k+1)\alpha/2}{\cos\alpha/2}$ при $n = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$, $\alpha \neq \pi + 2s\pi$, $s \in \mathbb{Z}$.

ж) За търсената сума S имаме

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{Re}\left(e^{i\frac{\pi}{11}} + e^{i\frac{3\pi}{11}} + e^{i\frac{5\pi}{11}} + e^{i\frac{7\pi}{11}} + e^{i\frac{9\pi}{11}}\right) \\ &= \operatorname{Re} e^{i\frac{\pi}{11}} \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^5}{1-e^{i\frac{2\pi}{11}}} = \operatorname{Re}\frac{e^{i\frac{\pi}{11}} - e^{i\frac{11\pi}{11}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{11}}} \\ &= \operatorname{Re}\frac{e^{i\frac{\pi}{11}}+1}{1-e^{i\frac{2\pi}{11}}} = \operatorname{Re}\frac{1}{1-e^{i\frac{\pi}{11}}} = \operatorname{Re}\frac{e^{-i\frac{\pi}{22}}}{-2i\sin\pi/22} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

з) *Отг.* $-1/2$.

и) Ако $z = e^{i\alpha}$, $\alpha \neq 2k\pi$, то за търсената сума S имаме

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{Re}(1 + 2z + \cdots + (n+1)z^n) = \operatorname{Re}(1 + z + \cdots + z^{n+1})' \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{z^{n+2}-1}{z-1}\right)' = \operatorname{Re}\frac{(n+1)e^{i(n+2)\alpha} - (n+2)e^{i(n+1)\alpha} + 1}{(e^{i\alpha}-1)^2} \\ &= \operatorname{Re}\frac{(n+1)e^{i(n+1)\alpha} - (n+2)e^{in\alpha} + e^{-i\alpha}}{(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}})^2} \\ &= \frac{(n+2)\cos n\alpha - (n+1)\cos(n+1)\alpha - \cos\alpha}{4\sin^2\alpha/2}. \end{aligned}$$

При $\alpha = 2k\pi$ имаме $S = (n+1)(n+2)/2$.

к) *Отг.* $\dfrac{n}{2} + \dfrac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$, $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

л) От една страна,

$$e^{i\alpha}(1+e^{i\alpha})^n = e^{i(n+2)\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)^n = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}e^{i(n+2)\frac{\alpha}{2}}.$$

От друга страна,

$$e^{i\alpha}(1+e^{i\alpha})^n = e^{i\alpha} + \binom{n}{1}e^{i2\alpha} + \dots + \binom{n}{k}e^{i(k+1)\alpha} + \dots + \binom{n}{n}e^{i(n+1)\alpha}.$$

Като отделим в двете страни реалната част, получаваме

$$S = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos(n+2)\frac{\alpha}{2}.$$

м) Тъй като $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, са корените на $z^n - 1 = 0$, то $z^n - 1 = (z-1)(z-z_1)\dots(z-z_{n-1})$. От друга страна, $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1)$. Оттук заключаваме, че $(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1}) = z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1$ за всяко $z \neq 1$. Понеже от двете страни на равенството стоят полиноми, то е в сила за всяко z. В частност при $z = 1$ получаваме $(1-z_1)(1-z_2)\dots(1-z_{n-1}) = n$. Оттук, предвид $|1-z_k| = \left|e^{i\frac{k\pi}{n}}\right| \left|e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$, следва $2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = n$, т. е. $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = n/2^{n-1}$.

н) Нека $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$. Тогава

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\frac{k\pi}{n} &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^{kn}(z^k+z^{-k})^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}(z^{2k}+1)^n \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}z^{k(2n-2\nu)} = \frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\sum_{k=0}^{n-1}z^{k(2n-2\nu)} = \frac{n}{2^{n-1}},\end{aligned}$$

защото $\sum\limits_{k=0}^{n-1}z^{k(2n-2\nu)} = 0$ за $\nu \neq 0$, n (Проверете!).

1.11. Нека $a \in \mathbb{C}$ и $|a| < 1$. Да се докаже, че

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \lesseqqgtr 1 \iff |z| \lesseqqgtr 1.$$

Решение. Имаме

$$\begin{gathered}\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \lesseqqgtr 1 \iff \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|^2 \lesseqqgtr 1 \iff |z-a|^2 \lesseqqgtr |1-\overline{a}z|^2 \\ \iff (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) \lesseqqgtr (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) \\ \iff |z|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2 \lesseqqgtr 1 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2|z|^2 \\ \iff |z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2 \lesseqqgtr 0 \iff (|z|^2-1)(1-|a|^2) \lesseqqgtr 0 \\ \iff |z|^2 - 1 \lesseqqgtr 0 \iff |z| \lesseqqgtr 1.\end{gathered}$$

1.12. Нека $a \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Im} a > 0$. Да се докаже, че

$$\left|\frac{z-a}{z-\overline{a}}\right| \underset{>}{\leqq} 1 \iff \operatorname{Im} z \underset{<}{\geqq} 0.$$

* * *

1.13. Да се изобрази в комплексната равнина множеството от точки z, за които:

а) $\operatorname{Re} z < 0$;

б) $\operatorname{Im} z \le 1$;

в) $|\operatorname{Re} z| < 1$;

г) $|\operatorname{Im} z| < 1$, $|\operatorname{Re} z| > 1$;

д) $|z - i| < 1$;

е) $|z-1| \le |z-3|$;

ж) $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$;

з) $\arg \dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{\pi}{4}$;

и) $1 < |z-1| < 2$, $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$;

к) $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

л) $\operatorname{Im} z^2 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

м) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = \lambda$, $\lambda > 0$;

н) $|z|^2 = \operatorname{Re} z$;

о) $|z-1| + |z+1| = R$, $R > 0$;

п) $|z+i| - |z-i| = R$, $R > 0$;

р) $|z| = 1 - \operatorname{Re} z$;

с) $\operatorname{Re} \dfrac{z}{1-z} > 0$;

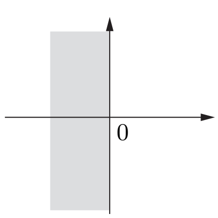
т) $1 < \left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| < 2$.

Решение. а) Полуравнината, наляво от ординатната ос (фиг. 1.3).

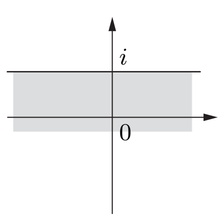
б) Затворената полуравнина под правата $y = 1$ (фиг. 1.4).

в) Ивицата между правите $x = -1$ и $x = 1$ (фиг. 1.5).

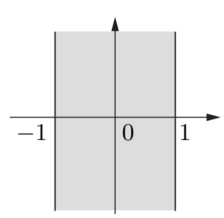
г) Множеството е показано на фиг. 1.6.



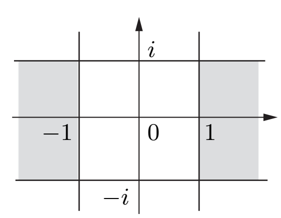
Фиг. 1.3



Фиг. 1.4



Фиг. 1.5

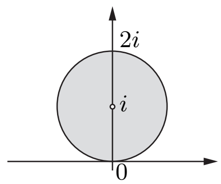


Фиг. 1.6

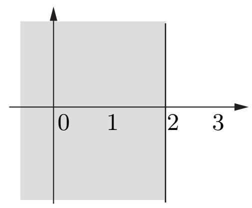
д) Кръгът с център i и радиус 1 (фиг. 1.7).

е) Затворената полуравнина, наляво от правата $x = 2$ (фиг. 1.8).

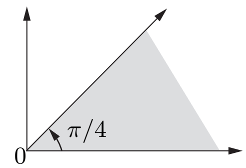
ж) Ъгълът с рамене Ox^+ и ъглополовящата на първи квадрант (фиг. 1.9).



Фиг. 1.7

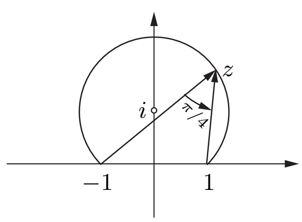


Фиг. 1.8

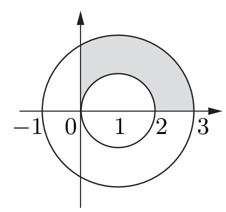


Фиг. 1.9

з) Геометричното място на точки, от които отсечката $[-1,1]$ се вижда под ъгъл $\dfrac{\pi}{4}$. Вземете предвид, че $\arg\dfrac{z-1}{z+1} = \arg(z-1) - \arg(z+1)$ е ориентираният ъгъл между векторите $z+1$ и $z-1$ (фиг. 1.10).



Фиг. 1.10



Фиг. 1.11

и) Частта от венеца между окръжностите $|z-1|=1$ и $|z-1|=2$, разположена в първи квадрант (фиг. 1.11).

к) Ако $z = x+iy$, то $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = \operatorname{Re}\dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. Тогава ако $\lambda = 0$, търсеното множество е имагинерната ос, а ако $\lambda \neq 0$, това е окръжността $\left(x-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2$ с център $\dfrac{1}{2\lambda}$ и радиус $\dfrac{1}{2|\lambda|}$.

л) Ако $z = x+iy$, множеството е хиперболата $2xy = \lambda$.

м) Ако $\lambda = 1$, това е множеството от точки, които са на равно разстояние от -1 и от 1, т. е. симетралата на отсечката $[-1,1]$. Ако $\lambda \neq 1$, като положим $z = x+iy$ и използваме връзката $z\overline{z} = |z|^2 = x^2+y^2$, получаваме, че множеството се състои от точките, чиито координати удовлетворяват уравнението

$$x^2+y^2-2\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}x = -1,$$

което е еквивалентно на

$$\left(x-\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2.$$

Следователно търсеното множество е окръжността с център $(1+\lambda^2)/(1-\lambda^2)$ и радиус $2|\lambda|/|1-\lambda^2|$.

н) Окръжността $x^2+y^2=x$ с център $1/2$ и радиус $1/2$.

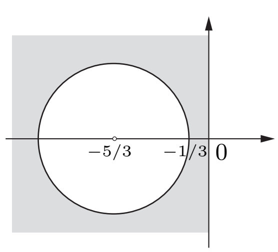
о) Като използваме неравенството на триъгълника и дефиницията на елипса, получаваме, че търсеното множество е: празното множество, ако $R<2$, отсечката $[-1,1]$, ако $R=2$, и елипса с фокуси -1, 1, ако $R>2$.

п) Хипербола с фокуси $\pm i$ и оси — координатните оси.

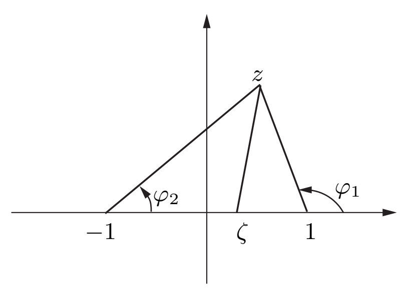
р) Параболата $y^2=1-2x$ с връх $1/2$ и ос — абсцисната ос.

с) Кръгът $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ с център $\dfrac{1}{2}$ и радиус $\dfrac{1}{2}$.

т) Множеството $\left\{z:1<\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\right\}=\{z:|z+1|<|z-1|\}$ е полуравнината, наляво от ординатната ос, т.е. $\operatorname{Re} z<0$. Множеството $\left\{z:\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<2\right\}$ е областта, която съдържа 1 и е оградена от окръжността $\left(x+\dfrac{5}{3}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$ (вж. м) с $\lambda=2$). Следователно търсеното множество е лявата полуравнина, от която е изваден кръгът $\left|z+\dfrac{5}{3}\right|\le\dfrac{4}{3}$ (фиг. 1.12).



Фиг. 1.12



Фиг. 1.13

1.14. Да се докаже, че за всяко $z\in\mathbb{C}$ двете стойности на $\sqrt{z^2-1}$ лежат на права през началото, успоредна на ъглополовящата на $\triangle(-1,1,z)$, прекарана през върха z.

Решение. Нека $\arg(z-1)=\varphi_1$, $\arg(z+1)=\varphi_2$ и (z,ζ) е ъглополовящата на $\sphericalangle(-1,z,1)$ (фиг. 1.13). Тогава $\sphericalangle(-1,z,1)=\varphi_1-\varphi_2$, $\sphericalangle(\zeta,z,1)=(\varphi_1-\varphi_2)/2$ и $\sphericalangle(1,\zeta,z)=\varphi_1-(\varphi_1-\varphi_2)/2=(\varphi_1+\varphi_2)/2$.

Стойностите на $\sqrt{z^2-1}$ са $\pm\sqrt{|z^2-1|}e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}$, така че те лежат на права през началото, сключваща с Ox^+ ъгъл $(\varphi_1+\varphi_2)/2$, т. е. тя е успоредна на правата (ζ, z).

1.15. Да се реши уравнението

$$(z+a)^n - e^{i\alpha}(z-a)^n = 0, \quad a \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

и да се докаже, че корените му лежат на симетралата на отсечката $[-a, a]$ и са различни.

Решение. Уравнението е еквивалентно на $[(z+a)/(z-a)]^n = e^{i\alpha}$. Оттук следва $|z+a| = |z-a|$, т. е. z лежи на симетралата на $[-a, a]$. Като коренуваме, за корените z_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, получаваме $\dfrac{z_k+a}{z_k-a} = e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$ или $z_k = a\dfrac{e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}+1}{e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}-1} = a\dfrac{e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{2n}}+e^{-i\frac{\alpha+2k\pi}{2n}}}{e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{2n}}-e^{-i\frac{\alpha+2k\pi}{2n}}} = -ia\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+2k\pi}{2n}$.

1.16. Да се реши уравнението

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}, \quad a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

и да се докаже, че корените му са реални и различни.

Отг. $z_k = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi+2k\pi}{2n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, където $\varphi = \arg\dfrac{1+ia}{1-ia}$.

1.17. Нека точките $z_1, z_2, \ldots, z_n$ лежат в една и съща полуравнина, определена от права l през началото на координатната система, като поне една от тях не лежи на l. Да се докаже, че:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k \neq 0$;

б) съществува полуравнина с гранична права p, която съдържа точките $\dfrac{1}{z_1}, \dfrac{1}{z_2}, \ldots, \dfrac{1}{z_n}$ и $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{z_k} \neq 0$. Коя е тази права?

Решение. Нека $H = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \arg z \leq \alpha+\pi\}$ е полуравнината с гранична права l, която съдържа точките z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тъй като $\arg\dfrac{1}{z} = -\arg z$, то точките $\dfrac{1}{z_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, ще принадлежат на множеството $\{\zeta \in \mathbb{C} : -\alpha-\pi \leq \arg\zeta \leq -\alpha\}$, което е полуравнината, симетрична на H относно реалната права и имаща за граница правата p, симетрична на l. Следователно е достатъчно да се докаже само а).

а) Без ограничение можем да считаме, че l е имагинерната ос и точките $z_1, z_2, \ldots, z_n$ лежат в дясната полуравнина $\operatorname{Re} z > 0$. (Това винаги можем да постигнем, като приложим подходящо въртене.)

Така поне за едно k имаме $\operatorname{Re} z_k > 0$. Тогава $\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} z_k > 0$ и $\sum_{k=1}^{n} z_k \neq 0$.

1.18 (Теорема на Гаус-Люка). Да се докаже, че ако $P(z)$ е произволен полином, то нулите на $P'(z)$ се съдържат в най-малкото изпъкнало множество, съдържащо нулите на $P(z)$.

Решение. Тъй като най-малкото изпъкнало множество, съдържащо нулите на $P(z)$ (т. е. изпъкналата обвивка на нулите на $P(z)$), е сечение на затворени полуравнини, достатъчно е да покажем, че ако нулите $z_1, z_2, \ldots, z_n$ на $P(z)$ лежат в една затворена полуравнина H, то и нулите на $P'(z)$ лежат в H. Отново (както в зад. 1.17 а)) можем да считаме, че $H = \{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$. В противен случай прилагаме подходящи транслация и въртене. Тъй като $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$, то $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z - z_k}$, и ако z_0 е нула на $P'(z)$, то $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z_0 - z_k} = 0$. Ако допуснем, че $z_0 \notin H$, т. е. $\operatorname{Re} z_0 < 0$, то от $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z_0 - z_k} = \operatorname{Re} \dfrac{\overline{z_0 - z_k}}{|z_0 - z_k|^2} = \operatorname{Re} \dfrac{z_0 - z_k}{|z_0 - z_k|^2} = \operatorname{Re} \dfrac{z_0}{|z_0 - z_k|^2} - \operatorname{Re} \dfrac{z_k}{|z_0 - z_k|^2} < 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, би следвало, че точките $\dfrac{1}{z_0 - z_1}, \dfrac{1}{z_0 - z_2}, \ldots, \dfrac{1}{z_0 - z_n}$ лежат в лявата полуравнина $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ и, съгласно зад. 1.17, $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{z_0 - z_k} \neq 0$. Полученото противоречие доказва твърдението.

* * *

Навсякъде по-долу с малки букви a, b, c, … ще означаваме комплексните числа, съответстващи на точките A, B, C, …

1.19. Нека $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$. Да се докаже, че за всяко z от правата през z_1 и z_2 съществува $t \in \mathbb{R}$ така, че $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$ (параметрично уравнение на права). За кои стойности на t числото z принадлежи на отсечката $[z_1, z_2]$?

Решение. За $z \in (z_1, z_2)$ векторите $z - z_1$ и $z_2 - z_1$ са колинеарни и значи съществува $t \in \mathbb{R}$, такова че $z - z_1 = t(z_2 - z_1)$. Ако z лежи върху лъча $(z_1, z_2)^{\rightarrow}$, тези вектори са еднопосочни, така че $t \geq 0$. Ако z е от противоположния лъч, имаме $t \leq 0$. Ако $z \in [z_1, z_2]$, получаваме $t \geq 0$ и

$t = |z - z_1|/|z_2 - z_1| \leq 1$. Следователно $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0, 1]$, е уравнението на отсечката $[z_1, z_2]$.

1.20. Нека точката z дели отсечката $[z_1, z_2]$ вътрешно в отношение $\lambda > 0$. Да се докаже, че $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

Решение. Тъй като $z \in [z_1, z_2]$, то $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0, 1]$, т. е. $z - z_1 = t(z_2 - z_1)$. Оттук следва, че $z - z_2 = (t - 1)(z_2 - z_1)$. Тогава $\lambda = \dfrac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \dfrac{t}{1 - t}$, откъдето намираме $t = \dfrac{\lambda}{1 + \lambda}$. Следователно $z = z_1 + \dfrac{\lambda}{1 + \lambda}(z_2 - z_1) = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

1.21. Да се докаже, че средата на отсечката $[z_1, z_2]$ е $z = \dfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$, а медицентърът на $\triangle(z_1, z_2, z_3)$ е $z = \dfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$.

Решение. От зад. 1.20 при $\lambda = 1$ получаваме, че $z = \dfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$ е средата на отсечката $[z_1, z_2]$. Ако z е медицентърът на $\triangle(z_1, z_2, z_3)$, то той дели отсечката $\left[z_3, \dfrac{1}{2}(z_1 + z_2)\right]$ в отношение $\lambda = 2$ и пак от зад. 1.20 следва, че $z = \dfrac{z_3 + 2\dfrac{z_1 + z_2}{2}}{3} = \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

1.22. Да се докаже, че триъгълниците $\triangle(z_1, z_2, z_3)$ и $\triangle(z_1', z_2', z_3')$ са подобни и еднакво ориентирани тогава и само тогава, когато

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{z_3' - z_1'}{z_2' - z_1'}. \tag{2}$$

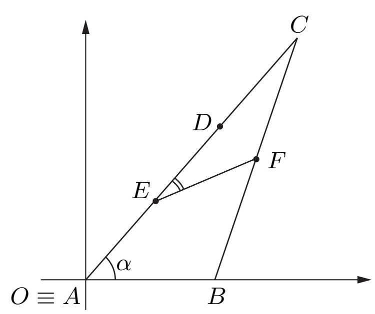
Решение. Нека е изпълнено (2) и α, α' са ъглите в триъгълниците съответно при върховете z_1 и z_1', ориентирани в посока, обратна на движението на часовниковата стрелка. Тогава от (2) следва $\arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1) = \arg(z_3' - z_1') - \arg(z_2' - z_1')$, т. е. $\alpha = \alpha'$. Освен това, пак от (2), имаме $\dfrac{|z_3 - z_1|}{|z_3' - z_1'|} = \dfrac{|z_2 - z_1|}{|z_2' - z_1'|}$, т. е. страните, сключващи ъгъл $\alpha = \alpha'$, са пропорционални. Следователно $\triangle(z_1, z_2, z_3)$ и $\triangle(z_1', z_2', z_3')$ са подобни и еднакво ориентирани. Ясно е, че е вярно и обратното.

1.23. В $\triangle ABC$, $\sphericalangle BAC = \alpha$ и $AC > AB$. Върху страната AC е взета точката D така, че $CD = AB$. Нека E е средата на AD, а F — средата на BC. Да се намери $\sphericalangle CEF$.

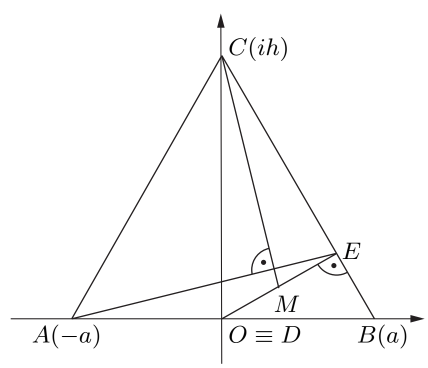
Решение. Без ограничение ще считаме, че (фиг. 1.14) A е началото на координатната система и $B \in Ox^+$. Тогава $f = \dfrac{b+c}{2}$, $d = c - be^{i\alpha}$ и $e = \dfrac{c - be^{i\alpha}}{2}$. Търсеният ъгъл $\sphericalangle CEF$ е разлика на аргументите на числата $c - e$ и $f - e$, т. е. $\sphericalangle CEF = \alpha - \arg(f - e)$. Имаме

$$f - e = \frac{b + be^{i\alpha}}{2} = \frac{1}{2}b(1 + e^{i\alpha}) = \frac{b}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}) = b\cos\frac{\alpha}{2}e^{i\frac{\alpha}{2}},$$

т. е. $|f - e| = b\cos\alpha/2$ и $\arg(f - e) = \alpha/2$. Следователно $\sphericalangle CEF = \alpha/2$.



Фиг. 1.14



Фиг. 1.15

1.24. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) D е средата на AB. Нека $DE \perp BC$ ($E \in BC$) и M е средата на DE. Да се докаже, че $AE \perp CM$.

Решение. Нека $AB = 2a$ и $CD = h$. Да изберем AB за реална ос, D за координатно начало и DC за имагинерна ос (фиг. 1.15). Тогава на точките A, B и C съответстват комплексните числа $-a$, a и ih.

Условието $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{MC}$ е еквивалентно на условието отношението на съответните им комплексни числа да бъде чисто имагинерно число, т. е. $ih - m = i\lambda(e + a)$, където $\lambda > 0$. За да докажем това равенство, предвид $m = e/2$, ще изразим e чрез a и h. Уравнението на правата BC (вж. зад. 1.19) е $z = a + t(ih - a)$, а тъй като векторът $i(ih - a)$ е перпендикулярен на BC, то уравнението на правата DE е $z = si(ih - a)$, $s \in \mathbb{R}$. За E, като пресечна точка на BC и DE, получаваме уравнението $a + t(ih - a) = -s(h + ia)$, откъдето, като отделим реалната и имагинерната част и решим системата за s и t, получаваме $s = -ah/(a^2 + h^2)$. Следователно $e = ah(h + ia)/(a^2 + h^2)$. Имаме $ih - m = ih - \dfrac{e}{2} =$

$ih(a^2+2h^2+iah)/2(a^2+h^2)$, $e+a = a(a^2+2h^2+iah)/(a^2+h^2)$ и $ih-m = i\dfrac{h}{2a}(e+a)$. С това твърдението е доказано.

1.25. Върху страните AC и BC на $\triangle ABC$ външно са построени равнобедрени правоъгълни триъгълници ACC_1 и BCC_2 с прав ъгъл при върха C. Нека M е средата на C_1C_2. Да се докаже, че $CM \perp AB$ и $AB = 2CM$.

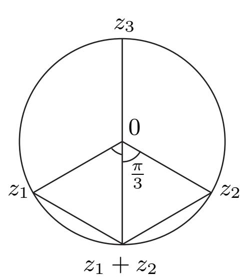
Решение. По условие $c_1-c = -i(a-c)$, $c_2-c = i(b-c)$ и $m = (c_1+c_2)/2$. Тогава $m-c = (c_1+c_2-2c)/2 = i(-a+c+b-c)/2 = i(b-a)/2$. Това означава, че $CM = |m-c| = |b-a|/2 = AB/2$ и $CM \perp AB$.

1.26. Нека $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Да се докаже, че следните твърдения са еквивалентни:

1) $z_1+z_2+z_3 = 0$.

2) Точките z_1, z_2, z_3 са върхове на равностранен триъгълник.

3) Съществува $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$, такова че z_1, z_2, z_3 са корените на уравнението $z^3 - a = 0$.



Фиг. 1.16

Решение. Без ограничение ще считаме, че точките z_1, z_2, z_3 са разположени върху единичната окръжност в посока, обратна на посоката на движение на часовниковата стрелка (фиг. 1.16).

1) $\Rightarrow$ 2). Преди всичко ще отбележим, че успоредникът с върхове в точките 0, z_1, z_1+z_2, z_2 е ромб със страна 1, защото $|z_1| = |z_2| = 1$. От равенството $z_3 = -(z_1+z_2)$ следва, че диагоналът му $[0, z_1+z_2]$ е също с дължина 1 и тогава $\sphericalangle(z_1, 0, z_2) = 2\pi/3$. Освен това пак от същото равенство следва, че точката z_3 е симетрична на z_1+z_2 относно нулата. Това означава, че и $\sphericalangle(z_2, 0, z_3) = \sphericalangle(z_3, 0, z_1) = 2\pi/3$, защото $[0, z_1+z_2]$ е ъглополовяща на $\sphericalangle(z_1, 0, z_2)$. Следователно $z_2 = z_1 e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = z_2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_1 e^{i\frac{4\pi}{3}}$, откъдето получаваме $|z_2-z_1| = |z_3-z_2| = |z_3-z_1| = \sqrt{3}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Нека $z_1 = e^{i\varphi}$. Тогава $z_2 = z_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i(\varphi+\frac{2\pi}{3})}$, $z_3 = z_1 e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i(\varphi+\frac{4\pi}{3})}$, т. е. z_1, z_2, z_3 са корените на уравнението $z^3 = a$, където $a = e^{i3\varphi}$.

3) $\Rightarrow$ 1). Следва от формулите на Виет.

1.27. Нека $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_4$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$. Да се докаже, че следните твърдения са еквивалентни:

1) $z_1+z_2+z_3+z_4 = 0$.

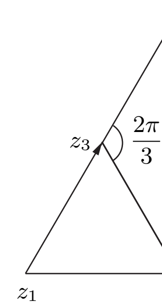
2) Точките z_1, z_2, z_3, z_4 са върхове на правоъгълник.

3) Съществуват $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = 1$, такива че z_1, z_2, z_3, z_4 са корените на уравнението $(z^2 - a^2)(z^2 - b^2) = 0$.

Упътване за 1) $\Rightarrow$ 2). Докажете, че четириъгълникът с върхове в точките $z_1 + z_2$, $z_2 + z_3$, $z_3 + z_4$, $z_4 + z_1$ е ромб със страна 2, в който z_1, z_2, z_3, z_4 са средите на страните му.

1.28. Да се докаже, че точките z_1, z_2, z_3 са върхове на положително (отрицателно) ориентиран равностранен триъгълник тогава и само тогава, когато $z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2 = 0$ $(z_1\omega^2 + z_2\omega + z_3 = 0)$, където $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Решение. Нека z_1, z_2, z_3 са върхове на положително ориентиран равностранен триъгълник (фиг. 1.17). Тогава $(z_2 - z_3)\omega = z_3 - z_1$, т. е. $z_1 + z_2\omega + z_3(-\omega - 1) = 0$. От друга страна, $\omega^3 = 1 \iff (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$, откъдето $\omega^2 = -\omega - 1$. Следователно $z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2 = 0$. Ясно е, че е вярно и обратното.



Фиг. 1.17

1.29. Триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ са равностранни и еднакво ориентирани. Да се докаже, че средите на отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 са върхове на равностранен триъгълник със същата ориентация.

Решение. Нека триъгълниците са положително ориентирани. Имаме $a + b\omega + c\omega^2 = 0$ и $a_1 + b_1\omega + c_1\omega^2 = 0$. Оттук, като съберем почленно и разделим на 2, получаваме $\dfrac{a + a_1}{2} + \dfrac{b + b_1}{2}\omega + \dfrac{c + c_1}{2}\omega^2 = 0$. Тъй като $\dfrac{a + a_1}{2}$, $\dfrac{b + b_1}{2}$ и $\dfrac{c + c_1}{2}$ са средите съответно на отсечките AA_1, BB_1 и CC_1, твърдението следва от зад. 1.28.

1.30. Върху страните на $\triangle ABC$ външно (вътрешно) са построени равностранни триъгълници. Да се докаже, че:

а) центровете A_0, B_0, C_0 на тези триъгълници,

б) средите на отсечките AA_0, BB_0, CC_0

са върхове на равностранен триъгълник.

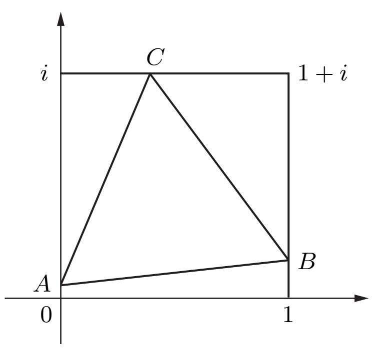
Решение. Ще изложим решение само за равностранните триъгълници, построени външно. Нека те са ABC_1, BCA_1, CAB_1 с центрове съответно C_0, A_0, B_0 и са отрицателно ориентирани.

а) *Упътване.* Като използвате зад. 1.21, докажете, че $a_0 + b_0\omega + c_0\omega^2 = 0$.

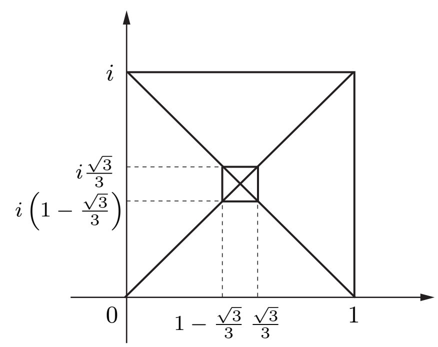
б) Нека a', b', c' са средите съответно на отсечките AA_0, BB_0, CC_0. Имаме $2a' = a+(b+c+a_1)/3$, $2b' = b+(c+a+b_1)/3$ и $2c' = c+(a+b+c_1)/3$. Ще докажем, че $a'\omega^2 + b'\omega + c' = 0$. По условие $a_1\omega^2 + b\omega + c = 0$, $a\omega^2 + b_1\omega + c = 0$ и $a\omega^2 + b\omega + c_1 = 0$, откъдето $a_1\omega^2 = -b\omega - c$, $b_1\omega = -a\omega^2 - c$ и $c_1 = -a\omega^2 - b\omega$. Тогава $6(a'\omega^2 + b'\omega + c') = 3a\omega^2 + b\omega^2 + c\omega^2 + a_1\omega^2 + 3b\omega + c\omega + a\omega + b_1\omega + 3c + a + b + c_1 = 3a\omega^2 + b\omega^2 + c\omega^2 - b\omega - c + 3b\omega + c\omega + a\omega - a\omega^2 - c + 3c + a + b - a\omega^2 - b\omega = a\omega^2 + b\omega^2 + c\omega^2 + b\omega + c\omega + a\omega + c + a + b = (a + b + c)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$.

1.31. Да се намери геометричното място на центровете на равностранните триъгълници, вписани в квадрат със страна 1.

Решение. Без ограничение можем да считаме, че квадратът е с върхове в точките 0, 1, $1+i$, i, и нека равностранният $\triangle ABC$ е вписан в квадрата (фиг. 1.18). Ясно е, че никоя страна на $\triangle ABC$ не лежи на стра-



Фиг. 1.18



Фиг. 1.19

на на квадрата. Освен това от съображение за симетрия е достатъчно да разгледаме само случая $A \in [0, i]$, $B \in [1, 1+i]$ и $C \in [i, 1+i]$. Тогава комплексните числа, съответстващи на точките A, B и C, са ia, $1+ib$ и $c+i$, където $a, b, c \in [0, 1]$. По условие $ia + (1+ib)\omega + (c+i)\omega^2 = 0$, откъдето, като отделим реална и имагинерна част, следва $c = \sqrt{3} - 1 - b\sqrt{3}$ и $2a - b - c\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 0$. Заместваме c във второто равенство и получаваме $b = 2 - \sqrt{3} - a$, а оттам и $c = 2 - \sqrt{3} + a\sqrt{3}$. Тъй като $b, c \in [0, 1]$, то оттук следва, че $a \in [0, 2-\sqrt{3}]$. За центъра m на $\triangle ABC$ имаме $m = (ia + 1 + ib + c + i)/3 = (3 - \sqrt{3} + a\sqrt{3})/3 + i(3 - \sqrt{3})/3$. Така $\operatorname{Im} m = (3-\sqrt{3})/3$, $\operatorname{Re} m = (3-\sqrt{3}+a\sqrt{3})/3$, като, предвид $a \in [0, 2-\sqrt{3}]$, $(3-\sqrt{3})/3 \le \operatorname{Re} m \le \sqrt{3}/3$. Следователно m описва отсечката, успоредна на реалната ос с краища $1-\sqrt{3}/3+i(1-\sqrt{3}/3)$ и $\sqrt{3}/3+i(1-\sqrt{3}/3)$. Останалите случаи на разположение на точките A, B и C получаваме чрез симетрия относно диагоналите и центъра на квадрата. Така търсеното геометрично място е квадрат със страни, успоредни на координатните оси, и върхове в точките $1-\sqrt{3}/3+i(1-\sqrt{3}/3)$, $\sqrt{3}/3+i(1-\sqrt{3}/3)$, $\sqrt{3}/3+i\sqrt{3}/3$ и $1-\sqrt{3}/3+i\sqrt{3}/3$ (фиг. 1.19).

1.32. Нека $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ са два еднакво ориентирани квадрата. Да се докаже, че:

а) средите на отсечките AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 са върхове на квадрат със същата ориентация;

б) $AA_1^2+CC_1^2=BB_1^2+DD_1^2$.

Решение. Без ограничение ще считаме, че квадратите са положително ориентирани. Преди всичко да отбележим, че необходимите и достатъчни условия за това точките A, B, C и D да бъдат върхове на положително ориентиран квадрат са

$$c=b+i(b-a) \text{ и } d=a+i(b-a). \tag{3}$$

а) За средите A_0, B_0, C_0, D_0 съответно на отсечките AA_1, BB_1, CC_1 DD_1 имаме $a_0=(a+a_1)/2$, $b_0=(b+b_1)/2$, $c_0=(c+c_1)/2$, $d_0=(d+d_1)/2$. Непосредствено се проверява, че те удовлетворяват (3).

б) Равенството $AA_1^2+CC_1^2=BB_1^2+DD_1^2$ е еквивалентно на $|a-a_1|^2+|c-c_1|^2=|b-b_1|^2+|d-d_1|^2$. От (3) следва $c-c_1=(1+i)(b-b_1)-i(a-a_1)$ и $d-d_1=i(b-b_1)+(1-i)(a-a_1)$. Като използваме равенството $|z|^2=z\overline{z}$, получаваме

$$|c-c_1|^2=|a-a_1|^2+2|b-b_1|^2-2\operatorname{Re}(1-i)(\overline{a-a_1})(b-b_1)$$

и

$$|d-d_1|^2=2|a-a_1|^2+|b-b_1|^2-2\operatorname{Re}(1-i)(\overline{a-a_1})(b-b_1),$$

откъдето следва твърдението.

1.33. Нека $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ са три квадрата, като $A\equiv A_1$ и $C\equiv C_2$. Да се докаже, че $D_1D_2\perp BM$ и $D_1D_2=2BM$, където M е средата на B_1B_2.

Решение. Без ограничение на общността можем да считаме, че B е началото на координатната система. Тогава (направете чертеж) твърдението е еквивалентно на равенството $d_1 - d_2 = 2im$. То се проверява директно, като вземем предвид, че по условие $d_1 - a = i(b_1 - a)$, $d_2 - c = i(c - b_2)$, $a = ic$ и $m = (b_1 + b_2)/2$.

1.34. Върху страните на четириъгълника $ABCD$ външно са построени еднакво ориентирани подобни триъгълници AMB, BNC, CPD и DQA. Да се намери необходимо и достатъчно условие отсечките MP и NQ да бъдат равни и взаимно перпендикулярни.

Решение. Отсечките MP и NQ са равни и взаимно перпендикулярни точно когато $p - m = i(n - q)$. По условие (вж. зад. 1.22)

$$\frac{m-a}{b-a} = \frac{n-b}{c-b} = \frac{p-c}{d-c} = \frac{q-d}{a-d} = \alpha.$$

Имаме $p - m = \alpha(d - b) + (1 - \alpha)(c - a)$ и $n - q = (\alpha - 1)(d - b) + \alpha(c - a)$. Тогава $p - m = i(n - q) \iff (\alpha - i\alpha + i)[d - b - i(c - a)] = 0$. Оттук следва, че или $\alpha - i\alpha + i = 0$, или $d - b = i(c - a)$. Ако е изпълнено първото, то $\alpha = (1-i)/2 = (1/\sqrt{2})e^{-i\frac{\pi}{4}}$ и триъгълниците са равнобедрени и правоъгълни. Ако $d - b = i(c - a)$, то четириъгълникът $ABCD$ е с равни и взаимно перпендикулярни диагонали.

Така ако $MP = NQ$ и $MP \perp NQ$, то или триъгълниците AMB, BNC, CPD и DQA са равнобедрени и правоъгълни, или четириъгълникът $ABCD$ е с равни и взаимно перпендикулярни диагонали.

Обратно, всяко от тези условия е достатъчно за това отсечките MP и NQ да бъдат равни и взаимно перпендикулярни.

1.35. Да се докаже, че лицето S на:

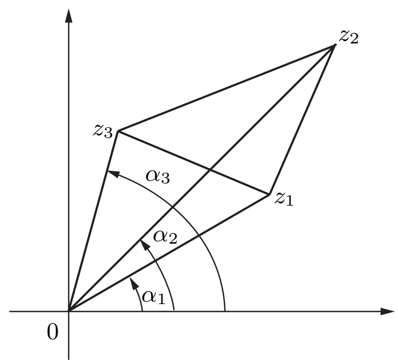
а) триъгълника с върхове в точките z_1, z_2, z_3 е

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_2 z_3 + \overline{z}_3 z_1);$$

б) изпъкналия многоъгълник с върхове в точките $z_1, z_2, \ldots, z_n$ е

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_2 z_3 + \cdots + \overline{z}_n z_1).$$

Решение. а) Без ограничение можем да считаме, че $\arg z_1 \le \arg z_2 \le \arg z_3$ (иначе ще преномерираме точките). Нека $\alpha_k = \arg z_k$, $k = 1, 2, 3$.



Фиг. 1.20

Имаме (вж. фиг. 1.20)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_2 z_3 + \overline{z}_3 z_1) \\
&\quad = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(|z_1|\,|z_2|e^{i(\alpha_2-\alpha_1)} + |z_2|\,|z_3|e^{i(\alpha_3-\alpha_2)} + |z_3|\,|z_1|e^{i(\alpha_1-\alpha_3)}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}(|z_1|\,|z_2|\sin(\alpha_2-\alpha_1) + |z_2|\,|z_3|\sin(\alpha_3-\alpha_2) - |z_3|\,|z_1|\sin(\alpha_3-\alpha_1)) \\
&\quad = S_{\triangle(0,z_1,z_2)} + S_{\triangle(0,z_2,z_3)} - S_{\triangle(0,z_1,z_3)} = S_{\triangle(z_1,z_2,z_3)}.
\end{aligned}$$

б) *Упътване.* Прекарайте диагонала $[z_1, z_{n-1}]$ и разсъждавайте по индукция.

§ 2. $\mathbb{C}$-диференцируемост. Холоморфни функции. Уравнения на Коши — Риман

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ и $f(z)$ е комплекснозначна функция, дефинирана в нейна околност.

Дефиниция 2.1. Функцията $f(z)$ се нарича $\mathbb{C}$-*диференцируема* (*комплексно-диференцируема*) в z_0, ако съществува

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

Тази граница се означава с $f'(z_0)$ и се нарича *производна* на f в z_0.

Функцията $f(z)$ е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0 тогава и само тогава, когато съществуват константа $a \in \mathbb{C}$ и функция $\varepsilon(z)$, $\lim\limits_{z\to z_0} \varepsilon(z) = 0$, така че

$$f(z) = f(z_0) + a(z-z_0) + (z-z_0)\varepsilon(z).$$

Имаме $a = f'(z_0)$.

Ако $f(z)$ е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0, то частните ѝ производни $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$, $z = x+iy$, съществуват и $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0. \tag{1}$$

Ако $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$, то частните производни на u и v в z_0 съществуват и ако в (1) отделим реална и имагинерна част, получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \tag{2}$$

Връзките (1) и (2) се наричат *уравнения* (*условия*) *на Коши — Риман*. Те са необходими, но не са достатъчни за $\mathbb{C}$-диференцируемост.

Дефиниция 2.2. Функцията $f(z)$ се нарича $\mathbb{R}$-*диференцируема* в $z_0 = x_0 + iy_0$, ако съществуват константи $a, b \in \mathbb{C}$ и функция $\gamma(z)$, $\lim\limits_{z\to z_0} \gamma(z) = 0$, така че

$$f(z) = f(z_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + (z-z_0)\gamma(z).$$

Имаме $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ и $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Условията на Коши — Риман и $\mathbb{R}$-диференцируемостта на f в z_0 са необходими и достатъчни за $\mathbb{C}$-диференцируемост.

Ако $f = u + iv$, частните производни $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ съществуват, непрекъснати са в z_0 и удовлетворяват условията на Коши — Риман, то f е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0.

Ако въведем формални частни производни $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ чрез равенствата

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

то уравнението на Коши — Риман е еквивалентно на $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

Дефиниция 2.3. Функцията $f(z)$ се нарича *холоморфна* в z_0, ако тя е $\mathbb{C}$-диференцируема в нейна околност. Тя се нарича холоморфна в отвореното множество $D \subset \mathbb{C}$, ако е холоморфна във всяка точка на D.

Дефиниция 2.4. Функцията $w(x, y)$ се нарича *хармонична* в отвореното множество D, ако е двукратно гладка и

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Ако f е холоморфна в D, то $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ са хармонични функции в D. Обратно, ако реалнозначната функция $u(x, y)$ е хармонична в едносвързана област D, то съществува реалнозначна и хармонична в D функция $v(x, y)$, така че функцията $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, е холоморфна в D. Функцията v се нарича хармонично-спрегната на u.

Дефиниция 2.5. Нека $f(z)$ е дефинирана и непрекъсната в околност на $z_0 \in \mathbb{C}$. Изображението $w = f(z)$ се нарича *конформно* в z_0, ако то запазва ъглите между кривите през z_0 по големина и ориентировка.

Нека $f(z)$ е холоморфна в z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Ако γ е гладка крива през z_0, чиято тангента в z_0 сключва с Ox^+ ориентиран ъгъл α, то образът ѝ $\Gamma = f(\gamma)$ е гладка крива в околност на $f(z_0)$ и тангентата ѝ в $f(z_0)$ сключва с Ox^+ ориентиран ъгъл $\alpha + \arg f'(z_0)$. Оттук следва, че ако $f'(z_0) \neq 0$, то изображението $w = f(z)$ е конформно в z_0.

По-нататък освен означенията за частни производни $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ и т. н. ще използваме и обичайните f_x, f_{xy}, f_z, $f_{\overline{z}}$ и т. н.

2.1. Да се докаже, че функцията $f(z) = \operatorname{Re} z$ не е $\mathbb{C}$-диференцируема в никое $z \in \mathbb{C}$.

Решение. Имаме $(f(z+h) - f(z))/h = \operatorname{Re} h/h$ за всяко $z \in \mathbb{C}$. Тогава

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = 1, \text{ докато } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in i\mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = 0 \neq 1.$$

2.2. Да се докаже, че функцията

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

е холоморфна в $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, но не е $\mathbb{C}$-диференцируема в $z = 0$.

Решение. В $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ тя е суперпозиция на холоморфните функции $g(w) = e^w$ и $h(z) = -1/z^4$.

За $z = 0$ имаме

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{R}}} \frac{f(z)}{z} = \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{R}}} \frac{e^{-1/z^4}}{z} = 0, \text{ докато } \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \rho>0}} \left|\frac{f(\rho e^{i\frac{\pi}{4}})}{\rho e^{i\frac{\pi}{4}}}\right| = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \rho>0}} \frac{e^{1/\rho^4}}{\rho} = \infty.$$

2.3. Да се докаже, че функцията

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}, & z = x+iy \neq 0,\\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

удовлетворява уравненията на Коши — Риман в $z = 0$, но не е $\mathbb{C}$-диференцируема в тази точка.

Решение. Пресмята се, че $f_x(0) = f_y(0) = 0$ и следователно условията на Коши — Риман $f_x(0) + if_y(0) = 0$ са удовлетворени. От друга страна, при $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, получаваме

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^2}{(1+\alpha^2)x^2} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Тъй като тази граница варира с α, то f не е $\mathbb{C}$-диференцируема в $z = 0$.

2.4. Да се намерят всички точки $z \in \mathbb{C}$, в които е $\mathbb{C}$-диференцируема функцията:

а) $f(z) = x^2 + iy^2$;
б) $f(z) = x^3y^2 + ix^2y^3$;
в) $f(z) = x^2y^3 + ix^3y^2$;
г) $f(z) = x^3 - 3xy^2 - x + i(3x^2y - y^3 - y)$;
д) $f(z) = x^4y^5 + ixy^3$;
е) $f(z) = x^2 \sin y + ix$;
ж) $f(z) = y^2 \sin x + iy$;
з) $f(z) = \sin^2(x+y) + i\cos^2(x+y)$;
и) $f(z) = -6(\cos x + i \sin x) + (2-2i)y^3 + 15(y^2 + 2y)$;
к) $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$.

Холоморфна ли е f в тези точки?

Решение. а) Функциите $u = x^2$ и $v = y^2$ имат непрекъснати частни производни за всяко $z \in \mathbb{C}$. Условията на Коши — Риман са изпълнени точно когато $x = y$, т. е. функцията е $\mathbb{C}$-диференцируема във всяка точка на правата $y = x$ и само там. Тя не е холоморфна в никоя от тях, защото тази права няма вътрешни точки в топологията на $\mathbb{C}$.

б) Условията на Коши — Риман са изпълнени точно когато $2x^3y = -2xy^3$, т. е. когато $xy = 0$. Следователно f е $\mathbb{C}$-диференцируема върху всяка точка от координатните оси. Не е холоморфна.

в) *Отг.* Всяка точка от координатните оси. Не е холоморфна.

г) *Отг.* Всяко $z \in \mathbb{C}$. Холоморфна е.

д) Уравненията на Коши — Риман водят до системата $xy^2(4x^2y^3-3) = 0$, $y^3(5x^4y+1) = 0$. Всяка точка $(x, 0)$ е решение на тази система. Ако $y \neq 0$ (тогава и $x \neq 0$), то от $y^3 = \dfrac{3}{4x^2} > 0$ следва $y > 0$ и тогава $5x^4y+1 > 1$, т. е. други решения освен $(x, 0)$ няма. Така f е $\mathbb{C}$-диференцируема върху реалната ос, но не е холоморфна.

е) Сега системата е: $2x \sin y = 0$, $x^2 \cos y = -1 \iff \sin y = 0$, $\cos y = -1$, $x^2 = 1$.

Отг. Всяка точка $z = \pm 1 + i(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Не е холоморфна.

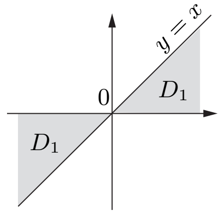
ж) *Отг.* $z = 2k\pi \pm i$, $k \in \mathbb{Z}$. Не е холоморфна.

з) *Отг.* Всяка точка от правите $y = -x + k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Не е холоморфна.

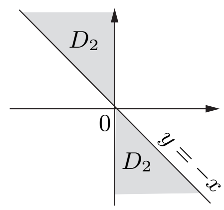
и) От условията на Коши — Риман получаваме $\sin x = -y^2$, $\cos x = y^2 + 5y + 5$. От първото уравнение следва $y \in [-1, 1]$, а тъй като $y^2 + 5y + 5 \geq 1 \geq \cos x$ за $y \in [-1, 1]$ (защо?) и всяко x, то системата е еквивалентна на $\sin x = -1$, $\cos x = 1$.

Отг. Няма такива точки.

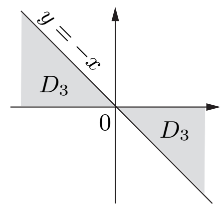
к) Ако $z = x + iy$ принадлежи на множеството $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : x^2 - y^2 > 0,\ xy > 0\}$ (фиг. 2.1), то $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$ и функцията е холоморфна. Ако $z \in D_2 = \{z \in \mathbb{C} : x^2 - y^2 < 0,\ xy < 0\}$ (фиг. 2.2), то $f(z) = -z^2$ и също е холоморфна. При $z \in D_3 = \{z \in \mathbb{C} : x^2 - y^2 > 0,\ xy < 0\}$ (фиг. 2.3) $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy = \overline{z}^2$ и не е $\mathbb{C}$-диференцируема. При $z \in D_4 = \{z \in \mathbb{C} : x^2 - y^2 < 0,\ xy > 0\}$ (фиг. 2.4) $f(z) = -\overline{z}^2$ и не е $\mathbb{C}$-диференцируема. Върху правите $x = 0$, $y = 0$, $x = y$ и $x = -y$, без началото $z = 0$, функцията не е $\mathbb{C}$-диференцируема, както се вижда от вида ѝ съответно в D_1, D_2, D_3 и D_4. Пак от направените по-горе разглеждания имаме $|f(z)| = |z|^2$ за всяко $z \in \mathbb{C}$. Следователно при



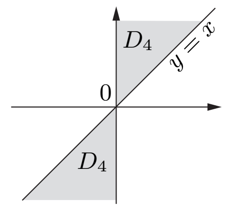
Фиг. 2.1



Фиг. 2.2



Фиг. 2.3



Фиг. 2.4

$z = 0$ функцията f е $\mathbb{C}$-диференцируема (вж. зад. 2.12).

Отг. $z \in D_1 \cup D_2 \cup \{0\}$. Холоморфна в $D_1 \cup D_2$.

2.5. Да се намерят всички точки $z \in \mathbb{C}$, в които е $\mathbb{C}$-диференцируема функцията:

а) $f(z) = |z|^2(|z|^2 - 2)$; **б)** $f(z) = \sin |z|^2$; **в)** $f(z) = z(z + \overline{z}^2)$.

Решение. а) $f(z) = z\overline{z}(z\overline{z} - 2)$, $f_{\overline{z}} = 2z(|z|^2 - 1)$. Търсените точки са решения на уравнението $f_{\overline{z}} = 0$, което ни дава $z \in \{z : |z| = 1\} \cup \{0\}$.

б) *Отг.* $z = 0$ и $|z| = \sqrt{\pi/2 + k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$.

в) *Отг.* $z = 0$.

2.6. Да се намери холоморфна функция $f(z) = u + iv$, за която:

а) $u(x, y) = 2x(1 - y)$;

б) $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$;

в) $u(x, y) = ax^2y + bxy^2 + cy^3$, $a, b, c \in \mathbb{R}$;

г) $u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$;

д) $v(x, y) = 2xy - e^y \cos x$;

е) $v(x, y) = y/(x^2 + y^2)$, $f(2) = 0$;

ж) $u(x, y) = e^x[(x^2 - y^2) \cos y - 2xy \sin y]$, $f(0) = 0$.

Решение. а) От уравненията на Коши — Риман имаме $v_y = u_x = 2(1 - y)$ и $v_x = -u_y = 2x$. Интегрираме първото уравнение по y при фиксирано x. Тогава $v = 2y - y^2 + \varphi(x)$, където интеграционната константа $\varphi(x)$ е двукратно гладка функция на x. Като заместим във второто от горните уравнения, получаваме $\varphi'(x) = 2x$, т. е. $\varphi(x) = x^2 + C$, където $C \in \mathbb{R}$ е произволна константа. Тогава $v = x^2 - y^2 + 2y + C$ и $f(z) = u + iv = 2x - 2xy + i(x^2 - y^2) + 2iy + Ci = 2(x + iy) + i(x^2 - y^2 + 2ixy) + iC = 2z + iz^2 + iC$.

б) *Отг.* $v = 4xy - x^3 + 3xy^2 + C$, $f(z) = 2z^2 - iz^3 + iC$.

в) Имаме

$$v_y = u_x = 2axy + by^2, \quad v_x = -u_y = -ax^2 - 2bxy - 3cy^2,$$

откъдето след интегриране и заместване получаваме

$$v = axy^2 + \frac{b}{3}y^3 + \varphi(x), \quad \varphi'(x) = -ax^2 - ay^2 - 2bxy - 3cy^2$$

и $\varphi(x) = -\dfrac{1}{3}ax^3 - (a+3c)xy^2 - bx^2y + d$. Тъй като φ е функция само на x, последното равенство е възможно само ако $a = -3c$, $b = 0$. Тогава $u = -3cx^2y + cy^3$, $v = -3cxy^2 + cx^3 + d$ и $f(z) = u + iv = ic(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) + id = i(cz^3 + d)$, $d \in \mathbb{R}$.

г) От уравненията на Коши — Риман намираме $v = e^{-x}(y\sin y + x\cos y) + C$ и тогава

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + ie^{-x}(y\sin y + x\cos y) + iC \\
&= e^{-x}\left(x\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} - y\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\right) \\
&+ ie^{-x}\left(y\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} + x\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\right) + iC \\
&= i(x+iy)e^{-(x+iy)} + iC = ize^{-z} + iC, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

д) *Отг.* $u = x^2 - y^2 - e^y \sin x + C$, $f(z) = z^2 - ie^{-iz} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

е) *Отг.* $u = -\dfrac{x}{x^2+y^2} + \dfrac{1}{2}$, $f(z) = -\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2}$.

ж) *Отг.* $f(z) = z^2e^z$.

2.7. Нека $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е двукратно гладка функция. Да се намери холоморфна функция $f = u + iv$, за която:

а) $u(x,y) = \varphi(xy)$; **б)** $u(x,y) = \varphi(y/x)$;

в) $u(x,y) = \varphi\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)$; **г)** $u(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$;

д) $u(x,y) = \varphi(\cos x \operatorname{ch} y)$; **е)** $u(x,y) = \varphi(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

Решение. Нека $u(x,y) = \varphi(t)$, където $\varphi(t)$ е двукратно гладка функция на реалната променлива t, а $t = t(x,y)$ е двукратно гладка функция на x и y. Тогава

$$u_x = \varphi' t_x, \quad u_{xx} = \varphi'' t_x^2 + \varphi' t_{xx}, \quad u_{yy} = \varphi'' t_y^2 + \varphi' t_{yy},$$

откъдето

$$\Delta u = \varphi''(t_x^2 + t_y^2) + \varphi' \Delta t. \tag{3}$$

а) Тъй като u е хармонична функция и $t = xy$, то $\Delta u = \Delta t = 0$ и от (3) получаваме $\varphi''(t) = 0$, откъдето $\varphi(t) = At + B$, $A, B \in \mathbb{R}$, и $u = Axy + B$. Сега от уравненията на Коши — Риман намираме $v = \frac{A}{2}(y^2 - x^2) + C$, а оттам и $f(z) = -i\frac{A}{2}z^2 + B + iC$, $A, B, C \in \mathbb{R}$.

б) Сега $t = \frac{y}{x}$ и от (3) получаваме $(1 + t^2)\varphi'' + 2t\varphi' = 0$, откъдето $\varphi = A \operatorname{arctg} t + B$ и следователно $u = A \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + B$.

Отг. $v = -A \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C$, $f(z) = -iA \log z + B + iC$, $A, B, C \in \mathbb{R}$.

в) *Отг.* $\varphi = \frac{A}{t} + B$, $u = \frac{Ax}{x^2 + y^2} + B$, $v = -\frac{Ay}{x^2 + y^2} + C$, $f(z) = \frac{A}{z} + B + iC$, $A, B, C \in \mathbb{R}$.

г) *Отг.* $\varphi = At + B$, $u = A(x^2 - y^2) + B$, $v = 2Axy + C$, $f(z) = Az^2 + B + iC$, $A, B, C \in \mathbb{R}$.

д) *Отг.* $\varphi = At + B$, $u = A \cos x \operatorname{ch} y + B = A \cos x \cos iy + B$, $v = -A \sin x \operatorname{sh} y + C = iA \sin x \sin iy + C$, $f(z) = A \cos z + B + iC$, $A, B, C \in \mathbb{R}$.

е) *Отг.* $f(z) = A\sqrt{z} + iB + C$, $A, B, C \in \mathbb{R}$.

2.8. Да се докаже, че ако $f(z) = u + iv$ е холоморфна в област D и стойностите ѝ лежат на:

а) правата $au + bv + c = 0$,

б) окръжността $(u - a)^2 + (v - b)^2 = R^2$,

то $f \equiv \text{const}$ в D.

Решение. а) Диференцирайки $au + bv + c = 0$ по x и y, получаваме $au_x + bv_x = 0$, $au_y + bv_y = 0$. Оттук и от условията на Коши — Риман намираме $au_x - bu_y = 0$, $au_y + bu_x = 0$. Детерминантата на тази система относно неизвестните u_x и u_y е $a^2 + b^2 \neq 0$ и следователно тя има само нулевото решение $u_x = u_y = 0$ в D, откъдето $u = \text{const}$. Аналогично $v = \text{const}$.

2.9. Да се докаже, че ако f е цяла функция (т. е. холоморфна в $\mathbb{C}$) и $f(z) = u(x) + iv(y)$, то $f(z) = az + b$.

Решение. Тъй като u и v са хармонични, то $\Delta u = u'' = 0$, $\Delta v = v'' = 0 \Rightarrow u(x) = ax + \beta$, $v(y) = a_1 y + \beta_1$. От $u_x = v_y$ получаваме $a = a_1$.

Следователно

$$f(z) = u(x) + iv(y) = a(x + iy) + \beta + i\beta_1 = az + b, \quad b = \beta + i\beta_1.$$

2.10. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област. Да се намерят всички холоморфни в D функции $f = u + iv$, за които $u^2 + iv^2$ е също холоморфна.

Отг. $f(z) \equiv \text{const}$.

2.11. Нека $f = u + iv$ е холоморфна в област $D \subset \mathbb{C}$ и $u = \varphi(v)$, където φ е двукратно гладка в $\mathbb{R}$. Да се докаже, че $f(z) \equiv \text{const}$, $z \in D$.

Решение. Тъй като u и v са хармонични и $\Delta u = (v_x^2 + v_y^2)\varphi'' + \varphi'\Delta v = 0$, то

$$(v_x^2 + v_y^2)\varphi'' = 0. \tag{4}$$

Ако $v_x^2 + v_y^2 = 0$ за всяко $z \in D$, то $v_x = v_y = 0$, откъдето $v \equiv \text{const}$ в D. Тогава (зад. 2.8 а)) $f(z) \equiv \text{const}$, $z \in D$.

Ако $v_x^2 + v_y^2 \neq 0$ в точка $z_0 \in D$, то $v_x^2 + v_y^2 \neq 0$ в околност U на z_0 и от (4) следва $\varphi''(t) = 0$ за всяко $t \in v(U)$. Тъй като $v \not\equiv \text{const}$ в U, то $v(U)$ съдържа отворен интервал Δ. Тогава $\varphi(t) = at + b$, $t \in \Delta$, $a, b \in \mathbb{R}$, откъдето $u(z) = av(z) + b$ в отвореното подмножество $v^{-1}(\Delta)$ на U, т.е. стойностите на f за $z \in v^{-1}(\Delta)$ лежат върху правата $u = av + b$ и съгласно зад. 2.8 а) $f(z) \equiv \text{const}$ в отворен кръг $U_1 \subset v^{-1}(\Delta)$. От теоремата за единственост (вж. § 10) получаваме $f(z) \equiv \text{const}$, $z \in D$.

2.12. Да се докаже, че функцията $f(z) = |z|^2$ е $\mathbb{C}$-диференцируема в $z = 0$ и не е $\mathbb{C}$-диференцируема в никое $z \neq 0$. Да се покаже, че при $z \neq 0$ множеството от точките на сгъстяване на диференчното частно $\zeta(h) = (f(z + h) - f(z))/h$ е окръжността $C(\overline{z}, |z|)$.

Решение. При $z = 0$ имаме $\lim\limits_{h\to 0} \zeta(h) = \lim\limits_{h\to 0}(f(0 + h) - f(0))/h = \lim\limits_{h\to 0} \overline{h} = 0$.

Ако $z \neq 0$, като използваме равенството $a\overline{a} = |a|^2$, за $\zeta(h)$ имаме

$$\zeta(h) = \frac{|z + h|^2 - |z|^2}{h} = \overline{h} + \overline{z} + z\frac{\overline{h}}{h}.$$

Следователно $|\zeta(h) - \overline{z} - \overline{h}| = |z|$, откъдето, ако ζ_0 е точка на сгъстяване за $\zeta(h)$, при $h \to 0$ ще получим $|\zeta_0 - \overline{z}| = |z|$, т.е. $\zeta_0 \in C(\overline{z}, |z|)$.

Обратно, ако $\overline{z} + ze^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, е произволна точка от $C(\overline{z}, |z|)$, като изберем нарастване $h = \rho e^{-i\frac{\alpha}{2}}$, $\rho > 0$, ще получим

$$\lim_{\rho\to 0} \zeta(\rho e^{-i\frac{\alpha}{2}}) = \overline{z} + ze^{i\alpha},$$

т. е. всяка точка от $C(\overline{z}, |z|)$ е точка на сгъстяване за диференчното частно $\zeta(h)$.

2.13. Да се докаже, че функцията $f(z) = |z|$ никъде не е $\mathbb{C}$-диференцируема. За всяко $z \in \mathbb{C}$ да се намери множеството от точките на сгъстяване на диференчното частно $\zeta(h) = (|z+h| - |z|)/h$ при $h \to 0$.

Решение. 1) Нека $z = 0$. Тогава $\zeta(h) = |h|/h$, т. е. $|\zeta(h)| = 1$ за всяко $h \in \mathbb{C}$. Следователно всяка точка на сгъстяване ζ_0 на $\zeta(h)$ при $h \to 0$ лежи на окръжността $C(0,1)$. Обратно, ако $e^{i\alpha}$ е произволна точка от тази окръжност, то като изберем $h = \rho e^{-i\alpha}$, $\rho > 0$, ще получим $\lim\limits_{\rho\to 0} \zeta(\rho e^{-i\alpha}) = e^{i\alpha}$. Така множеството от точките на сгъстяване е единичната окръжност $C(0,1)$.

2) Нека $z = re^{i\beta}$, $r > 0$. Тогава

$$\zeta(h) = \frac{|z+h| - |z|}{h} = \frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h(|z+h| + |z|)} = \frac{\overline{h} + \overline{z}}{|z+h| + |z|} + \frac{z}{|z+h| + |z|}\frac{\overline{h}}{h},$$

откъдето получаваме

$$\left|\zeta(h) - \frac{\overline{z} + \overline{h}}{|z+h| + |z|}\right| = \frac{|z|}{|z+h| + |z|}.$$

Оттук при $h \to 0$ следва, че ако ζ_0 е точка на сгъстяване за $\zeta(h)$, тя ще удовлетворява равенството

$$\left|\zeta_0 - \frac{\overline{z}}{2|z|}\right| = \frac{1}{2},$$

т. е. $\zeta_0 \in C\left(\dfrac{\overline{z}}{2|z|}, \dfrac{1}{2}\right) = C\left(\dfrac{e^{-i\beta}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Обратно, ако $\zeta_0 = \dfrac{e^{-i\beta}}{2} + \dfrac{e^{i\alpha}}{2}$ е произволна точка от тази окръжност, като изберем $h = \rho e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$, получаваме

$$\lim_{\rho\to 0} \zeta\left(\rho e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{-i\beta} + \frac{1}{2}e^{i\alpha} = \zeta_0.$$

Така множеството от точките на сгъстяване на диференчното частно е окръжността $C\left(\dfrac{\overline{z}}{2|z|}, \dfrac{1}{2}\right)$.

2.14. Да се докаже, че ако $f(z) = u + iv$ е функция, за която

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{Re} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

съществува, то $u_x(z_0)$ и $v_y(z_0)$ съществуват и са равни.

Решение. Нека $A = \lim\limits_{h\to 0} \operatorname{Re} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$. Като оставим в това равенство h да клони към нула първо чрез реални, а после чрез чисто имагинерни стойности, ще получим

$$A = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{u(z_0+h) - u(z_0)}{h} = u_x(z_0)$$

и

$$A = \lim_{\substack{ih\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{v(z_0+ih) - v(z_0)}{h} = v_y(z_0).$$

2.15. Да се докаже, че относно променливите z и $\overline{z}$ операторът на Лаплас $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ се записва във вида $4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$.

Упътване. Извършете формалната смяна на променливите $z = x+iy$, $\overline{z} = x - iy$.

2.16. Нека $w(z)$ е дадена функция, dz е нарастването на z и $\alpha = \arg dz$. Да се докаже равенството:

а) $dw = w_z\, dz + w_{\overline{z}}\, d\overline{z}$; **б)** $\dfrac{dw}{dz} = w_z + w_{\overline{z}} e^{-2i\alpha}$;

в) $\max\limits_{\alpha} \left|\dfrac{dw}{dz}\right| = |w_z| + |w_{\overline{z}}|$; **г)** $\min\limits_{\alpha} \left|\dfrac{dw}{dz}\right| = \big||w_z| - |w_{\overline{z}}|\big|$.

Решение. а) От $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ и дефиницията на диференциал на функция на две променливи имаме

$$\begin{aligned} dw = w_x\, dx + w_y\, dy &= w_x \frac{dz + d\overline{z}}{2} + w_y \frac{dz - d\overline{z}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}(w_x - iw_y)\, dz + \frac{1}{2}(w_x + iw_y)\, d\overline{z} = w_z\, dz + w_{\overline{z}}\, d\overline{z}. \end{aligned}$$

б) Получава се от а), като разделим на dz и вземем предвид, че $d\overline{z}/dz = e^{-2i\alpha}$. Оттук следва, че $w(z)$ е холоморфна точно тогава, когато $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{\partial w}{\partial z}$.

в) От неравенството на триъгълника имаме

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| \leq \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right| + \left|\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\right|,$$

като равенство се достига точно когато $\arg w_z = \arg(w_{\overline{z}} e^{-2i\alpha})$, т. е. при $\alpha = (\arg w_{\overline{z}} - \arg w_z)/2$.

г) Получава се както в), като равенство се достига при $\arg(e^{-2i\alpha} w_{\overline{z}}) = \pi + \arg w_z$.

2.17. Да се реши задача 2.13, като се използва задача 2.16 б).

Решение. При $z = 0$ твърдението е очевидно. При $z \neq 0$ от $f^2(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ следва $2ff_z = \overline{z}$, $2ff_{\overline{z}} = z$. Това ни дава $f_z = \overline{z}/2|z|$, $f_{\overline{z}} = z/2|z|$. Като заместим в 2.16 б), получаваме

$$\left|\frac{df}{dz} - \frac{\overline{z}}{2|z|}\right| = \left|\frac{z}{2|z|} e^{-2i\alpha}\right| = \frac{1}{2},$$

т. е. точките на сгъстяване $\dfrac{df}{dz}$ на диференчното частно на f по кое да е направление $e^{i\alpha}$ лежат на окръжността $C\left(\dfrac{\overline{z}}{2|z|}, \dfrac{1}{2}\right)$. Обратно, ако $\zeta_0 = \dfrac{\overline{z}}{2|z|} + \dfrac{z}{2|z|} e^{-2i\alpha}$ е произволна точка от тази окръжност, то точката на сгъстяване $\dfrac{df}{dz}$ по направлението $\arg dz = \alpha$ удовлетворява равенството

$$\frac{df}{dz} = \frac{\overline{z}}{2|z|} + \frac{z}{2|z|} e^{-2i\alpha}$$

и следователно лежи на тази окръжност.

2.18. Да се докаже, че ако $f(z)$ е $\mathbb{R}$-диференцируема в точката z_0 и съществува

$$\lim_{z \to z_0} \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right|,$$

то или $f(z)$, или $\overline{f(z)}$ е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0.

Решение. От $\mathbb{R}$-диференцируемостта на $f(z)$ за границата на модула на диференчното частно при $h = h_1 + ih_2 \to 0$ имаме

$$A = \lim_{h \to 0} \left|\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}\right| = \lim_{h \to 0} \left|\frac{h_1 f_x(z_0) + h_2 f_y(z_0)}{h}\right|.$$

Ако на h дадем първо реални стойности, т. е. $h_2 = 0$, после чисто имагинерни стойности, т. е. $h_1 = 0$, и накрая стойности върху бисектрисата на първи и трети квадрант, т. е. $h_1 = h_2$, ще получим

$$A = |f_x| = |f_y| = |f_x + f_y|/\sqrt{2}$$

или, като повдигнем на квадрат,

$$|f_x|^2 = |f_y|^2 \quad \text{и} \quad 2|f_x|^2 = |f_x + f_y|^2 = |f_x|^2 + |f_y|^2 + 2\operatorname{Re} f_x\overline{f_y},$$

т. е. $|f_x|^2 = |f_y|^2$ и $\operatorname{Re} f_x\overline{f_y} = 0$. Оттук за $u = \operatorname{Re} f$ и $v = \operatorname{Im} f$ следва

$$u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2, \tag{5}$$

$$u_x u_y = -v_x v_y. \tag{6}$$

От (6) имаме $u_x = \rho v_x$, $v_y = -\rho u_y$. Като заместим в (5), получаваме $v_x^2 = u_y^2$, т. е. $v_x = \pm u_y$. Ако $v_x = u_y$, от (6) получаваме $u_x = -v_y$, т. е. функцията $u - iv = \overline{f(z)}$ е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0. Ако $v_x = -u_y$, от (6) следва $u_x = v_y$, т. е. $f = u + iv$ е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0.

2.19. Нека $f(z) = u + iv$ е дефинирана в област D, има непрекъснати частни производни f_x и f_y и $u_y^2 + v_y^2 \neq 0$ в D. Да се докаже, че ако f запазва правите ъгли между кривите, то или f, или $\overline{f}$ е холоморфна в D.

Решение. Нека

$$l_1 : z = z_0 + te^{i\varphi}, \qquad l_2 : z = z_0 + ite^{i\varphi}$$

са два перпендикулярни лъча с начало $z_0 \in D$. Техните образи са кривите

$$L_1 : w_1(t) = f(z_0 + te^{i\varphi}), \qquad L_2 : w_2(t) = f(z_0 + ite^{i\varphi}).$$

Векторите

$$w_1'(0) = u_x(z_0)\cos\varphi + u_y(z_0)\sin\varphi + i(v_x(z_0)\cos\varphi + v_y(z_0)\sin\varphi),$$
$$w_2'(0) = -u_x(z_0)\sin\varphi + u_y(z_0)\cos\varphi + i(-v_x(z_0)\sin\varphi + v_y(z_0)\cos\varphi)$$

лежат върху допирателните към L_1 и L_2 в точката $f(z_0)$ и следователно са ортогонални. За скаларното им произведение имаме

$$(u_y^2+v_y^2-u_x^2-v_x^2)\sin\varphi\cos\varphi-(u_xu_y+v_xv_y)\sin^2\varphi+(u_xu_y+v_xv_y)\cos^2\varphi = 0.$$

Оттук при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$ намираме

$$u_x u_y + v_x v_y = 0, \quad u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2.$$

От първото уравнение следва $u_x = \lambda v_y$, $v_x = -\lambda u_y$, където функцията $\lambda = \lambda(x, y)$ е непрекъсната в D поради условието $u_y^2 + v_y^2 \neq 0$. Като заместим във второто, получаваме $\lambda^2 = 1$, т. е. $\lambda = \pm 1$. Поради непрекъснатостта в областта D (свързано множество!) оттук следва, че $\lambda \equiv 1$ или $\lambda \equiv -1$. В първия случай е холоморфна f, във втория — $\overline{f}$.

§ 3. Дробно-линейна функция

Комплексната равнина $\mathbb{C}$, която не е компакт, се компактифицира, като към нея се причисли още един елемент ∞, наречен *безкрайна точка*. Новото множество се нарича *разширена комплексна равнина* и се бележи с $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. То е топологично пространство, като околностите на $z \in \mathbb{C}$ са известните, а под околност на ∞ се разбира всяко множество от вида $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, където K е компакт. Така $\overline{\mathbb{C}}$ се превръща в компактно топологично пространство, в което са в сила връзките $\lim\limits_{z\to 0} 1/z = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} 1/z = 0$, $\lim\limits_{z\to\infty} z = \infty$, $a + \infty = \infty$ за всяко $a \in \mathbb{C}$, $a.\infty = \infty$ за всяко $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Окръжност в $\overline{\mathbb{C}}$ се нарича всяка обикновена окръжност или права. Съображенията да причислим правите към множеството на окръжностите са следните: всяка обикновена окръжност има уравнение $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$, $a \neq 0$. При $a = 0$ получаваме уравнение на обикновена права $l : bx + cy + d = 0$. Тъй като всяка околност на ∞ съдържа точки от l, естествено е да приемем, че $\infty \in l$. Така всяка права може да се разглежда като окръжност, минаваща през безкрайната точка.

Дробно-линейна наричаме всяка функция от вида

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ където } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ и } ad - bc \neq 0. \tag{1}$$

Изображението, което тя осъществява, се нарича *дробно-линейна трансформация*. При $c = 0$, $d = 1$ тя има вида $w = az + b$ и се нарича *цяла линейна трансформация*. Цялата трансформация изобразява взаимно-еднозначно $\overline{\mathbb{C}}$ в себе си, като $w(\infty) = \infty$. Освен това, ако $\alpha = \arg a$, то тя е суперпозиция на ротацията $w_1 = e^{i\alpha} z$, хомотетията $w_2 = |a| w_1$ и транслацията $w_3 = w_2 + b$. Следователно запазва ъглите между кривите по големина и ориентировка, изобразява окръжност в окръжност и права в права.

Нека $c \neq 0$ и Δ е детерминантата $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, т.е. $\Delta = ad - bc \neq 0$. Дробно-линейната трансформация (1) изобразява взаимно еднозначно $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ в $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. При това, ако разгледаме и граничните стойности $w(\infty) := \lim\limits_{z\to\infty} w(z) = a/c$ и $w(-d/c) := \lim\limits_{z\to -d/c} w(z) = \infty$, получаваме взаимно еднозначно съответствие на $\overline{\mathbb{C}}$ в себе си. Ако решим (1) относно z, получаваме

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad ad - bc \neq 0,$$

което показва, че обратната на дробно-линейната трансформация е също дробно-линейна трансформация. Ще отбележим още, че суперпозиция на дробно-линейни трансформации е пак дробно-линейна трансформация. Тъй като $w'(z) = \Delta/(cz + d)^2 \neq 0$, $z \neq -d/c$, то дробно-линейната трансформация е конформно изображение в $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$. В сила е представянето

$$w(z) = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c(cz + d)}. \tag{2}$$

То се получава веднага, като намерим частното и остатъка от делението на $az+b$ с $cz+d$. Сега става ясно защо още в дефиницията (1) се налага условието $\Delta \neq 0$. От (2) следва, че $w(z)$ е суперпозиция на цялата трансформация $w_1 = cz+d$, трансформацията $w_2 = 1/w_1$ и цялата трансформация $w_3 = -\dfrac{\Delta}{c}w_2 + \dfrac{a}{c}$. Трансформацията $w = 1/z$ изобразява окръжност в окръжност, като истинска окръжност през началото отива в права, неминаваща през началото, и обратно, а права през началото отива пак в такава права. Следователно общата дробно-линейна трансформация като суперпозиция на цели трансформации и трансформацията $1/z$ е конформно изображение, изпращащо окръжност в окръжност. При това, ако окръжността минава през точката $-d/c$ (която наричаме *полюс* на трансформацията (1)), то образът ѝ е права. Следователно, ако искаме да „изправим“ окръжност C, достатъчно е да приложим трансформацията $w = 1/(z-\alpha)$, където $\alpha \in C$ е произволна точка.

Точката $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича *неподвижна* (*двойна*) *точка* на трансформацията (1), ако $w(z_0) = z_0$. При $c \neq 0$ това е квадратно уравнение, а при $c = 0$ е линейно и за $a \neq d$ има единствен корен в $\mathbb{C}$. В този случай, тъй като $w(\infty) = \infty$, ∞ се разглежда като втора двойна точка. Ако $a = d$, то $w = z + b/d$ и ∞ е единствената ѝ двойна точка. Така дробно-линейната трансформация има най-много две неподвижни точки и ако те са три, тя е идентитетът, т. е. $w = z$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

Просто отношение на три различни точки $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ се нарича числото $(z_1, z_2, z_3) = (z_3 - z_1)/(z_3 - z_2)$. *Двойно отношение* на четири различни точки $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ се нарича числото $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \dfrac{(z_1, z_2, z_3)}{(z_1, z_2, z_4)} = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \dfrac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$, като ако например $z_4 = \infty$, то

$$(z_1, z_2, z_3, \infty) := \lim_{z \to \infty} (z_1, z_2, z_3, z) = (z_1, z_2, z_3).$$

Съществува само една дробно-линейна трансформация, изобразяваща три различни точки z_1, z_2, z_3 в три различни точки w_1, w_2, w_3, и тя се задава с формулата $(w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3)$. Дробно-линейната функция е единствената функция, която запазва двойното отношение на всеки четири точки.

Ако l е права, то *инверсна* на точката $z \in \mathbb{C}$ относно l се нарича точката z^*, симетрична на z относно l. Ако $C = C(a, R)$ е окръжност, то *инверсна* на $z \neq a$ относно C се нарича точката z^*, която: 1) лежи на лъча през z с начало a, т. е. $\arg(z^* - a) = \arg(z - a)$, и 2) $|z^* - a|\,|z - a| = R^2$. Инверсната точка на центъра a на окръжността е ∞ и обратно — за всяка окръжност ∞ е инверсна на центъра ѝ. От 1) и 2) непосредствено получаваме формулата $z^* = R^2/(\overline{z} - \overline{a}) + a$. Оттук при $a = 0$ и $R = 1$ следва, че инверсията относно единичната окръжност е $z^* = 1/\overline{z}$. Така трансформацията $w = 1/z = \overline{1/\overline{z}}$ е суперпозиция на две инверсии — относно $|z| = 1$ и относно $\mathbb{R}$. Освен това инверсната на $z \in C(a, R)$ е самата точка z.

Дробно-линейната трансформация запазва инверсните точки, т. е. ако (1) изобразява окръжността C в окръжността C_1 и z и z^* са инверсни относно C, то образите им $w = w(z)$ и $w^* = w(z^*)$ са инверсни относно C_1.

Принцип за съответствие на границите: Ако трансформацията (1) изобразява област $D \subset \mathbb{C}$ в област $D_1 \subset \mathbb{C}$, то тя изобразява ориентираната граница ∂D на D (това е границата на D при движение, върху която областта D остава отляво) в ориентираната граница ∂D_1 на D_1 и обратно, ако изобразява ∂D в ∂D_1, то тя изобразява и D в D_1.

За нас ще бъде особено важно следното твърдение, което е следствие от този принцип: Нека K и K_1 са два кръга, чиито гранични окръжности C и C_1 са определени от точките z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3. Нека $w = w(z)$ е дробно-линейната трансформация, за която $w(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$. Тогава тя изобразява C върху C_1 и ако w_1, w_2, w_3 индуцират върху C_1 същата ориентировка, която z_1, z_2, z_3 индуцират върху C, то K се изобразява върху K_1. Ако те индуцират върху C_1 противоположната ориентировка, то K се изобразява върху външността на K_1. Последното се случва само ако полюсът на трансформацията $w(z)$ принадлежи на K, т. е. $-d/c \in K$. Ако $-d/c \in C$, то K_1 е едната от двете полуравнини с гранична права C_1.

3.1. Да се докаже, че всяка цяла линейна трансформация $w = az + b$, $a \neq 1$, е суперпозиция на ротация около неподвижната ѝ точка z_0 на ъгъл $\alpha = \arg a$ и хомотетия с коефициент $|a|$.

Решение. Като извадим почленно двете страни на равенствата $w = az + b$ и $z_0 = az_0 + b$, получаваме $w - z_0 = a(z - z_0) = |a|e^{i\alpha}(z - z_0)$, т. е. векторът $w - z_0$ се получава от $z - z_0$ чрез ротация на ъгъл α и хомотетия с коефициент $|a|$.

3.2. Да се докаже, че цялата линейна трансформация $w = az + b$, $a \neq 1$, изобразява всеки триъгълник в подобен и еднакво ориентиран на него триъгълник.

Решение. Следва от зад. 3.1 и зад. 1.22.

3.3. Да се намери цяла линейна трансформация $w = az + b$, за която **а)** $w(-1) = 2$, $w(i) = 2i$; **б)** $w(i) = i$, $w(1) = \sqrt{2} + i$.

Решение. а) След заместване получаваме системата $-a + b = 2$, $ia + b = 2i$, откъдето намираме $a = 2i$ и $b = 2 + 2i$.

б) Тъй като i е неподвижна точка, то $w - i = a(z - i)$, откъдето $\sqrt{2} = a(1 - i) = a\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, или $a = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Следователно $w = a(z - i) + i = e^{i\frac{\pi}{4}}z + i\left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}z + 2\sin\dfrac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}}$ и тогава $b = 2\sin\dfrac{\pi}{8}e^{i\frac{\pi}{8}}$.

3.4. Да се намери цяла линейна трансформация $w = az + b$, която изобразява триъгълника $\triangle(1, i, 0)$ в триъгълника $\triangle(0, 2, 1 + i)$.

Решение. Предвид зад. 3.2 трябва $w(0) = 1 + i$ и $w(1) = 0$, откъдето намираме $b = 1 + i$ и $a = -(1 + i)$, т. е. $w = (1 + i)(1 - z) = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}(z - 1)$. Така $\triangle(0, 2, 1+i)$ се получава от $\triangle(1, i, 0)$ след последователно прилагане на транслацията $z \to z - 1$, ротацията около началото на ъгъл $5\pi/4$ и хомотетията с коефициент $\sqrt{2}$.

3.5. Да се намери цяла линейна трансформация, изобразяваща върховете z_1 и z_2 на $\triangle(z_1, z_2, z_3)$ в средите на срещуположните им страни и да се определи двойната точка на тази трансформация. Да се докаже, че във всеки триъгълник медицентърът G, центърът на описаната окръжност O и ортоцентърът H лежат на една права (наречена *права на Ойлер*), като G е между O и H и $GH = 2GO$.

Решение. Средите на $[z_2, z_3]$ и $[z_1, z_3]$ са $z_1' = (z_2 + z_3)/2$ и $z_2' = (z_1 + z_3)/2$. Следователно коефициентите a и b на търсената трансформация $w = az + b$ са решение на системата

$$\left|\begin{aligned} &az_1 + b = (z_2 + z_3)/2, \\ &az_2 + b = (z_1 + z_3)/2, \end{aligned}\right.$$

откъдето намираме $a = -1/2$ и $b = (z_1 + z_2 + z_3)/2$.

Търсената двойна точка g е решение на уравнението $g = -g/2 + (z_1 + z_2 + z_3)/2$, откъдето $g = (z_1 + z_2 + z_3)/3$, т. е. това е медицентърът на $\triangle(z_1, z_2, z_3)$ (вж. зад. 1.21).

Непосредствено се пресмята, че $w(z_3) = z_3'$ е средата на $[z_1, z_2]$. Следователно всяка страна на триъгълника се изобразява в средната отсечка, успоредна на нея. Поради запазване на ъглите получаваме, че всяка височина се изобразява в симетралата на срещуположната страна, т. е. ортоцентърът H отива в центъра O на описаната окръжност на триъгълника. Тъй като трансформацията е суперпозиция на ротация на ъгъл $\arg(-1/2) = \pi$ около точката g и хомотетия с коефициент $1/2$ (зад. 3.1), то точката O лежи на правата GH, G е между H и O и $GO = GH/2$.

3.6. Да се докаже, че при цяла линейна трансформация центърът на всяка окръжност C се изобразява в центъра на образа ѝ C_1.

Решение. Цялата трансформация изобразява права в права, окръжност в окръжност и запазва ъглите. Следователно диаметър на C се изобразява в хорда на C_1, която е ортогонална на C_1, т. е. в диаметър на C_1. Следователно пресечната точка на два диаметъра на C ще се изобрази в пресечната точка на два диаметъра на C_1.

3.7. Да се намери цяла трансформация, която изобразява кръга $K(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ в кръга $K(a_1, R_1) = \{z : |z - a_1| < R_1\}$.

Решение. Транслацията $z_1 = z - a$ изобразява $K(a, R)$ в кръга $|z_1| < R$ с център 0 и радиус R. Хомотетията $z_2 = \dfrac{R_1}{R} z_1$ изобразява кръга $|z_1| < R$ в кръга $|z_2| < R_1$. Накрая транслацията $z_3 = z_2 + a_1$ изобразява $|z_2| < R_1$ в $K(a_1, R_1)$. Следователно една трансформация с търсеното свойство е $w(z) = z_3 \circ z_2 \circ z_1(z) = \dfrac{R_1}{R}(z - a) + a_1$.

3.8. Да се намерят всички цели линейни трансформации, които изобразяват горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$ в себе си.

Решение. Съгласно принципа за съответствие на границите положително ориентираната реална права се изобразява в положително ориентираната реална права, т. е. ако $w = az + b$ е една трансформация, запазваща горната полуравнина, то от $0 < 1$ следва $w(0)$, $w(1) \in \mathbb{R}$ и $w(0) < w(1)$, откъдето получаваме $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $b < a + b \iff a > 0$. Обратно, всяка трансформация от вида $w = az + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, запазва горната полуравнина, защото $\operatorname{Im} w = a \operatorname{Im} z > 0$.

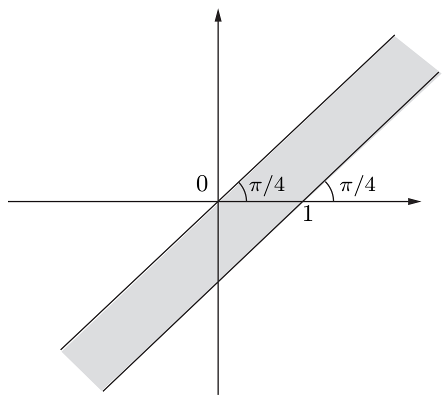
3.9. Да се намерят всички цели линейни трансформации, които изобразяват:

а) ивицата $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ в себе си;

б) ивицата, заключена между правите $y = x$ и $y = x - 1$, в себе си (фиг. 3.1).

Решение. б) Нека $w = re^{i\alpha} z + b$ е една трансформация с даденото свойство. Тя е суперпозиция на ротация $z_1 = e^{i\alpha} z$, хомотетия $z_2 = r z_1$ и транслация $z_3 = z_2 + b$. Тъй като при z_2 и z_3 ивицата се изобразява в успоредна на себе си ивица, ротацията z_1 трябва да притежава същото свойство. Следователно $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$.

1) $\alpha = 0$. Тогава $z_1 = z$ и ивицата остава на мястото си. Ако $r \neq 1$, при z_2 ивицата ще се изобрази в успоредна ивица, чиято ширина е различна от тази на дадената и при z_3 пак ще остане различна. Следователно $r = 1$. За да остане ивицата в себе си и при транслацията $z_3 = z + b$, векторът b трябва да бъде успореден на правата $y = x$, т. е. $b = \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$,



Фиг. 3.1

$\lambda \in \mathbb{R}$. Така получаваме $w = z + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) $\alpha = \pi$. Сега $z_1 = -z$ и ивицата се изобразява в успоредна на себе си с гранични прави през -1 и 0. За да остане тя със същата ширина и при z_2, трябва $r = 1$, т. е. $w = -z + b$. Ако представим $b = 1 + c$, транслацията с вектор b е суперпозиция на транслациите с вектор 1 и с вектор c. Първата изобразява ивицата в първоначалната, следователно, както в 1), втората трябва да бъде $c = \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Така $w = -z + 1 + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Обратно, всяка трансформация от вида $w = z + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ или $w = -z + 1 + \lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, изобразява дадената ивица в себе си.

Отг. а) $w = z + i\lambda$ или $w = -z + 1 + i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.10. Да се докаже, че всяка функция $f(z)$, която запазва разстоянията между точките в равнината, е или от вида $f(z) = e^{i\alpha}z + b$, или от вида $f(z) = e^{i\alpha}\overline{z} + b$, където $\alpha \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$.

Решение. От $|f(1) - f(0)| = |1 - 0| = 1$ следва $f(1) - f(0) = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Да разгледаме функцията $\varphi(z) = e^{-i\alpha}(f(z) - f(0))$. Тя също запазва разстоянията между точките и освен това $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Оттук следва, че за всяко $z \in \mathbb{C}$, $|\varphi(z)| = |z|$ и $|\varphi(z) - 1| = |z - 1|$, т. е. $\varphi(z)$ лежи на окръжностите $C(0, |z|)$ и $C(1, |z - 1|)$. Тези окръжности се пресичат в точките z и $\overline{z}$. Следователно $\varphi(z) = z$ или $\varphi(z) = \overline{z}$, така че за всяко $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x$. Нека съществува $z_0 \notin \mathbb{R}$ такова, че $\varphi(z_0) = z_0$. Тогава за всяко $z \in \mathbb{C}$, $\varphi(z) = z$. Действително, ако допуснем, че има $z \in \mathbb{C}$, за което $\varphi(z) = \overline{z}$, ще получим $|z - z_0| = |\varphi(z) - \varphi(z_0)| = |\overline{z} - z_0|$ и следователно z_0 лежи на симетралата на отсечката $[z, \overline{z}]$, т. е. $z_0 \in \mathbb{R}$, което е противоречие. Ако пък съществува $z_0 \notin \mathbb{R}$, така че $\varphi(z_0) = \overline{z_0}$, аналогично следва, че $\varphi(z) = \overline{z}$ за всяко $z \in \mathbb{C}$. Тъй като $f(z) = e^{i\alpha}\varphi(z) + f(0)$, твърдението е доказано.

* * *

3.11. Да се докаже, че трансформацията $w = \dfrac{1}{z}$ изобразява:

а) лъч с начало 0 в лъч, симетричен на него относно $\mathbb{R}$. При това на посока от 0 към ∞ съответства посока от ∞ към 0;

б) права през началото в симетричната ѝ относно $\mathbb{R}$;

в) полуравнина с гранична права през началото в симетричната ѝ относно $\mathbb{R}$.

Решение. а) Нека $l = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\alpha},\ r > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ е лъч през началото. Тогава за $z \in l$, $w = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\alpha}$, т. е. $\dfrac{1}{z}$ принадлежи на лъча $\{w \in \mathbb{C} : w = \rho e^{-i\alpha},\ \rho > 0\}$, симетричен на l относно $\mathbb{R}$. При това, тъй като при изменението на r от 0 до $+\infty$, $\dfrac{1}{r}$ се мени от $+\infty$ до 0, то следва и твърдението за посоката.

Твърденията б) и в) следват непосредствено от а).

3.12. Да се намери образът при трансформацията $w = \dfrac{1}{z}$ на:

а) $C = C(a, |a|)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

б) $C = C(ib, |b|)$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

в) $l = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = a,\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$;

г) $l = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = b,\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$;

д) $l = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y = x - 1\}$;

е) $D = K(1, 1) \cap K(i, 1)$;

ж) $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

Решение. а) Тъй като $0 \in C$, то образът ѝ l е права линия. Освен това $2a \in C$ и C сключва с реалната права $\mathbb{R}$ ъгъл $\pi/2$ в точката $2a$. Понеже трансформацията $w = 1/z$ оставя $\mathbb{R}$ на мястото си (зад. 3.11) и запазва ъглите, l е права през точката $1/2a$, успоредна на имагинерната права, т. е. $l : \operatorname{Re} w = 1/2a$.

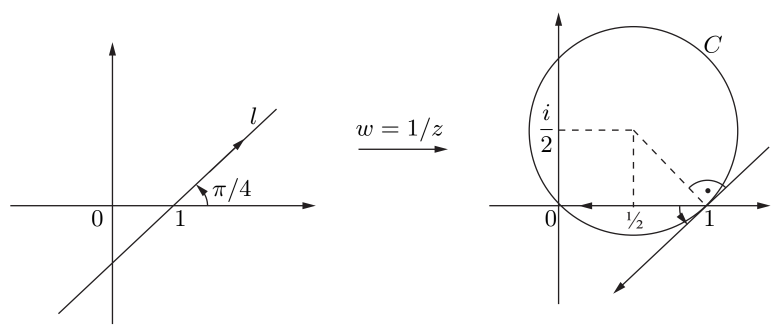
б) *Отг.* Права през точката $-i/2b$, успоредна на реалната права, т. е. $\operatorname{Im} w = -1/2b$.

в) Тъй като $0 \notin l$, то образът ѝ C е истинска окръжност през началото. Освен това $1/a \in C$ и C сключва с $\mathbb{R}$ ъгъл $\pi/2$ в тази точка.

Следователно $C = C(1/2a, 1/2|a|)$.

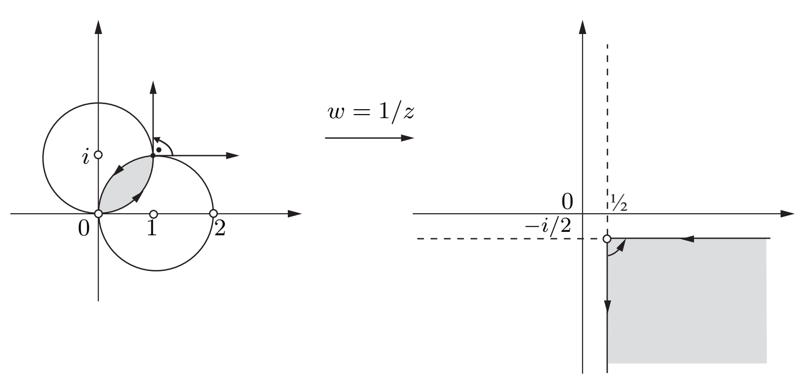
г) *Отг.* Окръжността $C(-i/2b, 1/2|b|)$.

д) Тъй като $0 \notin l$ и $1 \in l$, то образът C е истинска окръжност, минаваща през 0 и 1. Освен това, понеже l сключва с Ox^+ ъгъл $\pi/4$ в точката 1, то и допирателната към C в точката $w(1) = 1$ сключва с $(1,0)^{\rightarrow}$ ъгъл $\pi/4$. Така центърът на тази окръжност лежи на перпендикуляра, издигнат от точката 1 към тази допирателна, и на симетралата на отсечката $[0,1]$, т. е. това е точката $(1+i)/2$. Следователно $C = C((1+i)/2, 1/\sqrt{2})$, вж. фиг. 3.2.



Фиг. 3.2

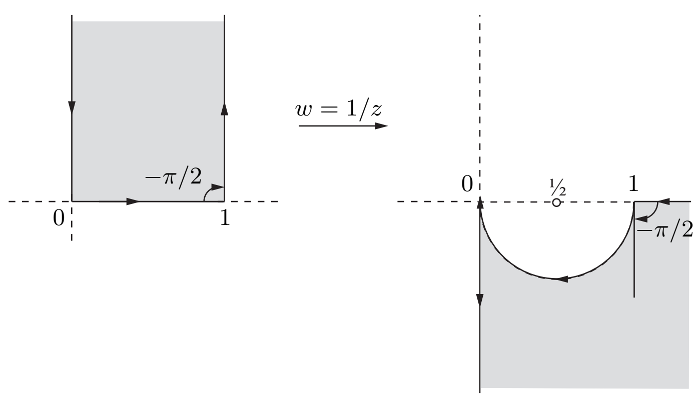
е) Съгласно принципа за съответствие на границите достатъчно е да проследим в какво се изобразява ориентираната граница на областта D. Освен това, тъй като граничните окръжности се пресичат в точките $1+i$ и 0 под прав ъгъл, достатъчно е да намерим образа само на дъгата $(\widehat{1+i,0})$ от окръжността $C(1,1)$, вж. фиг. 3.3. Имаме



Фиг. 3.3

$w(1+i) = 1/(1+i) = (1-i)/2$ и от а) следва, че търсеният образ е частта от правата $\operatorname{Re} w = 1/2$, свързваща $(1-i)/2$ и ∞ и несъдържаща $w(2) = 1/2$, т. е. това е лъчът $w = 1/2 - iv$, $v \geq 1/2$. Тогава образът на останалата част от ориентираната граница на D — дъгата $(\widehat{0, 1+i})$ от окръжността $C(i,1)$ — получаваме, като завъртим този лъч в положителна посока на ъгъл $\pi/2$. Така получаваме лъча $w = u - i/2$, $u \geq 1/2$, описван в посока от ∞ към $(1-i)/2$. Следователно образът на D е областта $\{z : \operatorname{Re} z > 1/2, \operatorname{Im} z < -1/2\}$.

ж) Последователно намираме образа на ориентираната граница на полуивицата D (фиг. 3.4):



Фиг. 3.4

1. Лъчът $(+i\infty, 0)^{\rightarrow}$ се изобразява в лъча $(0, -i\infty)^{\rightarrow}$.

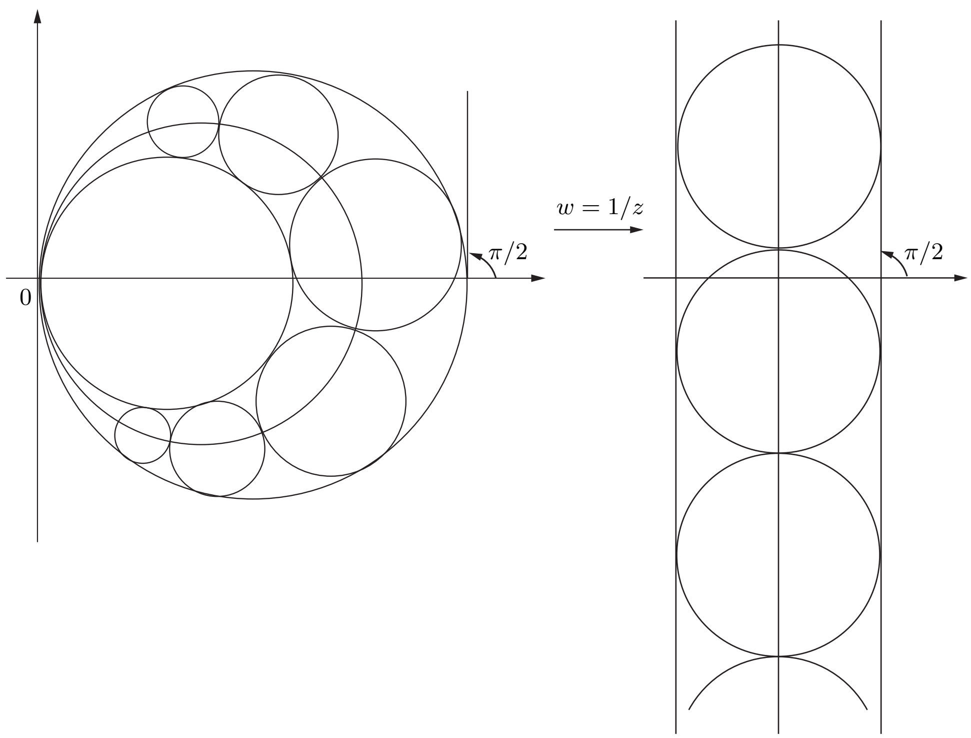
2. Отсечката $[0,1]$ се изобразява в лъча $(+\infty, 1)^{\rightarrow}$.

3. Лъчът $z = 1 + iy$, $y \geq 0$, се изобразява в онази от двете дъги, свързващи 1 и 0, на окръжността $C(1/2, 1/2)$, която сключва ъгъл $-\pi/2$ с лъча $(+\infty, 1)^{\rightarrow}$, т. е. това е дъгата в четвърти квадрант.

Следователно образът на полуивицата е областта $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w < 0, \ |w - 1/2| > 1/2\}$.

3.13. Нека окръжностите C_1 и C_2 се допират вътрешно в точка $\alpha \in \mathbb{C}$. В областта, заключена между тях, е вписана редица от окръжности, допиращи се помежду си и до C_1 и C_2. Да се докаже, че допирните точки на тези окръжности лежат на една окръжност.

Решение. Без ограничение можем да считаме, че $\alpha = 0$ и окръжностите C_1 и C_2 са ортогонални на реалната права (фиг. 3.5). Това може да се постигне с подходяща цяла трансформация. Трансформацията $w = 1/z$



Фиг. 3.5

изобразява C_1 и C_2 (зад. 3.12 а)) в прави, успоредни на имагинерната ос, а областта, заключена между тях — в ивицата между тези прави. Окръжностите, допиращи се до C_1 и C_2 и помежду си, се изобразяват в окръжности, допиращи се до двете прави и помежду си. Очевидно техните допирни точки лежат на една права (това е правата, „разполовяваща“ ивицата). Тази права е успоредна на имагинерната ос и не минава през началото. Следователно тя е образ на окръжност през 0, ортогонална на $\mathbb{R}$, т. е. допираща се до C_1 и C_2 в 0. Твърдението е доказано.

3.14. Да се докаже, че образът на окръжност, ортогонална на единичната окръжност, при трансформацията $w = 1/z$ е окръжност, симетрична на нея относно реалната права.

Упътване. Използвайте, че $w = 1/z$ е суперпозиция на инверсия относно $|z| = 1$ и симетрия относно $\mathbb{R}$. Докажете, че окръжност, ортогонална на $|z| = 1$, при инверсия относно $|z| = 1$ се изобразява в себе си.

3.15. Да се изобрази в ивицата $0 < \operatorname{Re} w < 1$:

а) полуравнината $\operatorname{Re} z > 0$ без кръга $\overline{K(d/2, d/2)}$, $d > 0$;

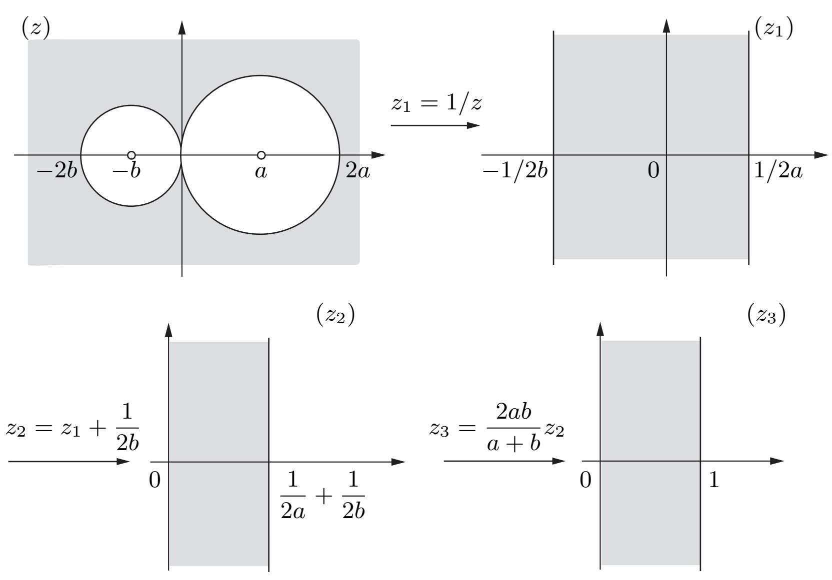
б) областта, заградена от окръжностите $C(a, a)$ и $C(b, b)$, $0 < a < b$;

в) областта $\mathbb{C} \setminus (\overline{K(a, a)} \cup \overline{K(-b, b)})$, $a > 0$, $b > 0$, така че $w(2a) = 0$.

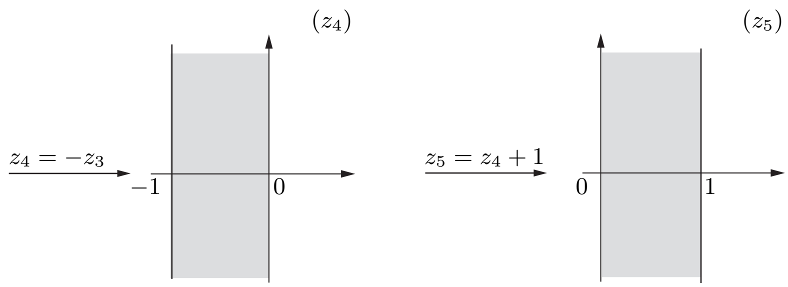
Решение. а) Трансформацията $z_1 = 1/z$ изобразява имагинерната права в имагинерната права (зад. 3.11), а окръжността $C(d/2, d/2)$ в правата $\operatorname{Re} z_1 = 1/d$ (зад. 3.12). Образът на дадената област е ивицата $0 < \operatorname{Re} z_1 < 1/d$. Остава да „разширим“ тази ивица с хомотетията $z_2 = dz_1$. Така една трансформация с исканото свойство е $w = z_2 \circ z_1 = d/z$. С помощта на зад. 3.9 можете да се убедите, че всички такива трансформации са $w = d/z + i\lambda$ или $w = -d/z + 1 + i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

б) *Отг.* $w = \dfrac{a}{b-a}\left(\dfrac{2b}{z} - 1\right) + i\lambda$ или $w = \dfrac{a}{a-b}\left(\dfrac{2b}{z} - 1\right) + 1 + i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

в) Трансформациите, които прилагаме последователно, са показани на фиг. 3.6.



Фиг. 3.6



Фиг. 3.6 (продължение)

Със знака $\times$ са отбелязани последователните образи на точката $2a$. Имаме $w = z_5 \circ z_4 \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1 = \dfrac{b(z-2a)}{(a+b)z}$.

* * *

Под *крива, минаваща през* ∞, се разбира непрекъснато изображение $z = \gamma(t) : [0,1] \to \overline{\mathbb{C}}$, такова че съществува $t_0 \in [0,1]$, за което $\gamma(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \gamma(t) = \infty$. Ако γ_1 и γ_2 са две криви през ∞, под *ориентиран ъгъл* между тях се разбира ориентираният ъгъл в 0 между техните образи при трансформацията $w = 1/z$. Така по определение трансформацията $w = 1/z$ е конформно изображение в точките 0 и ∞.

3.16. Да се докаже, че дробно-линейната трансформация $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ е конформно изображение и в точките $-d/c$ и ∞.

Решение. Нека $c \neq 0$ и γ_1, γ_2 са криви през $-d/c$. Нека Γ_1 и Γ_2 са техните образи при трансформацията $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Ориентираният ъгъл между Γ_1 и Γ_2 в ∞ е равен на ориентирания ъгъл в 0 между образите им l_1 и l_2 при трансформацията $\zeta = 1/w$. Кривите l_1 и l_2 са образи на γ_1 и γ_2 при трансформацията $\zeta = \dfrac{1}{w} = \dfrac{cz+d}{az+b}$. Това е дробно-линейна трансформация, като $\zeta(-d/c) = 0$ (да отбележим, че $a(-d/c) + b = -\Delta/c \neq 0$) и следователно е конформно изображение в точката $-d/c$, т. е. ориентираният ъгъл между γ_1 и γ_2 в $-d/c$ е равен на ориентирания ъгъл между Γ_1 и Γ_2 в ∞.

Ако $c \neq 0$, конформността в ∞ следва от това, че ако $\zeta = 1/z$, то $w = \dfrac{a+b\zeta}{c+d\zeta}$ е дробно-линейна трансформация, за която $w(0) = \dfrac{a}{c}$.

Аналогично следва конформността в ∞ и при $c = 0$.

3.17. Да се докаже, че дробно-линейната трансформация е единствената трансформация, която запазва двойното отношение на всеки четири точки.

Решение. Нека z_1, z_2, z_3, z_4 са различни точки от $\overline{\mathbb{C}}$, $w = w(z)$ е дробно-линейна трансформация и $w_k = w(z_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Тогава $w(z)$ се задава с формулата $(w_1, w_2, w, w_4) = (z_1, z_2, z, z_4)$. Оттук при $z = z_3$ следва $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, т. е. $w(z)$ запазва двойното отношение.

Обратно, ако $w = w(z)$ е функция, която запазва двойното отношение на всеки четири точки и $w_k = w(z_k)$, $k = 1, 2, 3$, то за всяко $z \in \overline{\mathbb{C}}$ имаме $(w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3)$, което е една дробно-линейна трансформация.

3.18. Да се докаже, че четири точки $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ лежат на една окръжност тогава и само тогава, когато $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

Решение. Ако една от точките, например z_4, е ∞, твърдението следва от това, че $(z_1, z_2, z_3, \infty) = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \iff \arg \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = 0$, или $\pi \iff z_3$ лежи на правата (z_1, z_2).

Нека сега $C = C(a, R)$ е истинска окръжност и $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C$. Тогава $z_k = \dfrac{R^2}{\overline{z}_k - \overline{a}} + a$, $k = 1, 2, 3, 4$, и прилагайки последователно трансформациите $z \to z - a$, $z \to R^2/z$ и $z \to z + a$, запазващи двойното отношение, получаваме

$$
\begin{aligned}
(z_1, z_2, z_3, z_4) &= (z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a) \\
&= \left(\frac{R^2}{\overline{z}_1 - \overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z}_2 - \overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z}_3 - \overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z}_4 - \overline{a}}\right) \\
&= (\overline{z}_1 - \overline{a}, \overline{z}_2 - \overline{a}, \overline{z}_3 - \overline{a}, \overline{z}_4 - \overline{a}) \\
&= (\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4) = \overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}, \text{ т. е. } (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Обратно, ако $C(a, R)$ е окръжността, определена от точките z_2, z_3, z_4, то от равенствата $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}$ и $z_k = \dfrac{R^2}{\overline{z}_k - \overline{a}} + a$, $k = 2, 3, 4$, процедирайки както по-горе, получаваме $z_1 = \dfrac{R^2}{\overline{z}_1 - \overline{a}} + a$, т. е. $z_1 \in C$.

3.19. Да се докаже, че точките z^* и z са инверсни относно окръжността C, определена от точките $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, тогава и само тогава, когато

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}. \tag{3}$$

Решение. Ако $z \in C$, то $z^* = z$ и твърдението следва от зад. 3.18. Нека $z \notin C$. Първо ще докажем, че равенството (3) не зависи от точките, определящи C, т. е. ако ω_1, ω_2, ω_3 са произволни точки от C, то $(z^*, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \overline{(z, \omega_1, \omega_2, \omega_3)}$. Действително, нека $w(z)$ е дробно-линейна трансформация, която изпраща C в реалната права. Една такава трансформация е $(w(z), 1, 0, \infty) = (z, z_1, z_2, z_3)$ или $w(z) = \dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\dfrac{z - z_2}{z - z_3}$, при което $w(z_1) = 1$, $w(z_2) = 0$, $w(z_3) = \infty$. Нека $w(z^*) = w^*$ и $w(\omega_k)=w_k$, $k = 1, 2, 3$. Тъй като $w(z)$ запазва двойното отношение, то $(z^*, z_1, z_2, z_3) = (w^*, 1, 0, \infty) = w^*$ и $(z, z_1, z_2, z_3) = (w, 1, 0, \infty) = w$. Оттук и (3) следва $w^* = \overline{w}$. Тогава $(w^*, w_1, w_2, w_3) = (\overline{w}, \overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3)$, защото $w_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$. Сега, като вземем предвид, че обратната трансформация на $w(z)$ е също дробно-линейна трансформация, получаваме $(z^*, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \overline{(z, \omega_1, \omega_2, \omega_3)}$.

Нека е в сила равенството (3). Ще разгледаме два случая:

1. Нека C е права и $z_3 = \infty$. Тогава

$$(3) \iff \frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z} - \overline{z}_2}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2}.$$

Това ни дава $|z^* - z_2| = |z - z_2|$, което означава (понеже $z_2 \in C$ е произволна), че z^* и z са на равни разстояния от всяка точка на правата, в частност и от самата права. Тогава или $z^* = z$, или z^* и z са симетрични относно C. Ако $z^* = z$, от (3) и зад. 3.18 следва $z \in C$, което не е вярно. Следователно z^* и z са симетрични относно правата C.

2. Нека $C = C(a, R)$. Преобразувайки равенството (3) и буквално следвайки решението на зад. 3.18, получаваме $z^* = \dfrac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a$, т. е. z^* е инверсна на z относно $C(a, R)$.

Останалата част от твърдението се доказва по обратния път.

3.20. Да се намерят центърът и радиусът на окръжността $C(w_0, R)$, в която трансформацията:

а) $w = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$, $z_2 \notin \mathbb{R}$, изобразява реалната права;

б) $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ изобразява окръжността $C(\alpha, r)$, $-\dfrac{d}{c} \notin C(\alpha, r)$;

в) $w = \dfrac{3z-2}{2z+i}$ изобразява окръжността $C(i, 1)$.

Решение. а) Имаме $w(z_2) = \infty$. Инверсната точка на ∞ относно $C(w_0, R)$ е центърът ѝ w_0. Тъй като дробно-линейната трансформация запазва инверсните точки, то w_0 е образ на точката, инверсна на z_2 относно $\mathbb{R}$, т. е. $w_0 = w(\overline{z}_2) = \dfrac{\overline{z}_2 - z_1}{\overline{z}_2 - z_2}$. Понеже $w(0) \in C(w_0, R)$, за радиуса имаме $R = |w(0) - w_0| = \dfrac{|z_1 - z_2|}{2|\operatorname{Im} z_2|}$.

б) Нека $\beta = -d/c$ и β^* е инверсната ѝ точка относно $C(\alpha, r)$, т. е. $\beta^* = R^2/(\overline{\beta} - \overline{\alpha}) + \alpha$. Тогава, понеже $w(\beta) = \infty$ и инверсната на ∞ относно $C(w_0, R)$ е w_0, то $w_0 = w(\beta^*)$. Тъй като $w(\alpha + r) \in C(w_0, R)$, то $R = |w(\alpha + r) - w_0|$.

в) Сега $\beta = -i/2$, $\beta^* = 1/(-\overline{i/2} - \overline{i}) + i = 2/3i + i = i/3$. Тогава

$$w_0 = w\left(\frac{i}{3}\right) = \frac{i-2}{\frac{2i}{3} + i} = \frac{3i-6}{5i} = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i,$$

$$R = |w(0) - w_0| = \left|2i - \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i\right| = \left|-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right| = 1.$$

3.21. Да се намери образът на:

а) отсечката $[z_1, z_2]$ чрез $w = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$;

б) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ чрез $w = \dfrac{z-i}{z+i}$;

в) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ чрез $w = \dfrac{2z-i}{iz+2}$;

г) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ чрез $w = \dfrac{z}{z-1}$;

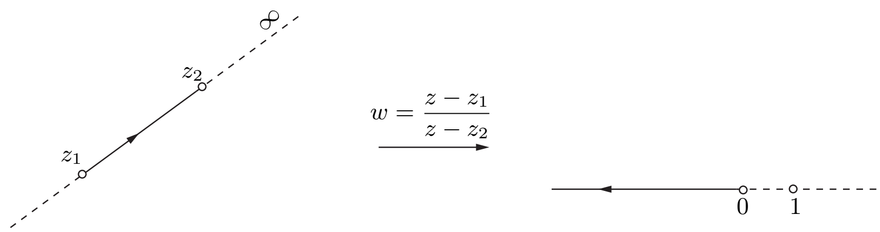
д) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ чрез $w = \dfrac{z-1}{z-2}$;

е) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ чрез $w = \dfrac{z}{z-1}$;

ж) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2},\ |z+1| < \sqrt{2}\}$ чрез $w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

Решение. Съгласно принципа за съответствие на границите достатъчно е да намерим образа на ориентираната граница на съответната област. При това, ако не следим за ориентировката на границите, образа на областта можем да определим и като намерим образа на една вътрешна (външна) за съответната област точка.

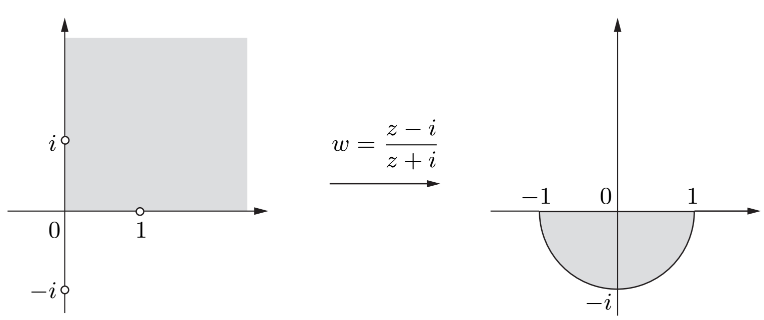
а) Тъй като $w(z_2) = \infty$, то $[z_1, z_2]$ ще се изобрази (фиг. 3.7) в част от права, минаваща през $w(z_1) = 0$ и $w(\infty) = 1$, т. е. в част от реалната пра-



Фиг. 3.7

ва. Тази част свързва непрекъснато 0 и ∞ и не съдържа 1. Следователно това е лъчът $[0, -\infty)^{\to}$.

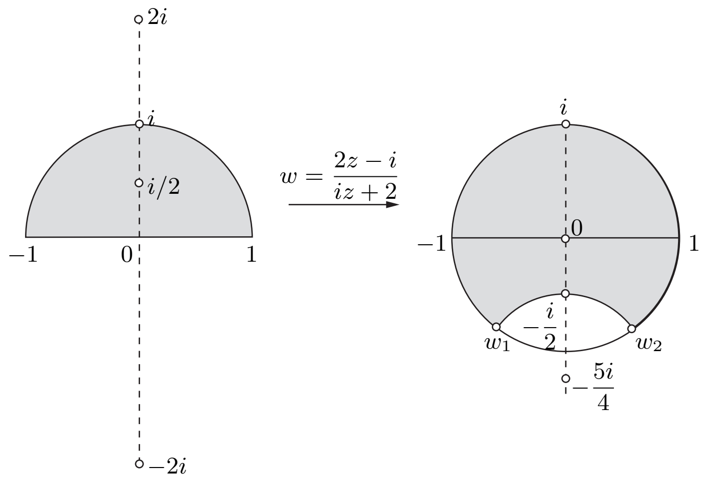
б)Тъй като $w(-i) = \infty$ и $-i \in i\mathbb{R}$, $-i \notin \mathbb{R}$, то: лъчът $[i0, +i\infty)^{\to}$ ще се изобрази в частта от правата, свързваща точките $w(0) = -1$ и $w(\infty) = 1$, която съдържа точката $w(i) = 0$, т. е. в отсечката $[-1, 1]$; лъчът $[0, +\infty)^{\to}$ — в дъга от окръжност, свързваща -1 и 1 и съдържаща $w(1) = -i$, т. е. това е единичната полуокръжност, разположена в долната полуравнина (фиг. 3.8). Накрая, от $w(-i) = \infty$ ($-i$ е външна за областта) следва, че



Фиг. 3.8

образът на областта е единичният полукръг, лежащ в долната полуравнина.

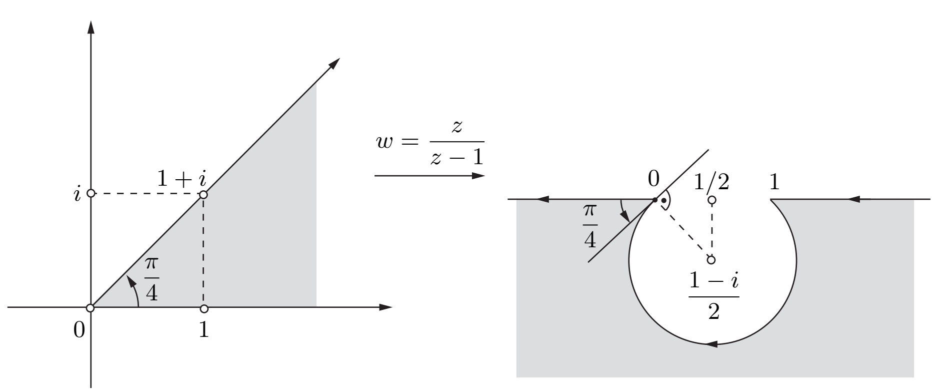
в) Тъй като $w(2i) = \infty$, то образите на $[-1, 1]$ и на $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ са дъги съответно от окръжности C_1 и C_2, свързващи точките $w_1 = w(-1) = -\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$ и $w_2 = w(1) = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i$. Понеже инверсната на $2i$ относно $|z| = 1$ е $i/2$ и $w(i/2) = 0$, то центърът на C_2 е 0, а радиусът ѝ е $|w_1| = 1$, т. е. това е единичната окръжност. Аналогично, понеже $-2i$



Фиг. 3.9

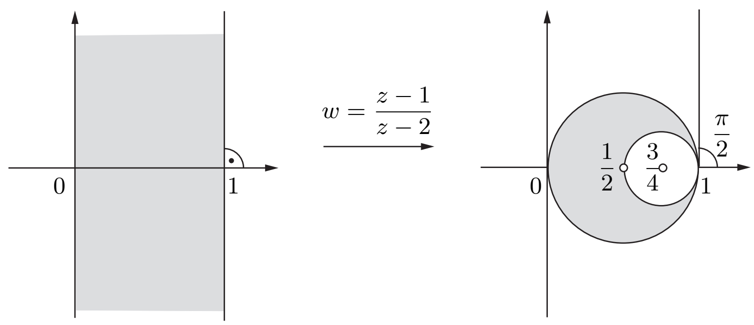
е симетрична на $2i$ относно $\mathbb{R}$, центърът на C_1 е $w(-2i) = -5i/4$, а радиусът ѝ е $|w(0) + 5i/4| = |-i/2 + 5i/4| = 3/4$. За да определим кои от дъгите, свързващи w_1 и w_2, са търсените образи, вземаме предвид, че $w(i) = i$ и $w(0) = -i/2$. Образът на областта определяме чрез $w(i/2) = 0$ (вж. фиг. 3.9).

г) Образът на $[0, 1]$ е лъчът $[0, -\infty)^{\rightarrow}$, а на лъча $[1, +\infty)^{\rightarrow}$ — лъчът $(\infty, 1]^{\rightarrow}$. Образът на лъча $\arg w = \pi/4$ е дъга от окръжност, свързваща 0 и 1 и сключваща с лъча $[0, -\infty)^{\rightarrow}$ ъгъл $\pi/4$ в точката нула, т. е. допирателната към тази дъга в точката нула е лъчът $\arg w = \pi + \pi/4$. Центърът на тази окръжност е $(1-i)/2$, а радиусът ѝ е $|1-i|/2 = 1/\sqrt{2}$ (фиг. 3.10).



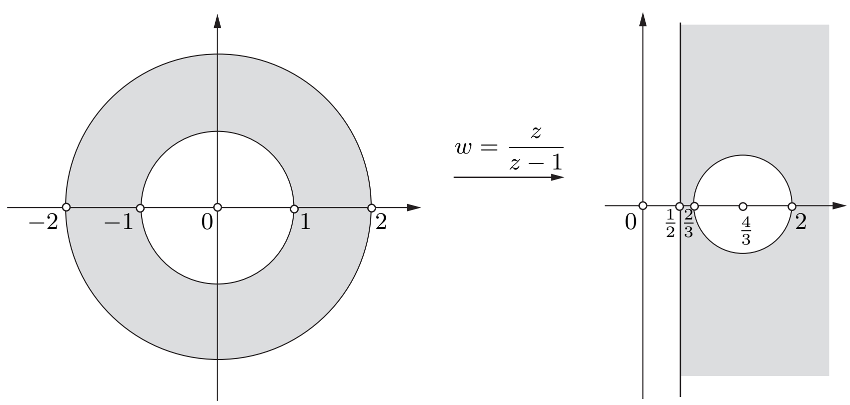
Фиг. 3.10

д) Трансформацията запазва реалната права ($w(x) \in \mathbb{R}$ за $x \in \mathbb{R}$). Правата $\operatorname{Re} z = 1$ сключва с нея в точката 1 ъгъл $\pi/2$. Следователно образът на $\operatorname{Re} z = 1$ е окръжност ($w(2) = \infty!$), ортогонална на $\mathbb{R}$ в точката $w(1) = 0$ и минаваща през $w(\infty) = 1$, т. е. това е окръжност с диаметър $[0, 1]$. Аналогично, образът на $\operatorname{Re} z = 0$ е окръжността с диаметър $[1/2, 1]$, вж. фиг. 3.11.



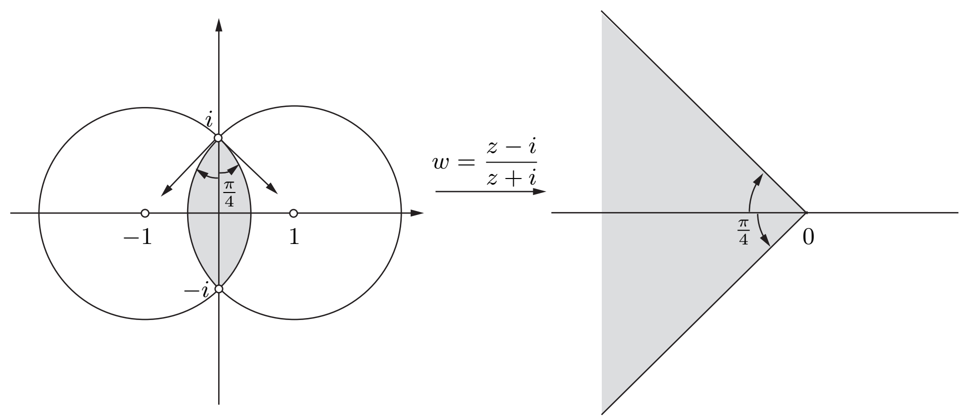
Фиг. 3.11

е) *Отг.* Виж фиг. 3.12.



Фиг. 3.12

ж) Граничните окръжности $C_1 = C(1, \sqrt{2})$ и $C_2 = C(-1, \sqrt{2})$ се пресичат в точките $-i$ и i и сключват с отсечката $[i, -i]$ в точката i ъгли съответно равни на $-\pi/4$ и $\pi/4$. Тогава образите на двете дъги, заграждащи даденото множество (фиг. 3.13), са лъчи през 0, сключващи с лъча $\overrightarrow{(0, -\infty)}$ (зад. 3.21 а)) същите ъгли. Следователно образът е областта $\{w : 3\pi/4 < \arg w < 5\pi/4\}$.



Фиг. 3.13

3.22. Да се намери дробно-линейна трансформация $w(z)$, която изобразява:

а) горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$ в себе си, така че $w(0) = 1$, $w(1) = 2$, $w(2) = \infty$;

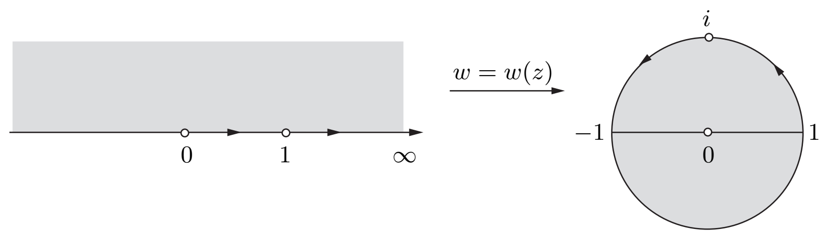
б) горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$ в единичния кръг $|w| < 1$;

в) кръга $K(4i, 2)$ в полуравнината $\pi/4 < \arg w < 5\pi/4$, така че $w(4i) = -4$ и $w(2i) = 0$;

г) единичния кръг $|z| < 1$ във външността на кръга $|w - i| \leq 1$.

Решение. а) Съществува единствена дробно-линейна трансформация $w(z)$, за която $w(0) = 1$, $w(1) = 2$ и $w(2) = \infty$, и тя се задава с формулата $(w, 1, 2, \infty) = (z, 0, 1, 2)$, откъдето намираме $w = 2/(2 - z)$. Тъй като тя изобразява реалната права в себе си, то $\operatorname{Im} z > 0$ ще се изобрази или в себе си, или в $\operatorname{Im} z < 0$. Тъй като както точките 0, 1, 2, така и точките 1, 2, ∞ определят положителна относно $\operatorname{Im} z > 0$ ориентация, то $\operatorname{Im} z > 0$ ще се изобрази в себе си.

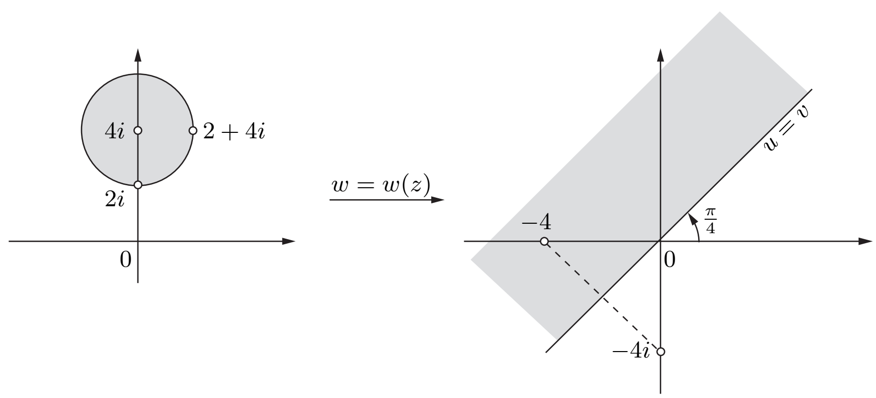
б) Според принципа за съответствие на границите достатъчно е да намерим дробно-линейна трансформация, изобразяваща ориентираната граница на $\operatorname{Im} z > 0$ в ориентираната граница на $|w| < 1$. Ориентировката на границата на първата област се определя от последователността на точките 0, 1, ∞, а тази на втората — от 1, i, -1. Следователно една трансформация с исканото свойство е $w = w(z)$, при която $w(0) = 1$, $w(1) = i$ и $w(\infty) = -1$ (фиг. 3.14). Тя се задава с равенството



Фиг. 3.14

$(w, i, 1, -1) = (z, 1, 0, \infty) = z$, откъдето намираме $w = \dfrac{i - z}{z + i}$.

в) Нека $w = w(z)$ е трансформация с исканото свойство. Тогава тя изобразява границата на кръга — окръжността $C(4i, 2)$, в граничната права на полуравнината, т. е. в правата $u = v$, $w = u + iv$ (фиг. 3.15). Тъй като $w(4i) = -4$ и $(4i)^* = \infty$, то $w(\infty) = (-4)^* = -4i$, където $(4i)^*$ е



Фиг. 3.15

инверсната на $4i$ относно $C(4i, 2)$, а $(-4)^*$ е симетричната на -4 относно правата $u = v$. Тъй като освен това $w(2i) = 0$, то тази трансформация е еднозначно определена с формулата $(w, -4, 0, -4i) = (z, 4i, 2i, \infty)$, откъдето намираме $w = 4i(z - 2i)/(2 + 4i - z)$. Остава да проверим, че тази трансформация действително изобразява кръга $K(4i, 2)$ в полуравнината $\pi/4 < \arg w < 5\pi/4$. Тъй като вътрешната точка $4i$ се изобразява във вътрешната точка -4, достатъчно е да проверим, че $C(4i, 2)$ се изобразява в правата $u = v$. Това е така, защото $w(2 + 4i) = \infty$, $w(2i) = 0$, т. е. образът е права през началото, и освен това точките -4 и $-4i$ са симетрични относно нея.

г) *Отг.* Една трансформация е $w = \dfrac{iz+i}{z}$, за която $w(1) = 2i$, $w(i) = 1+i$, $w(-1) = 0$.

3.23. Да се намери множеството на дробно-линейните трансформации, които изобразяват:

а) горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$ в себе си;

б) горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$ в единичния кръг $|w| < 1$;

в) единичния кръг $|z| < 1$ в себе си.

Решение. а) Нека дробно-линейната трансформация $w = w(z)$ има исканото свойство. Съгласно принципа за съответствие на границите тя изобразява реалната права $\operatorname{Im} z = 0$ в реалната права $\operatorname{Im} w = 0$. Тогава, ако $z_k \in \mathbb{R}$, то и $w_k = w(z_k) \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$. Трансформацията $w(z)$ се определя от равенството $(w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3)$, откъдето получаваме $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, където $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Освен това, ако $\operatorname{Im} z > 0$, то трябва и $\operatorname{Im} w > 0$. Пресмятаме $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} \dfrac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2} = \dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2} \operatorname{Im} z$ и получаваме $ad - bc > 0$. Обратно, непосредствено се проверява, че ако $w(z)$ има вида $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, където $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$, то $w(z)$ изобразява горната полуравнина в себе си.

б) Нека $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ изобразява $\operatorname{Im} z > 0$ в $|w| < 1$. Тогава съществува единствена точка z_0, $\operatorname{Im} z_0 > 0$, за която $w(z_0) = 0$. Симетричната точка на z_0 относно $\mathbb{R}$ е $\overline{z}_0$. Тъй като $w(z)$ запазва инверсните точки, то $w(\overline{z}_0) = \infty$. Следователно $az_0 + b = 0$ и $c\overline{z}_0 + d = 0$, откъдето $b = -az_0$, $d = -c\overline{z}_0$ и $w(z)$ има вида $w = \dfrac{a(z-z_0)}{c(z-\overline{z}_0)} = K\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$. Освен това, тъй като реалната права се изобразява в единичната окръжност, то за всяко $x \in \mathbb{R}$ имаме $1 = |K|\dfrac{|x-z_0|}{|x-\overline{z}_0|} = |K|$, т. е. $K = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Следователно $w(z)$ е от вида $w(z) = e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Обратно, непосредствено се проверява, че всяка трансформация от този вид има исканото свойство.

Забележка. Сравнете тази задача със зад. 1.12.

в) Нека трансформацията $w(z)$ има исканото свойство. Следвайки решението на б) (сега инверсната на z_0, $|z_0| < 1$, за която $w(z_0) = 0$, е $\dfrac{1}{\overline{z}_0}$), получаваме, че $w(z)$ има вида $w = K\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$. Тъй като точките от единичната окръжност $|z| = 1$ се изобразяват в точки от единичната окръжност $|w| = 1$, то $|w(e^{i\varphi})| = 1$, т. е.

$$1 = \left|K\frac{e^{i\varphi} - z_0}{1 - \overline{z}_0 e^{i\varphi}}\right| = |K|\frac{|e^{i\varphi} - z_0|}{|e^{i\varphi}|\,|e^{-i\varphi} - \overline{z}_0|} = |K|\frac{|e^{i\varphi} - z_0|}{|\overline{e^{i\varphi} - z_0}|} = |K|.$$

Следователно $w(z)$ има вида

$$w = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}, \quad \theta \in \mathbb{R},\ |z_0| < 1.$$

Обратното се проверява непосредствено.

Сравнете тази задача със зад. 1.11.

3.24. Да се намери множеството на дробно-линейните трансформации $w(z)$, които изобразяват:

а) горната полуравнина в себе си, така че $w(z_0) = w_0$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$, $\operatorname{Im} w_0 > 0$;

б) единичния кръг в себе си, така че $w(z_0) = w_0$, $|z_0| < 1$, $|w_0| < 1$;

в) кръга $K(0, R_1)$ в кръга $K(0, R_2)$, така че $w(z_0) = w_0$, $|z_0| < R_1$, $|w_0| < R_2$.

Решение. а) Нека $w = w(z)$ е една от търсените трансформации. Нека $\zeta = T(z) = e^{i\theta_1}\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$ и $\zeta = S(w) = e^{i\theta_2}\frac{w - w_0}{w - \overline{w}_0}$ са трансформации, изобразяващи горната полуравнина в единичния кръг, като $T(z_0) = S(w_0) = 0$ (зад. 3.23). Тогава трансформацията $F(\zeta) = S \circ w \circ T^{-1}(\zeta)$ изобразява единичния кръг в себе си и $F(0) = 0$. Следователно (зад. 3.23) $F(\zeta) = e^{i\theta_3}\zeta$. Сега от $S \circ w \circ T^{-1}(\zeta) = e^{i\theta_3}\zeta$ получаваме, че $w(z)$ има вида

$$\frac{w - w_0}{w - \overline{w}_0} = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

б) *Отг.* $\dfrac{w - w_0}{1 - \overline{w}_0 w} = e^{i\theta}\dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Упътване. Следвайте решението на а).

в) Нека $w = w(z)$ е трансформация с исканото свойство. Прилагайки последователно трансформациите $z_1 = \dfrac{z}{R_1}$, $\zeta = \dfrac{z_1 - \frac{z_0}{R_1}}{1 - \frac{\overline{z}_0}{R_1}z_1}$, получаваме трансформацията $\zeta = T(z) = R_1\dfrac{z - z_0}{R_1^2 - \overline{z}_0 z}$, изобразяваща $|z| < R_1$ в $|\zeta| < 1$, така че $T(z_0) = 0$. Аналогично, трансформацията $\zeta = S(w) = R_2\dfrac{w - w_0}{R_2^2 - \overline{w}_0 w}$ изобразява кръга $|w| < R_2$ в $|\zeta| < 1$, така че $S(w_0) = 0$.

Тогава трансформацията $F(\zeta) = S \circ w \circ T^{-1}(\zeta)$ изобразява $|\zeta| < 1$ в $|\zeta| < 1$, като $F(0) = 0$, т. е. $F(\zeta) = e^{i\theta}\zeta$. Оттук следва, че $w(z)$ има вида

$$R_2 \frac{w - w_0}{R_2^2 - \overline{w}_0 w} = R_1 e^{i\theta} \frac{z - z_0}{R_1^2 - \overline{z}_0 z}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Забележка. При $R_1 = R_2 = R$ получаваме, че множеството на трансформациите, изобразяващи $|z| < R$ в $|w| < R$, така че $w(z_0) = w_0$, е

$$\frac{w - w_0}{R^2 - \overline{w}_0 w} = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{R^2 - \overline{z}_0 z}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

3.25. Да се намери дробно-линейна трансформация $w(z)$, която изобразява:

а) горната полуравнина в себе си, така че $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$, $\operatorname{Im} w_0 > 0$;

б) единичния кръг в себе си, така че $w(z_0) = w_0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $|z_0| < 1$, $|w_0| < 1$;

в) горната полуравнина в себе си, така че $w(i) = 2i$, $w(0) = 1$;

г) единичния кръг в себе си, така че $w(1/2) = 0$, $w(1) = i$.

Решение. а) След като диференцираме двете страни на равенството, получено в зад. 3.24 а), и заместим $z = z_0$, $w = w_0$, получаваме $w'(z_0) = e^{i\theta} \dfrac{w_0 - \overline{w}_0}{z_0 - \overline{z}_0} = e^{i\theta} \dfrac{\operatorname{Im} w_0}{\operatorname{Im} z_0}$. Следователно $\arg w'(z_0) = \theta$ и тогава $\theta = \alpha$. Така търсената трансформация е $\dfrac{w - w_0}{w - \overline{w}_0} = e^{i\alpha} \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$ и тя е единствената с исканото свойство.

б) Както в а), след диференциране и заместване получаваме $w'(z_0) = \dfrac{1 - |w_0|^2}{1 - |z_0|^2} e^{i\theta}$. Следователно $\arg w'(z_0) = \theta$ и търсената трансформация е

$$\frac{w - w_0}{1 - \overline{w}_0 w} = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}.$$

в) От а) при $z_0 = i$, $w_0 = 2i$ имаме, че търсената трансформация е от вида $\dfrac{w - 2i}{w + 2i} = e^{i\alpha} \dfrac{z - i}{z + i}$. От $w(0) = 1$ следва $\dfrac{1 - 2i}{1 + 2i} = -e^{i\alpha}$, т. е. $e^{i\alpha} = (3 + 4i)/5$. Като заместим и решим относно w, получаваме, че търсената трансформация е $w = \dfrac{2(2z + 1)}{2 - z}$.

Забележка. Решете задачата, като използвате факта, че $-i$ и $-2i$ са инверсни на i и $2i$ относно реалната права и следователно търсената трансформация трябва да удовлетворява условията $w(0) = 1$, $w(i) = 2i$, $w(-i) = -2i$.

г) От б) при $z_0 = 1/2$, $w_0 = 0$ имаме, че търсената трансформация е от вида $w = e^{i\alpha}\dfrac{z - 1/2}{1 - z/2} = e^{i\alpha}\dfrac{2z-1}{2-z}$. От $w(1) = i$ намираме $e^{i\alpha} = i$ и получаваме $w = i\dfrac{2z-1}{2-z}$.

3.26. Да се изобрази единичният кръг $|z| < 1$ в себе си, така че две вътрешни точки z_1, z_2 да се изобразят в точките $\pm a$, $0 < a < 1$.

Решение. Съгласно зад. 3.25 б) дробно-линейната трансформация, която изобразява единичния кръг в себе си, така че $w(z_1) = a$, се задава с формулата

$$\frac{w-a}{1-aw} = e^{i\theta}\frac{z - z_1}{1 - \overline{z}_1 z}.$$

От $w(z_2) = -a$ получаваме

$$-\frac{2a}{1+a^2} = e^{i\theta}\frac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}, \tag{4}$$

откъдето, ако означим $b = \dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}$, следва $\theta + \arg b = \pi$, т. е. $\theta = \pi - \arg b$. Заместваме така намереното θ в (4) и получаваме $\dfrac{2a}{1+a^2} = e^{-i\arg b} b = |b|$, откъдето намираме $a = \dfrac{1 - \sqrt{1 - |b|^2}}{|b|}$. Следователно търсената трансформация е $\dfrac{w-a}{1-aw} = e^{i(\pi - \arg b)}\dfrac{z - z_1}{1 - \overline{z}_1 z}$, където $b = \dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z}_1 z_2}$ и $a = \dfrac{1 - \sqrt{1 - |b|^2}}{|b|}$.

3.27. Да се изобрази единичният кръг в себе си, така че отсечката $[0, c]$, $0 < c < 1$, да се трансформира в отсечка от реалната ос, симетрична относно началото. Да се намери дължината на тази отсечка.

Решение. Прилагаме зад. 3.26 за $z_1 = 0$, $z_2 = c$ и $w(0) = a$, $w(c) = -a$. Тогава $b = c > 0$, $\arg b = 0$ и $\dfrac{w-a}{1-aw} = -z$, откъдето $w = \dfrac{z-a}{az-1}$, като $a = (1 - \sqrt{1-c^2})/c$. Тази трансформация изпраща отсечката $[0, c]$ в отсечката $[-a, a]$ (а не в дъга от окръжност, свързваща $-a$ и a), защото на реални z съответстват реални w. Дължината на отсечката е $2a$.

3.28. Нека $|z_1| = |z_2| = 1$ и $0 \leq \arg z_1 < \arg z_2 < 2\pi$. Да се намери множеството на дробно-линейните трансформации $w(z)$, които изобразяват единичния кръг в себе си, така че:

а) $w(z_1)$ и $w(z_2)$ да бъдат диаметрално противоположни точки;

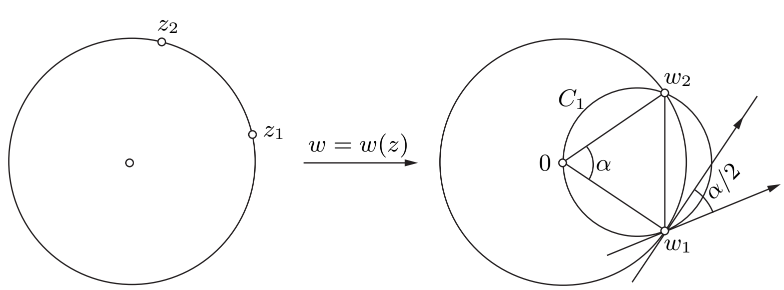
б) дъгата $\{z : |z| = 1, \arg z_1 \leq \arg z \leq \arg z_2\}$ да се изобразява в дъга от $|z| = 1$ с дължина $\alpha \in (0, 2\pi)$.

Решение. а) Нека $w(z)$ е трансформация с исканото свойство. Тъй като тя изобразява единичния кръг в себе си, съществуват z_0, $|z_0| < 1$, и $\theta \in \mathbb{R}$, такива че (зад. 3.23 в))

$$w(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}.$$

Нека $w_k = w(z_k)$, $k = 1, 2$. Тъй като правата (w_1, w_2) е перпендикулярна на $|w| = 1$, то прообразът ѝ ще бъде окръжност C през z_1 и z_2, перпендикулярна на $|z| = 1$. Следователно z_0 лежи на дъгата $l = C \cap \{z : |z| < 1\}$. Обратно, ако $z_0 \in l$, то $w = e^{i\theta} \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$, $\theta \in \mathbb{R}$, има исканото свойство.

б) Нека $w = e^{i\theta} \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$, $|z_0| < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, е произволна трансформация с исканото свойство. Нека $w_k = w(z_k)$, $k = 1, 2$, $\arg w_2 - \arg w_1 = \alpha$ и C_1 е окръжността през точките 0, w_1 и w_2. Ъгълът между $|w| = 1$ и C_1 в w_1 е $\alpha/2$ (вж. фиг. 3.16). Тогава прообразът C на C_1 е окръжност през z_1 и z_2,



Фиг. 3.16

сключваща с $|z| = 1$ в z_1 ъгъл $\alpha/2$ и $z_0 \in C \cap \{z : |z| < 1\}$. Обратно, всяка трансформация от вида $w = e^{i\theta} \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $z_0 \in C \cap \{z : |z| < 1\}$, има исканото свойство.

3.29. Да се намери множеството на дробно-линейните трансформации $w(z)$, които изобразяват:

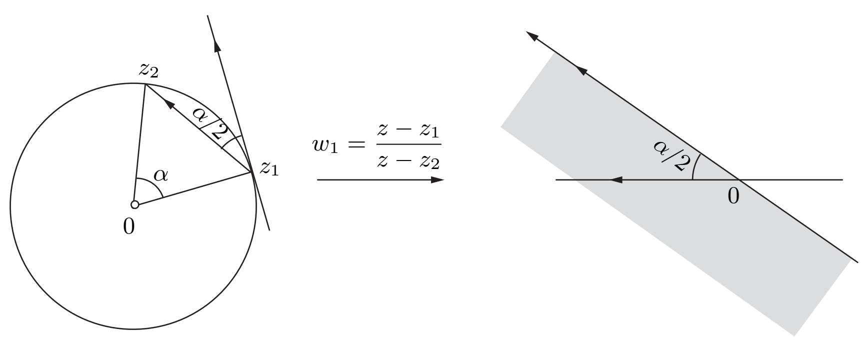
а) кръга $|z| < R$ в горната полуравнина $\operatorname{Im} w > 0$, така че $w(z_1) = 0$, $w(z_2) = \infty$, където $|z_1| = |z_2| = R$, $0 \le \arg z_1 < \arg z_2 < 2\pi$;

б) кръга $|z| < R_1$ в кръга $|w| < R_2$, така че дъгата $\{z : \arg z_1 \le \arg z \le \arg z_2,\ |z| = R_1\}$ да се изобрази в дъгата $\{w : \arg w_1 \le \arg w \le \arg w_2,\ |w| = R_2\}$, където $|z_1| = |z_2| = R_1$, $\arg z_2 - \arg z_1 = \alpha$, $|w_1| = |w_2| = R_2$, $\arg w_2 - \arg w_1 = \beta$ и $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$.

Решение. а) Нека $w(z)$ е трансформация с исканото свойство. Тъй като $w(z_1) = 0$, $w(z_2) = \infty$, тя има вида (вж. решението на зад. 3.23 б))

$$w(z) = K\frac{z - z_1}{z - z_2},$$

където $K = re^{i\theta}$ е комплексна константа. Така $w(z)$ е суперпозиция на трансформацията $w_1 = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$, ротацията $w_2 = e^{i\theta} w_1$ и хомотетията $w_3 = rw_2$. Имаме $\alpha = \arg z_2 - \arg z_1 = \arg \dfrac{z_2}{z_1}$. Тогава (фиг. 3.17) хордата $[z_1, z_2]$ сключва с допирателната към $|z| = R$ в z_1 ъгъл $\alpha/2$. Трансфор-



Фиг. 3.17

мацията w_1 изобразява хордата $[z_1, z_2]$ в лъча $[0, -\infty)^{\rightarrow}$ (зад. 3.21 а)). Следователно w_1 изобразява дъгата $\widehat{(z_1, z_2)}$ в лъча $\arg w_1 = \pi - \alpha/2$, а кръга $|z| < R$ — в полуравнината $\pi - \alpha/2 < \arg w_1 < 2\pi - \alpha/2$. Тогава w_2 трябва да извърши такава ротация, че тази полуравнина да се изобрази в $\operatorname{Im} w_2 > 0$, т. е. на ъгъл $\pi + \alpha/2$. Така получаваме $\theta = \pi + \alpha/2$. Тъй като хомотетията запазва горната полуравнина, то $w(z)$ има вида

$$w(z) = re^{i(\pi + \frac{\alpha}{2})}\frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \alpha = \arg\frac{z_2}{z_1},\ r > 0.$$

Обратно, всяка такава трансформация като суперпозиция на трансформациите w_1, w_2, w_3 има исканото свойство. Тя изобразява дъгата $\widehat{(z_1, z_2)}$ в лъча $[0, +\infty)^{\rightarrow}$.

б) Нека $w(z)$ е една от търсените трансформации и $\zeta = T(z) = r_1 e^{i(\pi + \frac{\alpha}{2})} \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$, $\zeta = S(w) = r_2 e^{i(\pi + \frac{\beta}{2})} \dfrac{w - w_1}{w - w_2}$ са трансформациите, които изобразяват съответно $|z| < R_1$ и $|w| < R_2$ в горната полуравнина, така че дъгите $\widehat{(z_1, z_2)}$ и $\widehat{(w_1, w_2)}$ се изобразяват в лъча $(0, +\infty)^{\rightarrow}$. Тогава трансформацията $F(\zeta) = S \circ w \circ T^{-1}(\zeta)$ изобразява горната полуравнина $\operatorname{Im} \zeta > 0$ в себе си, така че $F(0) = 0$ и $F(\infty) = \infty$. Следователно (зад. 3.23 а)) $F(\zeta) = a\zeta$, $a > 0$. Сега от $S \circ w \circ T^{-1}(\zeta) = a\zeta$ получаваме, че $w(z)$ има вида

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = r e^{\frac{i}{2}(\alpha - \beta)} \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad r > 0.$$

Обратно, всяка такава трансформация има исканото свойство.

3.30. Нека дробно-линейната трансформация $w(z)$ изобразява единичния кръг в себе си, така че $w(z_0) = 0$, $z_0 \neq 0$, $|z_0| < 1$. Да се докаже, че $w(z)$ изобразява единична полуокръжност в полуокръжност тогава и само тогава, когато краищата ѝ лежат на диаметъра, минаващ през точката z_0.

Решение. Нека d е диаметърът през z_0 и l е полуокръжност с краища върху d. От $w(z_0) = 0$ имаме $w(z_0^*) = w(1/\overline{z}_0) = \infty$ и понеже $1/\overline{z}_0$ лежи на правата $(0, z_0)$, то образът на тази права при $w(z)$ е права през 0. Така образът d_1 на d е пак диаметър. Тъй като $w(z)$ взаимноеднозначно и непрекъснато изобразява $|z| = 1$ върху $|w| = 1$, то l ще се изобрази в една от дъгите, определена от d_1, т. е. в полуокръжност.

Обратно, нека полуокръжност от $|z| = 1$ с краища z_1, z_2 се изобразява в полуокръжност от $|w| = 1$ с краища $w_1 = w(z_1)$ и $w_2 = w(z_2)$. Тъй като правата (w_1, w_2) е ортогонална на $|w| = 1$ в точките w_1 и w_2, то прообразът ѝ ще бъде окръжност през z_1 и z_2, която е ортогонална на $|z| = 1$ в точките z_1 и z_2, т. е. това е правата (z_1, z_2). Това означава, че $1/\overline{z}_0 \in (z_1, z_2)$ $(w(1/\overline{z}_0) = \infty)$, откъдето следва $z_0 \in (z_1, z_2)$. С това твърдението е доказано.

3.31. Нека $|a| < 1$, $\alpha = \arg a$ и $w(z) = e^{i\theta} \dfrac{z - a}{1 - \overline{a} z}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Да се докаже:

а) ако $r \in [0,1]$, то за всяко z, $|z| = r$, са в сила неравенствата

$$\left|\frac{r-|a|}{1-r|a|}\right| \le |w(z)| \le \frac{r+|a|}{1+r|a|}.$$

В лявото неравенство при $r \in (0,1)$ равенство се достига само за $z = re^{i\alpha}$, а в дясното — за $z = -re^{i\alpha}$. При $r = 0$ и $r = 1$ и в двете неравенства има равенство за всяко z, $|z| = r$.

б) ако $r > 1$, то за всяко z, $|z| = r$, имаме

$$\left|\frac{r-|a|}{1-r|a|}\right| \ge |w(z)| \ge \frac{r+|a|}{1+r|a|}.$$

За кои z се достигат равенствата?

Упътване. Намерете образа на окръжността $|z| = r$ чрез $w(z)$.

3.32. Да се докаже, че точките z_1 и z_2 са инверсни относно окръжност C тогава и само тогава, когато $\dfrac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = \text{const}$ за всяко $z \in C$.

Решение. Нека z_1 и z_2 са инверсни относно окръжността C. Тогава трансформацията $w = \dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ изобразява C в окръжност, относно която 0 и ∞ са инверсни, т.е. това е окръжност с център 0. Ако радиусът на тази окръжност е $\lambda > 0$, то за всяко $z \in C$ имаме $|w(z)| = \lambda \iff \dfrac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = \lambda$.

Обратно, нека $\dfrac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = \lambda \iff |w(z)| = \lambda$. Ще докажем, че точките z лежат на окръжност C_λ, относно която z_1 и z_2 са инверсни. Ако $\lambda = 1$, z лежи на симетралата на отсечката $[z_1, z_2]$ и това е така. Нека $\lambda \ne 1$. Обратната трансформация на w е $z = \dfrac{z_2 w - z_1}{w-1}$. Тя изобразява реалната права в правата (z_1, z_2), а окръжността $|w| = \lambda$ в окръжност C_λ, като $z(0) = z_1$, а $z(\infty) = z_2$. Понеже 0 и ∞ са инверсни относно $|w| = \lambda$, то z_1 и z_2 са инверсни относно C_λ. Освен това, тъй като реалната права е ортогонална на $|w| = \lambda$ в точките $-\lambda$ и λ, то правата (z_1, z_2) е ортогонална на C_λ в точките $z(-\lambda)$ и $z(\lambda)$. Това означава, че $[z(-\lambda), z(\lambda)]$ е диаметър на C_λ и тогава центърът ѝ е $z_0 = \dfrac{z(-\lambda)+z(\lambda)}{2} = \dfrac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}$, а радиусът — $R = \dfrac{|z(-\lambda)-z(\lambda)|}{2} = \dfrac{\lambda|z_2-z_1|}{|1-\lambda^2|}$. Накрая ще отбележим, че от $z(-\lambda) = \dfrac{\lambda z_2 + z_1}{1+\lambda}$ и $z(\lambda) = \dfrac{\lambda z_2 - z_1}{\lambda - 1}$ следва, че точките $z(-\lambda)$ и

$z(\lambda)$ делят отсечката $[z_1, z_2]$ вътрешно и външно в отношение λ (вж. зад. 1.20). Окръжностите C_λ се наричат *аполониеви окръжности.*

* * *

3.33. Нека $C_1 = C(a_1, R_1)$ и $C_2 = C(a_2, R_2)$ са две непресичащи се окръжности. Да се намерят всички двойки точки, които са инверсни едновременно относно C_1 и C_2.

Решение. Уравнението на инверсията относно C_1 е $z^* = \dfrac{R_1^2}{\overline{z} - \overline{a}_1} + a_1$, а относно C_2 — $z^* = \dfrac{R_2^2}{\overline{z} - \overline{a}_2} + a_2$. Тази система води до квадратно уравнение за z и значи има две решения. Ако едното решение е $z = \alpha$, $z^* = \beta$, то другото е $z = \beta$, $z^* = \alpha$, защото щом точката β е инверсна на α, то и α е инверсна на β. Следователно има само една двойка точки, едновременно инверсни относно C_1 и C_2, и те са корените на квадратното уравнение, получено от системата за инверсията относно C_1 и C_2.

Ще отбележим, че системата има решение и ако C_1 и C_2 се пресичат или допират, като в този случай решенията ѝ са общите точки на C_1 и C_2.

3.34. Нека C_1 и C_2 са две непресичащи се окръжности. Да се намери дробно-линейна трансформация, която изобразява C_1 и C_2 в две концентрични окръжности.

Решение. Нека α, β е двойката точки, едновременно инверсни относно C_1 и C_2. Трансформацията $w(z) = \dfrac{z - \alpha}{z - \beta}$ изобразява окръжностите C_1 и C_2 в окръжности C_1' и C_2', относно които точките $w(\beta) = \infty$ и $w(\alpha) = 0$ са едновременно инверсни. Това означава, че C_1' и C_2' имат общ център 0, т. е. те са концентрични.

Ще отбележим още, че трансформацията $w = \dfrac{z - \alpha}{z - \beta}$ (както и $w = \dfrac{z - \beta}{z - \alpha}$) изобразява областта, заключена между окръжностите C_1 и C_2, във венеца, ограден от C_1' и C_2'. При това, ако $\alpha(\beta)$ принадлежи на кръга, ограден от C_1, то C_1' е вътрешната (външната) окръжност на този венец.

3.35. Да се намери дробно-линейна трансформация $w(z)$, която изобразява:

а) кръга $K(a,r)$ в кръга $K(b,R)$, така че $w(z_0)=w_0$, $w(z_1)=w_1$, където $z_0\in K(a,r)$, $w_0\in K(b,R)$, $z_1\in C(a,r)$ и $w_1\in C(b,R)$;

б) кръга $|z|<1$ в кръга $|w-1|<1$, така че $w(0)=1/2$ и $w(1)=0$.

Решение. а) Нека z_0^* и w_0^* са инверсните точки на z_0 и w_0 съответно относно $C(a,r)$ и $C(b,R)$ и $w(z)$ е дробно-линейна трансформация, дефинирана с равенството $(w_0,w_1,w,w_0^*)=(z_0,z_1,z,z_0^*)$. Нека $C(c,\rho)$ е образът на $C(a,r)$ при $w(z)$. Тогава окръжностите $C(b,R)$ и $C(c,\rho)$ минават през w_1 и точките w_0 и w_0^* са инверсни относно всяка от тях. Оттук следва, че двете окръжности съвпадат. Действително, трансформацията $\zeta=\dfrac{w-w_0}{w-w_0^*}$ изобразява всяка от тях в окръжност, относно която 0 и ∞ са инверсни, т. е. имаща център 0 и минаваща през точката $\zeta(w_1)$ и значи съвпадат. Но тогава и прообразите им $C(b,R)$ и $C(c,\rho)$ съвпадат. Следователно трансформацията $w(z)$ изобразява кръга $K(a,r)$ или в $K(b,R)$, или във външността му. Тъй като вътрешна за $K(a,r)$ точка z_0 се изобразява във вътрешна за $K(b,R)$ точка w_0, то образът на $K(a,r)$ е $K(b,R)$.

б) Следвайки решението на а), имаме $0^*=\infty$, $(1/2)^*=-1$, $w(\infty)=-1$ и трансформацията $w(z)$ се задава с равенството $(w,1/2,0,-1)=(z,0,1,\infty)$. Оттук намираме $w=\dfrac{1-z}{z+2}$.

3.36. Да се изобрази върху венеца $1<|w|<R$ областта:

а) заключена между окръжностите $C(-5,4)$ и $C(5,4)$;

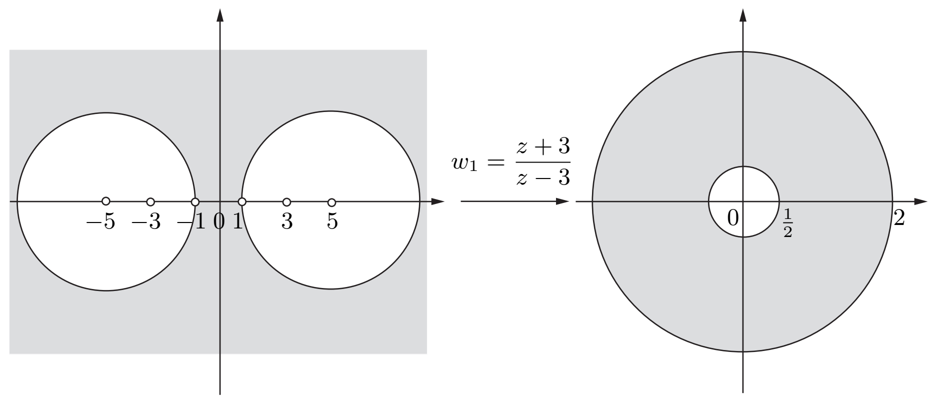
б) заключена между окръжностите $C(0,1)$ и $C(1,5/2)$, така че окръжността $|z|=1$ да се изобрази в $|w|=1$;

в) заключена между правата $y=-x$ и окръжността $C(2e^{i\frac{\pi}{4}},1)$.

Да се определи R.

Решение. а) Ще следваме решението на зад. 3.34. Решението на системата $z^*=\dfrac{16}{\overline{z}-5}+5$, $z^*=\dfrac{16}{\overline{z}+5}-5$ е $\alpha=-3$ и $\beta=3$. Тогава трансформацията $w_1=\dfrac{z+3}{z-3}$ изобразява всяка от окръжностите в окръжност с център 0 и радиуси съответно $|w_1(-1)|=1/2$ и $|w_1(1)|=2$, а областта, заключена между тях — във венеца $1/2<|w_1|<2$ (фиг. 3.18). Сега остава да приложим хомотетията $w=2w_1$. С това определяме и $R=4$. Така една трансформация с исканото свойство е $w=\dfrac{2(z+3)}{z-3}$.

б) *Отг.* $R=2$, $w=\dfrac{4z+1}{z+4}$.



Фиг. 3.18

в) *Упътване.* Най-напред приложете ротацията $w_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}z$.

Отг. $R = 2 + \sqrt{3}$, $w = \dfrac{z + \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}}{z - \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

3.37. Да се изобрази върху венеца $1 < |w| < 2$ областта:

а) $\{z : \operatorname{Re} z > 0,\ |z-h| > 1, h > 1\}$;

б) заключена между правата $x = 2$ и окръжността $|z| = h$, $0 < h < 2$.

Да се определи h.

Решение. а) Двойката точки, едновременно инверсни относно имагинерната ос и окръжността $|z-h| = 1$, са $\alpha = \sqrt{h^2-1}$ и $\beta = -\alpha$. Трансформацията $w = w(z)$, за която $w(-\alpha) = 0$, $w(\alpha) = \infty$, има вида $w = K\dfrac{z+\alpha}{z-\alpha}$, където K е константа. Тя изобразява областта във венец с център в 0. Остава да подберем K и h така, че това да бъде венеца $1 < |w| < 2$. Тъй като при тази трансформация имагинерната ос отива във вътрешната окръжност на венеца, а $|z-h| = 1$ — във външната окръжност на венеца, то имаме $1 = |w(0)| = |K|$ и $2 = |w(h+1)| = |K|\dfrac{h+1+\sqrt{h^2-1}}{h+1-\sqrt{h^2-1}}$, откъдето намираме $K = e^{i\theta}$, $h = 5/4$. Така една трансформация с исканото свойство е $w = e^{i\theta}\dfrac{4z+3}{4z-3}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Другите трансформации с това свойство са тези, за които $w(-\alpha) = \infty$, $w(\alpha) = 0$. Аналогично получаваме, че те са от вида $w = 2e^{i\theta}\dfrac{4z-3}{4z+3}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

б) *Отг.* $h = \dfrac{8}{5}$, $w = e^{i\theta}\dfrac{5z-16}{5z-4}$ или $w = 2e^{i\theta}\dfrac{5z-4}{5z-16}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

3.38. Да се намери дробно-линейна трансформация, която изобразява отсечките $[-2,-1]$ и $[0,2]$ съответно в отсечките $[-1,-k]$ и $[k,1]$, където $k \in (0,1)$. Да се определи k.

Упътване. Следвайки решението на зад. 3.36 а), изобразете областта, заключена между окръжностите с диаметри съответно $[-1,0]$ и $[-2,2]$, във венеца $k < |w| < 1$.

Отг. $w = (2+\sqrt{3})\dfrac{z+4-2\sqrt{3}}{z+4+2\sqrt{3}}$, $k = 2-\sqrt{3}$.

Забележка. Решете зад. 3.27, като използвате същата идея.

3.39. Нека C_1 и C_2 са произволни окръжности. Да се докаже, че съществува окръжност C, относно която C_1 и C_2 са инверсни помежду си.

Упътване. Ако C_1 и C_2 имат общи точки α и β, чрез трансформацията $w = \dfrac{1}{z-\alpha}$, ако $\alpha = \beta$, или $w = \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$, ако $\alpha \neq \beta$, изобразете C_1 и C_2 в успоредни или пресичащи се прави. Ако C_1 и C_2 нямат обща точка, чрез подходяща дробно-линейна трансформация ги изобразете в концентрични окръжности. Вземете предвид, че тези трансформации запазват инверсните точки.

3.40. Нека двойните точки на трансформацията $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ са z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Да се докаже, че:

а) ако $z_1 = z_2 = z_0$, то w има вида

$$\frac{1}{w-z_0} = \frac{1}{z-z_0} + h, \quad h = \frac{c}{a-cz_0};$$

б) ако $z_1 \neq z_2$, то w има вида

$$\frac{w-z_1}{w-z_2} = A\frac{z-z_1}{z-z_2}, \quad A = \frac{a-cz_1}{a-cz_2}.$$

Решение. Преди всичко ще припомним, че z_1, z_2 са корените на квадратното уравнение $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, $c \neq 0$.

а) Имаме $\dfrac{1}{w-z_0} = \dfrac{cz+d}{(a-cz_0)z+b-dz_0}$. Тъй като знаменателят е полином от първа степен, който се анулира при $z = z_0$, то $(a-cz_0)z + b - dz_0 = (a-cz_0)(z-z_0)$. Тогава

$$\frac{cz+d}{(a-cz_0)(z-z_0)} = \frac{c(z-z_0)+cz_0+d}{(a-cz_0)(z-z_0)} = \frac{cz_0+d}{a-cz_0}\cdot\frac{1}{z-z_0} + \frac{c}{a-cz_0}.$$

Оттук, предвид $z_0 = \dfrac{a-d}{2c}$, следва

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{c}{a - cz_0}.$$

б) Имаме $\dfrac{w - z_1}{w - z_2} = \dfrac{(a - cz_1)z + b - dz_1}{(a - cz_2)z + b - dz_2}$. Тъй като числителят се анулира при $z = z_1$, а знаменателят — при $z = z_2$, то

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = \frac{(a - cz_1)(z - z_1)}{(a - cz_2)(z - z_2)} = \frac{a - cz_1}{a - cz_2} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

§ 4. Редици и редове от комплексни числа. Степенни редове

Дефинициите на редица, ред, степенен ред, точка на сгъстяване, сходимост и т. н. в комплексната равнина са абсолютно същите, както в реалния анализ. Поради това всичко, което знаем за тези обекти в $\mathbb{R}$, е вярно без изменение и тук. Единствената разлика е, че ако там ε-околност на точка $x_0 \in \mathbb{R}$ е отворен интервал с дължина 2ε, чиято среда е x_0, сега тя е отворен кръг $K(z_0, \varepsilon)$.

Ако $\{z_n\}$ е сходяща редица с граница z, то $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$. Обратното също е вярно. Въпросът за модула и аргумента е по-сложен: ако $z_n \to z$, то $|z_n| \to |z|$, но редицата $\{\arg z_n\}$ не е длъжна, без допълнителни уговорки, да бъде сходяща и, още повече, да клони към $\arg z$. Този въпрос се коментира детайлно в зад. 4.1 по-нататък.

И тук

- абсолютната сходимост на ред води до неговата сходимост;
- принципът за мажорирането на ред от сходящ ред с неотрицателни членове е верен;
- принципът на Коши за сходимост на редици има същата формулировка.

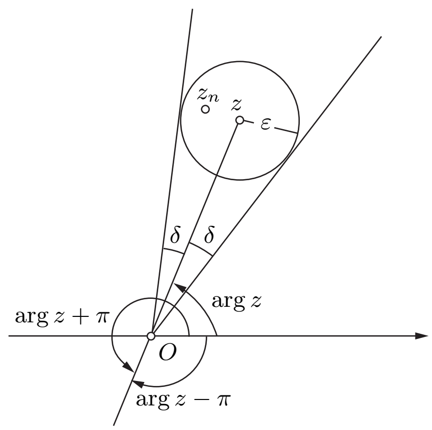
Познатите критерии на Даламбер, Коши, Раабе—Дюамел, Дирихле, Абел и т. н. са в сила за редове от абсолютни стойности и са основният инструмент за изследване.

Както е известно, *степенен ред с център точката* $a \in \mathbb{C}$ се нарича ред от вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Нека $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R$. От критерия на Коши следва, че редът е абсолютно сходящ за $|z-a| < R$ и разходящ за $|z-a| > R$. Следователно областта на сходимост е кръгът $K(a, R)$. Той се нарича *кръг на сходимост* на степенния ред, а R — негов радиус на сходимост. Дефиницията на R с горното равенство се нарича *формула на Коши—Адамар.* Освен нея често се използва, предвид абсолютната сходимост в $K(a, R)$, и критерият на Даламбер в следния вид: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Разбира се, и всички други критерии за редове с положителни членове са също приложими.

В $\mathbb{C}$ границата на областта на сходимост на степенен ред е окръжност и е много по-богата от аналогичната граница в $\mathbb{R}$, която се състои от две точки. Поради това и проблемите за сходимост по границата, както и за свойствата на сумата на даден степенен ред върху окръжността на сходимост, са много по-сложни и представляват обширна теория, която за съжаление е извън нашия обсег. От тази теория ние засягаме една нищожна част, касаеща най-прости случаи на сходимост по границата.

4.1. Нека $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Да се докаже, че $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$. Сходяща ли е редицата $\{\arg z_n\}$?

Решение. Нека $\varepsilon > 0$ и n_0 е такова, че $|z_n - z| < \varepsilon$ при $n > n_0$. Тогава от неравенството на триъгълника имаме $\big| |z_n| - |z| \big| \le |z_n - z| < \varepsilon$ за $n > n_0$, т. е. $|z_n| \to |z|$.



Фиг. 4.1

Що се отнася до $\{\arg z_n\}$, поставеният въпрос е некоректен, тъй като $\arg z_n$ взема безбройно много стойности. Ако обаче $z \ne 0$ и $\arg z$ е избран и фиксиран, избирайки $\arg z_n \in [\arg z - \pi, \arg z + \pi]$ (фиг. 4.1), то от $z_n \to z$ следва $\arg z_n \to \arg z$. Наистина, за всяко $\varepsilon > 0$ нека n_0 е такова, че $|z_n - z| < \varepsilon$ за $n > n_0$. Да прекараме двете допирателни от O към $C(z,\varepsilon)$ и нека 2δ е ъгълът, който те сключват. Ясно е, че от $\varepsilon \to 0$ следва $\delta \to 0$. Тъй като $z_n \in K(z,\varepsilon)$ при $n > n_0$, то за избрания $\arg z_n$ имаме $\arg z - \delta < \arg z_n < \arg z + \delta$, т. е. $|\arg z_n - \arg z| < \delta$, откъдето следва, че $\arg z_n \to \arg z$. И така, ако $\arg z_n$ са произволно избрани, граничният преход $\arg z_n \to \arg z$ може да не бъде верен (например ако $\arg z_n \in [2\pi, 4\pi]$, а $\arg z \in [0, 2\pi]$) или даже редицата $\{\arg z_n\}$ да не бъде сходяща. При $z \ne 0$ обаче $\arg z_n$ винаги може да се избере подходящо (както ние направихме), така че да имаме $\arg z_n \to \arg z$.

4.2. Нека $\{p_n\}$ е редица, за която $p_n \ge 0$ и $\sum_{k=1}^{n} p_k \to \infty$, и нека $a_n \to a$. Да се докаже, че:

а) ако $b_n = \dfrac{a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$, то $b_n \to a$;

б) ако $c_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, то $c_n \to a$ (теорема за средното аритметично).

Решение. а) Нека $\varepsilon > 0$ и n_0 е такова, че $|a_n - a| < \varepsilon/2$ при $n > n_0$.

Тогава

$$\begin{aligned} b_n - a &= \frac{a_1p_1 + \cdots + a_np_n - a(p_1 + \cdots + p_n)}{p_1 + \cdots + p_n} \\ &= \frac{(a_1 - a)p_1 + \cdots + (a_{n_0} - a)p_{n_0} + (a_{n_0+1} - a)p_{n_0+1} + \cdots + (a_n - a)p_n}{p_1 + \cdots + p_n}, \end{aligned}$$

откъдето

$$|b_n - a| \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0} p_k|a_k - a|}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} p_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n_0} p_k|a_k - a|}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Първият член на сумата вдясно клони към нула при $n \to \infty$, тъй като числителят е фиксирано число, а знаменателят клони към $+\infty$. Следователно $|b_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ при достатъчно големи n, т. е. $b_n \to a$.

б) Следва от а), ако положим $p_n = 1$ за всяко n.

4.3. Нека $z_n \to z$, $z_n \neq 0$. Да се докаже, че за всяко n $\sqrt[n]{z_1z_2\dots z_n}$ може така да се избере измежду n-те му стойности, че $\sqrt[n]{z_1z_2\dots z_n} \to z$.

Решение. 1. Нека $z \neq 0$. Избираме $\varphi = \arg z$ и след това $\varphi_n = \arg z_n \in [\varphi - \pi, \varphi + \pi]$. Тогава (зад. 4.1) $\varphi_n \to \varphi$ и $\dfrac{1}{n}(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) \to \varphi$ (зад. 4.2 б)). Да дефинираме $\sqrt[n]{z_1z_2\dots z_n} = \sqrt[n]{|z_1z_2\dots z_n|}e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n}{n}}$. Тъй като $\sqrt[n]{|z_1||z_2|\dots|z_n|} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z_1|+\ln|z_2|+\cdots+\ln|z_n|)}$ и $\dfrac{1}{n}(\ln|z_1| + \ln|z_2| + \cdots + \ln|z_n|) \to \ln|z|$ (зад. 4.2 б)), то $\sqrt[n]{z_1z_2\dots z_n} \to e^{\ln|z|}e^{i\varphi} = |z|e^{i\varphi} = z$.

2. Ако $z = 0$, то $|z_n| \to 0$. Следователно $\sqrt[n]{|z_1z_2\dots z_n|} \to 0$, откъдето $\sqrt[n]{z_1z_2\dots z_n} \to 0$ каквито и стойности на $\sqrt[n]{z_1z_2\dots z_n}$ да вземем.

4.4. Да се докаже, че за всяко $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to e^x(\cos y + i\sin y).$$

Решение. Тъй като $1 + \dfrac{z}{n} \to 1$, без ограничение на общността можем да считаме, че $\operatorname{Re}\left(1 + \dfrac{z}{n}\right) > 0$, и тогава можем да изберем $\arg\left(1 + \dfrac{z}{n}\right) \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\arg\left(1 + \dfrac{z}{n}\right) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{n+x}$ и редицата може да се запише

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}} e^{in\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}}.$$

Като вземем предвид, че при $|x| < 1$, $\ln(1+x) = x + x^2\theta(x)$, $\operatorname{arctg} x = x + x^3\theta(x)$, където $\theta(x)$ са ограничени в околност на $x = 0$ функции на x, получаваме

$$\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)} \to e^x, \quad n \operatorname{arctg}\frac{y}{n+x} \to y,$$

откъдето следва твърдението.

4.5. За $z = re^{i\varphi} \neq 0$ да дефинираме $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, където $k < n$ е фиксирано цяло неотрицателно число. Да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{z} - 1\right) = \ln r + i(\varphi + 2k\pi).$$

Решение. Имаме

$$n\left(\sqrt[n]{z} - 1\right) = n\left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} - 1\right) + i\sqrt[n]{r}n\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Като вземем предвид, че $e^x = 1 + x + x^2\theta(x)$, $\cos x = 1 + x^2\theta(x)$, $\sin x = x + x^3\theta(x)$, където $\theta(x)$ са ограничени функции в околност на $x = 0$, получаваме

$$\begin{aligned} n\left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} - 1\right) &= n\left(e^{\frac{1}{n}\ln r}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} - 1\right) \\ &= n\left[\frac{1}{n}\ln r + \frac{1}{n^2}\theta\left(\frac{1}{n}\right)\right] \to \ln r, \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{r}n\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n} \to \varphi + 2k\pi,$$

което искахме да докажем.

4.6. Да се пресметнат границите:

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\sin\frac{\pi}{6} + \cdots + \frac{4^n}{5^n}\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.

Решение. а) $\displaystyle 1 + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{4} = \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^k =$

$$\operatorname{Re}\frac{1-\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}} \to \operatorname{Re}\frac{1}{1-\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}} = \frac{4-\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}.$$

б) *Отг.* $\dfrac{10}{41-20\sqrt{3}}$.

4.7. Нека $z = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, е произволна точка от единичната окръжност. Да се докаже, че:

а) ако $\alpha = \dfrac{p}{q}2\pi$, p, $q > 0$ — цели взаимно прости числа, то $\{z^n\}$ е периодична редица с точки на сгъстяване $e^{i\alpha r}$, $r = 0, 1, \ldots, q-1$;

б) ако $\alpha \neq \dfrac{p}{q}2\pi$, то всяка точка върху единичната окръжност е точка на сгъстяване на редицата $\{z^n\}$.

Решение. а) Целите числа се разпадат на q класа по $\bmod q$ чрез представянето $n = qs+r$, $r = 0, 1, \ldots, q-1$. Следователно $z^n = \left(e^{i\frac{p}{q}2\pi}\right)^{(qs+r)} = e^{i\frac{p}{q}2\pi r} = z^r$ и значи редицата е периодична с точки на сгъстяване z^r, $r = 0, 1, \ldots, q-1$. Тъй като p и q са взаимно прости, тези числа са всички различни помежду си.

б) Тъй като $\dfrac{\alpha}{2\pi}$ е ирационално по предположение, то $e^{i\alpha s} \neq 1$ за всяко цяло s. Редицата е ограничена, следователно можем да изберем сходяща подредица $\{z^{n_k}\}$. Ако $\varepsilon > 0$ е произволно, то съществува k_0 такова, че за $k > k_0$ и всяко $p_k \geq 0$, за което $n_k + p_k$ принадлежи на подредицата $\{n_k\}$, ще имаме $|z^{n_k+p_k} - z^{n_k}| < \varepsilon$, т. е. $|z^{p_k} - 1| < \varepsilon$. Следователно числата z^{p_k}, които са различни от 1, се намират в произволна ε-околност на 1 така, че $z = 1$ е точка на сгъстяване на редицата.

Да фиксираме сега едно такова p_k и да разгледаме редицата $\{b_n = z^{np_k}\}$. За нея имаме $b_n \neq b_{n+1}$ и $|b_{n+1} - b_n| = |z^{p_k} - 1| < \varepsilon$, т. е. всеки два съседни члена са различни и на разстояние по-малко от ε, откъдето следва, че каквато и точка от единичната окръжност да вземем, в нейна пробита ε-околност ще попадне поне един член на $\{b_n\}$, а значи и на $\{z^n\}$.

4.8. Нека $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ е дробно-линейна трансформация с реални коефициенти, притежаваща две различни двойни точки. Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ е фиксирано. Да се докаже, че всички членове на рекурентната редица $z_n = w(z_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, лежат на една окръжност.

Решение. Ако $w = az + b$, то $a \neq 1$. Иначе w би имала единствена двойна точка ∞. Ако α е крайната ѝ двойна точка, то w се записва във вида $w - \alpha = a(z_0 - \alpha)$. Следователно $z_n - \alpha = a^n(z_0 - \alpha)$ за всяко n,

откъдето
$$(z_n, z_{n+1}, z_{n+2}) = \frac{a^{n+2} - a^n}{a^{n+2} - a^{n+1}} \in \mathbb{R}.$$
Това показва (зад. 3.18), че всеки три последователни члена на редицата лежат на една права, а тогава и всичките ѝ членове лежат на тази права.

Ако w не е цяла, нека α и β са двойните ѝ точки. Тогава (зад. 3.40 б))
$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = A\frac{z-\alpha}{z-\beta}, \quad A = \frac{a-c\alpha}{a-c\beta} \quad \text{и} \quad \frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta} = A^n\frac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}.$$
Ако α и β не са реални, те са комплексно спрегнати, тъй като са корени на квадратно уравнение с реални коефициенти и следователно $|A| = 1$. Това ни дава
$$\left|\frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta}\right| = \left|\frac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}\right| = \lambda,$$
т. е. всички z_n лежат на окръжността $\left\{z : \dfrac{|z-\alpha|}{|z-\beta|} = \lambda\right\}$ (вж. решението на зад. 3.32). Ако α и β са реални, то и A е реално. Ако разгледаме трансформацията $u = \dfrac{w-\alpha}{w-\beta}$ и означим $u_n = \dfrac{z_n-\alpha}{z_n-\beta}$, то поради това, че дробно-линейната трансформация запазва двойното отношение, ще имаме, че
$$(z_n, z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3}) = (u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}) = \frac{A^{n+2} - A^n}{A^{n+2} - A^{n+1}} : \frac{A^{n+3} - A^n}{A^{n+3} - A^{n+1}}$$
е реално число за всяко n. Съгласно зад. 3.18 всеки четири последователни члена на редицата лежат на една окръжност, откъдето следва, че всичките ѝ членове лежат на окръжността през z_0, z_1 и z_2.

4.9. Нека $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ е произволна дробно-линейна трансформация. Да се докаже, че за всяко $z_0 \in \mathbb{C}$ рекурентната редица $z_n = w(z_{n-1})$, $n = 1, 2, \dots$, е или разходяща, или клони към двойна точка на трансформацията.

Решение. 1. Нека w не е цяла линейна трансформация (т. е. $c \neq 0$). Тогава тя има две двойни точки $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Ясно е, че ако $z_0 = \alpha$ ($z_0 = \beta$), то $z_n = \alpha$ ($z_n = \beta$) за всяко n. Нека $z_0 \neq \alpha, \beta$.

Ако $\alpha = \beta$, то (зад. 3.40)
$$\frac{1}{w-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + h, \ h \neq 0, \quad \text{откъдето} \quad \frac{1}{z_n-\alpha} = \frac{1}{z_0-\alpha} + nh \to \infty,$$

или $z_n \to \alpha$.

Ако $\alpha \neq \beta$, то (зад. 3.40)

$$\frac{w-\alpha}{w-\beta} = A\frac{z-\alpha}{z-\beta}, \quad A = \frac{a-c\alpha}{a-c\beta} \neq 1, \quad \text{откъдето} \quad \frac{z_n-\alpha}{z_n-\beta} = A^n\frac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}.$$

Оттук следва:

- при $|A| < 1$, $A^n \to 0 \Rightarrow z_n \to \alpha$;
- при $|A| > 1$, $A^n \to \infty \Rightarrow z_n \to \beta$;
- при $|A| = 1$, редицата $\{A^n\}$, а с нея и редицата $\left\{u_n = \dfrac{z_n-\alpha}{z_n-\beta}\right\}$, е разходяща и понеже $|u_n| = \dfrac{|z_0-\alpha|}{|z_0-\beta|} < +\infty$ $(z_0 \neq \beta)$, то и редицата $\{z_n\}$ е разходяща.

В последния случай ($|A| = 1$) всички членове на редицата $\{z_n\}$ лежат на аполониевата относно α и β окръжност $\left\{z : \dfrac{|z-\alpha|}{|z-\beta|} = \dfrac{|z_0-\alpha|}{|z_0-\beta|}\right\}$ (вж. зад. 3.32).

2. $w = z + b$, $b \neq 0$. Тогава $z_n = z_0 + nb \to \infty$ — единствената двойна точка на w.

3. $w = az + b$, $a \neq 1$. Сега двойните точки на w са $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$ и ∞. Ясно е, че ако $z_0 = \alpha$, то $z_n = \alpha$ за всяко n. Нека $z_0 \neq \alpha$. Имаме $w - \alpha = a(z-\alpha)$, откъдето $z_n - \alpha = a^n(z_0 - \alpha)$. Оттук следва:

- при $|a| < 1$, $z_n \to \alpha$;
- при $|a| > 1$, $z_n \to \infty$;
- при $|a| = 1$, редицата $\{z_n\}$ е разходяща.

С това твърдението е доказано.

4.10. Нека $w = \dfrac{(2i-1)z-i}{z-2+i}$ и $z_0 \in \mathbb{C}$. Да се докаже, че рекурентната редица $z_n = w(z_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, е сходяща и да се намери границата ѝ.

Решение. Двойните точки на трансформацията са 1 и i. Имаме

$$\frac{w-i}{w-1} = A\frac{z-i}{z-1},$$

като от $\dfrac{w(\infty)-i}{w(\infty)-1}=A$ и $w(\infty)=2i-1$ намираме $A=\dfrac{1}{2}$. Тогава

$$\frac{z_n-i}{z_n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{z_0-i}{z_0-1}.$$

Следователно, ако $z_0=1$, то $z_n=1$ за всяко n, а ако $z_0\neq 1$, то $z_n\to i$.

* * *

4.11. Да се докаже, че ако редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящ и $|\arg z_n|\le\alpha<\pi/2$, то той е абсолютно сходящ.

Решение. Нека $z_n=x_n+iy_n$, $\varphi_n=\arg z_n$, $|\varphi_n|\le\alpha<\pi/2$. Тогава $x_n\ge 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ е сходящ, $\cos\varphi_n\ge\cos\alpha$ и

$$|z_n|=\frac{x_n}{\cos\varphi_n}\le\frac{x_n}{\cos\alpha}.$$

Следователно редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ е сходящ, тъй като се мажорира от сходящ ред с неотрицателни членове.

4.12. Нека редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^2$ са сходящи. Да се докаже, че ако $\operatorname{Re} z_n\ge 0$, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|^2$ е сходящ.

Решение. Нека $z_n=x_n+iy_n$. Тогава редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ е сходящ и значи $x_n\to 0$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $0\le x_n\le 1$, откъдето ще получим $x_n^2\le x_n$ и следователно редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ е сходящ. Тъй като $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+iy_n)^2$ е сходящ по условие, следва, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n^2-y_n^2)$ е сходящ. Но тогава е сходящ и редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[x_n^2-(x_n^2-y_n^2)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2$, а с него е сходящ и редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n^2+y_n^2)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|^2$.

4.13. Нека S_n е n-та парциална сума на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Да се докаже равенството (преобразование на Абел)

$$\sum_{k=m}^{n} a_kb_k=\sum_{k=m}^{n-1} S_k(b_k-b_{k+1})-S_{m-1}b_m+S_nb_n.$$

Упътване. Използвайте равенството $a_k = S_k - S_{k-1}$ и преобразувайте.

4.14. Съгласно критерия на Даламбер, ако $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ. Ако тази граница е по-голяма от 1, редът е разходящ. Може ли в това твърдение символът lim да бъде заменен със символа lim sup?

Отг. В частта „сходящ“ може, но в частта „разходящ“ — не. Например ако $1 < \alpha < \beta$, редът

$$1 + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\beta} + \frac{1}{5^\alpha} + \dots$$

е сходящ, но

$$\left|\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}}\right| = \frac{(2k)^\beta}{(2k+1)^\alpha} \to \infty$$

и тогава

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty.$$

4.15 (Критерий на Лайбниц). Да се докаже, че ако редицата $\{c_n\}$ е монотонно намаляваща и клони към нула, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ е сходящ за всяко z, $|z| \le 1$, с евентуално изключение на $z = 1$.

Решение. Нека S_n е n-та парциална сума на реда. Тогава за всяко цяло $p \ge 0$ ще имаме

$$\begin{aligned}(1-z)(S_{n+p} - S_n) = {} & c_{n+1}z^{n+1} + c_{n+2}z^{n+2} + \dots + c_{n+p-1}z^{n+p-1} + c_{n+p}z^{n+p} \\ & - c_{n+1}z^{n+2} - c_{n+2}z^{n+3} - \dots - c_{n+p-1}z^{n+p} - c_{n+p}z^{n+p+1}.\end{aligned}$$

Оттук при $|z| \le 1$ получаваме

$$\begin{aligned}|1-z||S_{n+p} - S_n| \le {} & c_{n+1} + (c_{n+1} - c_{n+2}) + (c_{n+2} - c_{n+3}) + \dots \\ & + (c_{n+p-1} - c_{n+p}) + c_{n+p} = 2c_{n+1}.\end{aligned}$$

Ако $z \ne 1$, то $|S_{n+p} - S_n| \le \dfrac{2c_{n+1}}{|1-z|} \to 0$ и значи редът е сходящ.

Забележка. Решете задачата, като използвате преобразованието на Абел (зад. 4.13).

4.16. Да се даде пример на ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, такъв че за всяко естествено k редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^k$ е сходящ, но не е абсолютно сходящ.

Решение. Да разгледаме реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{e^{i\alpha n}}{\ln n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\alpha}{\pi}$ — ирационално число. За всяко естествено k $z = e^{i\alpha k} \neq 1$, $\dfrac{1}{\ln^k n} \searrow 0$ и съгласно критерия на Лайбниц (зад. 4.15) редът $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{e^{ik\alpha n}}{\ln^k n}$ е сходящ, но редът $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^k n}$ е разходящ, защото мажорира (при достатъчно големи n) хармоничния ред.

4.17. Да се изследва сходимостта на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, където:

а) $a_n = \dfrac{n}{(2i)^n}$; **б)** $a_n = \dfrac{n!}{(in)^n}$; **в)** $a_n = e^{in}$; **г)** $a_n = \dfrac{e^{in}}{n}$; **д)** $a_n = \dfrac{e^{\frac{i}{n}}}{n}$;

е) $a_n = \dfrac{1}{n} \cos n\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$; **ж)** $a_n = \dfrac{\sin 3n\varphi}{\ln n}$, $\varphi \in \mathbb{R}$; **з)** $a_n = i^n \dfrac{\cos 2n\varphi}{n}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Решение. а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1/2 < 1$. Съгласно критерия на Коши редът е даже абсолютно сходящ.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = e^{-1} < 1$ — редът е абсолютно сходящ.

в) a_n не клони към 0 — редът е разходящ.

г) $\dfrac{1}{n} \searrow 0$, $e^i \neq 1$ — редът е сходящ по критерия на Лайбниц.

д) Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{1}{n}$ е разходящ, защото за всяко $\varepsilon > 0$ съществува n_0 такова, че $\cos \dfrac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ за $n > n_0$. Тогава $\dfrac{1}{n} \cos \dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1-\varepsilon}{n}$, а хармоничният ред е разходящ. Следователно и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \operatorname{Re} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} e^{in\varphi}$. Ако $\varphi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, редът е сходящ по критерия на Лайбниц. При $\varphi = 2k\pi$ се получава хармоничният ред.

ж) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = \operatorname{Im} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{e^{i3n\varphi}}{\ln n} = \operatorname{Im} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^{3n}}{\ln n}$, $z = e^{i\varphi}$. Ако $z^3 \neq 1$, редът е сходящ по критерия на Лайбниц. Следователно, ако $3\varphi \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ е сходящ. Ако $3\varphi = 2k\pi$, $a_n = 0$ и редът $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ е отново сходящ.

з) $\cos 2n\varphi = (e^{i2n\varphi} + e^{-i2n\varphi})/2$, следователно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \cos 2n\varphi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ie^{i2\varphi})^n}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ie^{-i2\varphi})^n}{n}.$$

Двата реда отдясно са сходящи при $ie^{2i\varphi} \neq 1$ и $ie^{-2i\varphi} \neq 1$, т.е. при $2\varphi \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ и $2\varphi \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ако $2\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, първият ред отдясно е разходящ (това е хармоничният ред), а тъй като $ie^{-2i\varphi} = -1$, вторият ред е сходящ (критерий на Лайбниц). Следователно даденият ред е също разходящ. Ако $2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, вторият ред отдясно е разходящ (хармоничният ред), а първият е сходящ, тъй като $ie^{i2\varphi} = -1$. Следователно даденият ред е разходящ.

Отг. При $2\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, редът е сходящ, а при $2\varphi = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ — разходящ.

* * *

4.18. Да се намери радиусът на сходимост R на степенния ред:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$; **в)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$; **г)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$; **д)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$;

е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n$, $a \in \mathbb{C}$; **ж)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos n\alpha z^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \sin n\alpha z^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{a^n} z^{b^n}$, $q \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $b > 1$;

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n)} z^n$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$.

Решение. а) Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, от формулата на Коши—Адамар следва $R = 1$.

б) *Отг.* $R = 0$.

в) *Отг.* $R = 1/2$.

г) Имаме $a_k = 2^n$ за $k = n!$ и $a_k = 0$ за $k \neq n!$. Тогава $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim\limits_{n\to\infty} (2^n)^{\frac{1}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{(n-1)!}} = 1$ и следователно $R = 1$.

д) Съгласно критерия на Даламбер

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

е) Ако $|a| \leq 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n} = 0$ и от представянето $|n+a^n| = n\left|1+\dfrac{a^n}{n}\right|$ и формулата на Коши—Адамар получаваме $R = 1$. Аналогично, ако $|a| > 1$, от $|n+a^n| = |a^n|\left|1+\dfrac{n}{a^n}\right|$ получаваме $R = \dfrac{1}{|a|}$.

ж) Ако $\alpha \in \mathbb{R}$, от $|\cos n\alpha| \leq 1$ следва $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\cos n\alpha|} \leq 1$. От друга страна, 1 е точка на сгъстяване на редицата $\{\cos n\alpha\}$ (вж. зад. 4.7). Следователно $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\cos n\alpha|} = 1$, т. е. $R = 1$. Нека $\alpha = a+ib$, $b \neq 0$. Тъй като $\cos n\alpha = (e^{in\alpha} + e^{-in\alpha})/2$, от неравенството на триъгълника имаме

$$\sqrt[n]{|e^{nb} - e^{-nb}|/2} \leq \sqrt[n]{|\cos n\alpha|} \leq \sqrt[n]{(e^{nb} + e^{-nb})/2}.$$

Оттук при $b < 0$ получаваме $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\cos n\alpha|} = e^{-b}$, а при $b > 0$ — $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\cos n\alpha|} = e^{b}$, т. е. $R = e^{-|b|}$.

з) *Упътване.* Следвайте решението на ж).

Отг. Ако $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq k\pi$, $R = e$; ако $\alpha = k\pi$, $R = \infty$; ако $\alpha = a+ib$, $b \neq 0$, $R = e^{-|b|+1}$.

и) *Упътване.* Използвайте равенството

$$\overline{\lim} \left(|q|^{a^n}\right)^{\frac{1}{b^n}} = \overline{\lim} \exp\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n \ln|q|\right].$$

Отг. Ако $|q| = 1$, $R = 1$; ако $a = b$, $R = \dfrac{1}{|q|}$; ако $a < b$, $R = 1$; ако $a > b$ и $|q| < 1$, $R = \infty$; ако $a > b$ и $|q| > 1$, $R = 0$.

к) *Упътване.* Използвайте критерия на Даламбер.

Отг. $R = 1$.

4.19. Нека радиусите на сходимост на редовете $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ са съответно R_1 и R_2. Да се докаже, че ако R е радиусът на сходимост на реда:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$, то $R \geq \min(R_1, R_2)$;

б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$, то $R \geq R_1 R_2$;

в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{b_n} z^n$ $(b_n \neq 0)$, то $R \leq R_1/R_2$.

Решение. б) За всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $\nu = \nu(\varepsilon)$, така че

$\sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{1}{R_1} + \varepsilon$ и $\sqrt[n]{|b_n|} < \dfrac{1}{R_2} + \varepsilon$ за всяко $n > \nu$. Тогава

$$\sqrt[n]{|a_n b_n|} < \frac{1}{R_1 R_2} + \varepsilon\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \varepsilon^2$$

за всяко $n > \nu$ и следователно

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n b_n|} \le \frac{1}{R_1 R_2}, \text{ т. е. } R \ge R_1 R_2.$$

в) Следва от б), като вземем предвид, че $a_n = b_n \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.

Забележка. Неравенствата в а), б) и в) са точни. В това се убеждаваме, разглеждайки следния пример: $a_n = b_n = 1$, $n = 0, 1, \ldots$

4.20. Нека R е радиусът на сходимост на реда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ и за всяко $n \ge 1$ нулите на парциалните суми $p_n(z) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ лежат вън от кръга $K(0, \rho)$. Да се докаже, че $R \ge \rho$.

Решение. Имаме $p_n(z) = a_n(z - z_1)\ldots(z - z_n)$, като $|z_\nu| \ge \rho$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Тогава $0 \ne |p_n(0)| = |a_n| \prod\limits_{\nu=1}^{n} |z_\nu| \ge |a_n|\rho^n$ и $|a_n| \le \dfrac{|p_n(0)|}{\rho^n}$. Следователно $\dfrac{1}{R} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \le \dfrac{1}{\rho}$, т. е. $R \ge \rho$.

4.21. Да се докаже, че биномният ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{n} z^n$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$, има радиус на сходимост 1 и за $|z| = 1$ е абсолютно сходящ при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ и разходящ при $\operatorname{Re}\alpha < -1$.

Решение. Нека $a_n = \dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$. Имаме $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\dfrac{n+1}{n-\alpha}\right| \to 1$ и от критерия на Даламбер следва, че радиусът на сходимост на биномния ред е 1. Нека сега $|z| = 1$. От

$$\begin{aligned}|a_n z^n| = |a_n| &= |\alpha| \left|1 - \frac{\alpha+1}{2}\right| \left|1 - \frac{\alpha+1}{3}\right| \ldots \left|1 - \frac{\alpha+1}{n}\right| \\ &\ge |\operatorname{Re}\alpha| \left|1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha+1}{2}\right| \ldots \left|1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha+1}{n}\right|\end{aligned}$$

при $\operatorname{Re}\alpha < -1$ следва $|a_n| > |\operatorname{Re}\alpha| > 1$, откъдето получаваме, че a_n не клони към 0 и редът е разходящ. Нека $\operatorname{Re}\alpha > 0$ и $R_n = n\left(\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right) = n\left(\dfrac{n+1}{|n-\alpha|} - 1\right)$ е числото на Раабе — Дюамел. Тъй като $\operatorname{Re}\alpha > 0$, то съществува $\delta > 0$, така че $\operatorname{Re}\alpha > \delta$. Нека $x \in \mathbb{R}$ е такова, че $|x-\alpha| = |x-\delta|$, т. е. x лежи на симетралата на отсечката $[\delta, \alpha]$. Тогава (направете чертеж!) за $n > x$ имаме $|n-\alpha| < n-\delta$, откъдето

$$R_n > n\left(\frac{n+1}{n-\delta} - 1\right) = \frac{n}{n-\delta}(1+\delta) > 1+\delta > 1.$$

Съгласно критерия на Раабе — Дюамел редът е абсолютно сходящ за $|z| = 1$ при $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

4.22. Да се намерят всички точки $z \in \mathbb{C}$, за които е сходящ редът:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$; **б)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{3n+1}}{\ln n}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{in\alpha}}{n} z^{7n-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{8^n} \left(\dfrac{2z-i}{z-2i}\right)^{3n}$;
д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin^2 \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n}\right) \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^{2n}$.

Решение. а) Тъй като $\dfrac{1}{n} \searrow 0$, то от критерия на Лайбниц (зад. 4.15) следва, че редът е сходящ за $|z| \le 1$, $z \ne 1$. Това ни дава, че радиусът му на сходимост е най-малко 1. От друга страна, за $z = 1$ получаваме разходящ ред (хармоничния ред). Следователно радиусът на сходимост е точно 1. Окончателно редът е сходящ за всяко z, $|z| \le 1$, $z \ne 1$.

б) Очевидно редовете $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{3n+1}}{\ln n}$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{3n}}{\ln n}$ са сходящи за едни и същи z. Полагаме $w = -z^3$ и разглеждаме реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{w^n}{\ln n}$. Разсъждавайки както в а), получаваме, че той е сходящ за $|w| \le 1$, $w \ne 1$. Тогава първоначалният ред е сходящ за $|z| \le 1$ с изключение на корените на $z^3 = -1$, т. е. на точките $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$.

в) *Отг.* $|z| \le 1$, $z \ne z_k = e^{i\frac{-\alpha+2k\pi}{7}}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$.

г) *Упътване.* Положете $w = \dfrac{2z-i}{z-2i}$ и разсъждавайки както в а), докажете, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}) \left(\dfrac{w}{2}\right)^{3n}$ е сходящ за $|w| \le 2$, $w \ne 2e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$. Накрая намерете образа на това множество чрез трансформацията $z = \dfrac{i(2w-1)}{w-2}$.

Отг. $\operatorname{Im} z \le 5/4$, $z \ne \infty$, $(\pm\sqrt{3}+5i)/4$.

д) *Упътване.* Положете $w = \dfrac{z-1}{z+1}$. Докажете, че редовете $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{w^{2n}}{2n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2 \dfrac{1}{\sqrt{n}} w^{2n}$ са сходящи за $|w| \le 1$, $w \ne \pm 1$. След това покажете, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin^2 \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} \right) w^{2n}$ е разходящ за $w = \pm 1$.

Отг. $\operatorname{Re} z \ge 0$, $z \ne 0, \infty$.

4.23. Да се даде пример на степенен ред, който върху границата на кръга си на сходимост е:

а) разходящ;

б) сходящ;

в) сходящ с изключение на краен брой отнапред избрани точки.

Упътване. Използвайте критерия на Лайбниц.

Отг. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{1}{z_1^n} + \dfrac{1}{z_2^n} + \dots + \dfrac{1}{z_k^n} \right) z^n$, $|z_\nu| = 1$, $\nu = 1, 2, \dots, k$.

§ 5. Елементарни функции

Елементарни ще наричаме функциите e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\log z$, z^α $(\alpha \in \mathbb{C})$ и получените от тях чрез алгебрични операции, суперпозиция на функции и обратна функция.

1. Експоненциална функция e^z, $z \in \mathbb{C}$. Дефинира се като сума на степенния ред

$$e^z := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

сходящ за всяко $z \in \mathbb{C}$. Тя е холоморфна в цялата равнина $\mathbb{C}$, върху реалната ос (т. е. за $z = x \in \mathbb{R}$) съвпада с познатата ни от реалния анализ функция e^x и има следните свойства:

а) $(e^z)' = e^z$;

б) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

в) $e^z \neq 0$ за всяко $z \in \mathbb{C}$;

г) $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $z = x + iy$;

д) периодична е с основен период $2\pi i$, т. е. $e^{z+2k\pi i} = e^z$ за всяко $z \in \mathbb{C}$ и всяко $k \in \mathbb{Z}$;

е) еднолистна е във всяка хоризонтална ивица с ширина, по-малка или равна на 2π, т. е. $e^{z_1} \neq e^{z_2}$ за $z_1 \neq z_2$ и $a < \operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2 < b$, $b - a \leq 2\pi$.

2. Тригонометрични функции $\sin z$, $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$. Дефинират се като суми на степенните редове

$$\sin z := \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

сходящи за всяко $z \in \mathbb{C}$. Те са холоморфни в $\mathbb{C}$, за $z = x \in \mathbb{R}$ съвпадат с познатите от реалния анализ функции $\sin x$, $\cos x$ и имат следните свойства:

а) $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$;

б) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (формули на Ойлер);

в) периодични са с основен период 2π;

г) приемат всяка стойност от $\mathbb{C}$ и в частност не са ограничени;

д) всички формули и тъждества, известни от тригонометрията за $z = x \in \mathbb{R}$, са в сила и за $z \in \mathbb{C}$.

С функциите $\sin z$, $\cos z$ свързваме и функциите $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$. Те са дефинирани и холоморфни съответно в областите $\mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{C} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. От формулите на Ойлер имаме $\operatorname{tg} z = i\dfrac{1 - e^{i2z}}{1 + e^{i2z}}$, $\operatorname{ctg} z =$

$i\dfrac{e^{i2z}+1}{e^{i2z}-1}$. Оттук в частност следва, че и двете функции са периодични с основен период π.

3. Логаритмична функция $\log z$. Дефинира се за $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ като всяко решение на уравнението $e^w = z$. Ако $\arg z$ е един аргумент на z, то $\log z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е. всяко $z \neq 0$ има безбройно много логаритми и $\log z$ е многозначна функция (тя не е „функция“ в обичайния смисъл, който влагаме в това понятие). Имаме:

а) $e^{\log z} = z$ за всяка стойност на $\log z$;

б) $\log e^z = z + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

в) равенството $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$ като равенство на функции е лишено от смисъл, тъй като в него участват не числа, а подмножества на $\mathbb{C}$. Ако, както е обичайно, дефинираме сума $A + B = \{w : w = u + v,\ u \in A,\ v \in B\}$ на две множества A и B, то равенството е в сила като равенство на множества;

г) ако $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ е област, под еднозначен клон на $\log z$ в D разбираме всяка непрекъсната в D функция $f(z)$, за която $e^{f(z)} = z$, $z \in D$;

д) ако $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\} = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg z < \pi\}$, то $\log_0 z := \ln|z| + i \arg_0 z$, $\arg_0 z \in (-\pi, \pi)$, е еднозначен клон на $\log z$ в D. Наричаме го *главен клон* (*главна стойност*) на $\log z$. Всички еднозначни клонове на $\log z$ в D се дават с формулите: $\log_k z = \log_0 z + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Те са холоморфни в D функции и $(\log_k z)' = 1/z$, $z \in D$, $k \in \mathbb{Z}$. Изрично ще отбележим, че така дефинираните еднозначни клонове на $\log z$ не удовлетворяват равенството във в). Например $\log_0 i\dfrac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = -i\dfrac{3\pi}{4}$, докато $\log_0 i + \log_0 \dfrac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = i\dfrac{\pi}{2} + i\dfrac{3\pi}{4} = i\dfrac{5\pi}{4} \neq -i\dfrac{3\pi}{4}$;

е) функцията $\log_0(1+z)$ е дефинирана в $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq -1\}$ и за $|z| < 1$ е в сила развитието

$$\log_0(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

4. Степенна функция z^α, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Дефинира се с равенството $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$. Тя е многозначна функция, като във всяка област $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, в която може да се отдели еднозначен клон на $\log z$, можем да отделим и еднозначен клон на z^α. Ако с $(z^\alpha)_0$ означим един еднозначен клон, то всички останали се получават от формулата $(z^\alpha)_k = (z^\alpha)_0 e^{i2k\alpha\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. При $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$, $z^\alpha = e^{\alpha \log_0 z} e^{i2k\alpha\pi}$ ($(z^\alpha)_0 = e^{\alpha \log_0 z}$). Имаме:

а) ако $\alpha = m \in \mathbb{Z}$, то z^m е еднозначна функция, като $z^m = \underbrace{z.z\ldots z}_{m \text{ пъти}}$, ако $m > 0$, и $z^m = \dfrac{1}{z^{-m}}$, ако $m < 0$;

б) ако $\alpha = p/q$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, $(p, q) = \pm 1$, то $z^{\frac{p}{q}}$ е q-значна функция, като $z^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}\log_0 z} e^{i\frac{2kp\pi}{q}}$, $k = 0, 1, \ldots, q-1$;

в) ако $\alpha \in \mathbb{C}$ не е рационално число, то z^α е безкрайнозначна функция;

г) ако $\alpha \in \mathbb{R}$, то $|z^\alpha| = |z|^\alpha$ и $\arg z^\alpha = \alpha \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Оттук следва, че функцията z^α е еднолистна във всеки ъгъл с връх в началото и големина, по-малка или равна на $2\pi/|\alpha|$;

д) $z_1^\alpha z_2^\alpha = (z_1 z_2)^\alpha$ в смисъл на равенство на множества;

е) $(z^\alpha)^\beta \supset z^{\alpha\beta}$ в смисъл на включване на множества;

ж) $z^\alpha z^\beta \supset z^{\alpha+\beta}$ в смисъл на включване на множества;

з) функцията $z^\alpha = e^{\alpha \log_0 z}$ е холоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ и $(z^\alpha)' = \alpha \dfrac{e^{\alpha \log_0 z}}{z} = \alpha e^{(\alpha-1)\log_0 z} = \alpha z^{\alpha-1}$;

е) функцията $(1+z)^\alpha = e^{\alpha \log_0 (1+z)}$ е холоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{z : z \leq -1\}$ и за $|z| < 1$ е в сила развитието

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Този степенен ред се нарича *биномен ред на Нютон*.

5.1. Да се докаже, че за всяко $z \in \mathbb{C}$ и всяко естествено число n е в сила неравенството

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n.$$

Забележка. Оттук в частност следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = e^z$, което предвид $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z = x + iy$, дава друго решение на зад. 4.4.

Решение. От формулата за бинома на Нютон имаме

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!}.$$

Оттук и от неравенството на триъгълника последователно получаваме

$$\begin{aligned}
\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &= \left| \sum_{k=2}^{n} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \\
&\leq \sum_{k=2}^{n} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \\
&= e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

5.2. Да се докаже, че за всеки z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ са в сила формулите:

а) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$;

б) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$;

в) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$;

г) $\cos z_1 + \cos z_2 = 2\cos\dfrac{z_1+z_2}{2}\cos\dfrac{z_1-z_2}{2}$;

д) $2\sin^2 z = 1 - \cos 2z$, $2\cos^2 z = 1 + \cos 2z$;

е) $4\sin^3 z = 3\sin z - \sin 3z$, $4\cos^3 z = \cos 3z + 3\cos z$.

Решение. а) Имаме

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2$$
$$= -\frac{e^{i2z}+e^{-i2z}-2}{4} + \frac{e^{i2z}+e^{-i2z}+2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

б) Сега $\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

$$= \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}$$
$$= \sin(z_1+z_2).$$

е) $$\sin^3 z = \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^3$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{e^{i3z}-e^{-i3z}-3(e^{iz}-e^{-iz})}{2i} = \frac{1}{4}(3\sin z - \sin 3z).$$

5.3. Хиперболичните функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ се дефинират с равенствата

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Да се докаже, че:

а) те са периодични с основен период $2\pi i$;

б) $\operatorname{sh} z = -i\sin iz$, $\operatorname{ch} z = \cos iz$;

в) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;

г) $\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$;

д) $\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$;

е) $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im}\sin z = \cos x \operatorname{sh} y$, $z = x + iy$;

ж) $\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$, $z = x + iy$;

з) $\operatorname{Re}\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y$, $\operatorname{Im}\operatorname{sh} z = \operatorname{ch} x \sin y$, $z = x + iy$;

и) $\operatorname{Re}\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y$, $\operatorname{Im}\operatorname{ch} z = \operatorname{sh} x \sin y$, $z = x + iy$.

Решение. а) Следва от това, че e^z е периодична с основен период $2\pi i$.

б) $\sin iz = \dfrac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = i\dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = i \operatorname{sh} z \iff \operatorname{sh} z = -i \sin iz$ и $\cos iz = \dfrac{e^{i(iz)} + e^{-i(iz)}}{2} = \dfrac{e^{-z} + e^z}{2} = \operatorname{ch} z$.

в) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = (\cos iz)^2 - (-i \sin iz)^2 = \cos^2 iz + \sin^2 iz = 1$.

е) $\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$.

и) $\operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} iy = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$.

5.4. Нека $f(z)$ е коя да е от функциите e^z, $\sin z$, $\cos z$.

1. Да се намерят всички $z \in \mathbb{C}$, за които:

а) $f(z) \in \mathbb{R}$; **б)** $f(z) < 0$; **в)** $f(z) \in i\mathbb{R}$.

2. Да се намерят всички лъчи l през началото, такива че $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in l}} f(z) = 0$.

Решение. 1. а) Нека $z = x + iy$. Тъй като $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$, то $e^z \in \mathbb{R} \iff e^x \sin y = 0 \iff \sin y = 0$. Следователно търсените точки $z \in \mathbb{C}$ са $z = x + ik\pi$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. От зад. 5.3 е) имаме $\sin z \in \mathbb{R} \iff \cos x \operatorname{sh} y = 0$, откъдето получаваме $z = x$ и $z = \pi/2 + k\pi + iy$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично намираме, че $\cos z \in \mathbb{R}$ за $z = x$ и $z = k\pi + iy$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) От а) следва, че $e^z < 0$ за тези $z = x + ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, за които $e^x \cos k\pi < 0 \iff (-1)^k < 0$, което е изпълнено за $k = 2l+1$, $l \in \mathbb{Z}$, т. е. $e^z < 0$ за $z = x + i(2l+1)\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

Отг. $\sin z < 0$ за $z = x$, $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ и $z = \pi/2 + (2l+1)\pi + iy$, $l \in \mathbb{Z}$; $\cos z < 0$ за $z = x$, $x \in (\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ и $z = (2l+1)\pi + iy$, $l \in \mathbb{Z}$.

2. Преди всичко ще отбележим, че $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0 \iff \lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$. Нека $l = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi)\}$. Тогава от $|e^z| = e^{r\cos\varphi}$ следва $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in l}} |e^z| = \lim\limits_{r\to\infty} e^{r\cos\varphi}$.

Ясно е, че $\lim\limits_{r\to\infty} e^{r\cos\varphi} = 0$ само ако $\cos\varphi < 0$, т. е. ако $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$. Следователно търсените лъчи са $l : z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$.

Тъй като $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |\sin x|$ не съществува, то лъчите Ox^+ и Ox^- не притежават исканото свойство за $\sin z$. От формулата на Ойлер и неравенството на триъгълника получаваме

$$\frac{\big||e^{iz}| - |e^{-iz}|\big|}{2} \le |\sin z| \le \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2}$$

или

$$\frac{|e^y - e^{-y}|}{2} \le |\sin z| \le \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad (z = x + iy).$$

Оттук следва, че $\lim\limits_{|y|\to\infty} \dfrac{2|\sin z|}{e^{|y|}} = 1$. Това означава, че $|\sin z|$ расте неограничено с растенето на $|y|$ и следователно лъчи с исканото свойство, различни от Ox^+ и Ox^-, също не съществуват.

Аналогично, не съществуват лъчи l, за които $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ z\in l}} |\cos z| = 0$.

5.5. Да се решат уравненията:

а) $\sin z = 0$; **б)** $\cos z = 0$; **в)** $\operatorname{sh} z = 0$; **г)** $\operatorname{ch} z = 0$; **д)** $\cos z + \sqrt{3}\sin z = 1$; **е)** $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$; **ж)** $\sin^6 z + \cos^6 z + 7\sin^2 z = 0$; **з)** $\sin^3 z + \cos^3 z = 1$.

Решение. а) $\sin z = 0 \iff \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \iff e^{i2z} = 1 = e^0 \iff i2z = i2k\pi \iff z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) *Отг.* $z = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

в) *Отг.* $z = ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

г) *Отг.* $z = i\,(\pi/2 + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

д) Полагаме $e^{iz} = t$. Тогава $\sin z = \dfrac{t^2 - 1}{2it}$, $\cos z = \dfrac{t^2 + 1}{2t}$ и получаваме квадратното уравнение $(\sqrt{3} + i)t^2 - 2it + i - \sqrt{3} = 0$ с корени $t_1 = 1$ и $t_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. От $e^{iz} = 1$ намираме $iz = i2k\pi$, т. е. $z = 2k\pi$, а от $e^{iz} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ — $z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

е) *Отг.* $z = i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

ж) Като разложим $\sin^6 z + \cos^6 z$ и използваме, че $\sin^2 + \cos^2 z = 1$, записваме уравнението във вида $1 - 3\sin^2 z\cos^2 z + 7\sin^2 z = 0$. Оттук и формулите $2\sin^2 z = 1 - \cos 2z$, $2\cos^2 z = 1 + \cos 2z$ получаваме квадратното (относно $\cos 2z$) уравнение $3\cos^2 2z - 14\cos 2z + 15 = 0$, откъдето намираме $\cos 2z = 3$ и $\cos 2z = 5/3$. Полагаме $e^{i2z} = t$ и получаваме уравненията $t^2 - 6t + 1 = 0$ и $3t^2 - 10t + 3 = 0$ с корени съответно $t_1 = 3 + \sqrt{8}$, $t_2 = 3 - \sqrt{8}$ и $t_3 = 3$, $t_4 = 1/3$. Накрая от $e^{i2z} = 3 + \sqrt{8}$ намираме $z = \dfrac{1}{2i}\log(3 + \sqrt{8}) = -\dfrac{i}{2}\ln(3 + \sqrt{8}) + k\pi$, от $e^{i2z} = 3 - \sqrt{8}$ — $z = -\dfrac{i}{2}\ln(3 - \sqrt{8}) + k\pi$, от $e^{i2z} = 3$ — $z = -\dfrac{i}{2}\ln 3 + k\pi$, и от $e^{i2z} = 1/3$ — $z = \dfrac{i}{2}\ln 3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

з) Като използваме, че $\sin^2 z+\cos^2 z = 1$, последователно получаваме $\sin^3 z + \cos^3 z = \sin^2 z + \cos^2 z \iff \sin^2 z(\sin z - 1) + \cos^2 z(\cos z - 1) = 0 \iff (1-\cos z)(1+\cos z)(\sin z-1)+(1-\sin z)(1+\sin z)(\cos z-1) = 0 \iff (1-\sin z)(1-\cos z)(\sin z+\cos z+2) = 0$. Уравнението $\sin z+\cos z+2 = 0$ след полагането $e^{iz} = t$ е еквивалентно на $(1+i)t^2+4it-1+i = 0$, чийто корени са $t_1 = \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}(1+i)$ и $t_2 = -\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}(1+i)$, като $|t_1| = \sqrt{2}-1$, $\arg t_1 = 5\pi/4$ и $|t_2| = \sqrt{2}+1$, $\arg t_2 = 5\pi/4$.

Отг. $z = \pi/2+2k\pi$, $z = 2k\pi$ и $z = 5\pi/4+2k\pi \pm i\ln(\sqrt{2}+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.6. Нека $u, v \in \mathbb{C}$ и $u^2+v^2 = 1$. Да се докаже, че съществува единствено $z \in \mathbb{C}$, такова че $0 \le \operatorname{Re} z < 2\pi$, за което $u = \cos z$ и $v = \sin z$.

Решение. От $u^2+v^2 = 1 \iff (u+iv)(u-iv) = 1$ следва, че $u+iv \neq 0$. Тъй като в ивицата $0 \le \operatorname{Im} w < 2\pi$ функцията e^w е еднолистна и приема всяка комплексна стойност, различна от нула, то съществува единствено $z : 0 \le \operatorname{Re} z < 2\pi$, такова че

$$e^{iz} = u+iv. \tag{1}$$

Тогава

$$u-iv = \frac{1}{u+iv} = e^{-iz}. \tag{2}$$

Сега от (1) и (2) и формулите на Ойлер получаваме $u = \cos z$ и $v = \sin z$.

5.7. Да се докаже, че всеки тригонометричен полином $f(\varphi) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$, от степен n има най-много $2n$ реални нули в интервала $[0, 2\pi)$.

Решение. Полагаме $e^{i\varphi} = z$ и от формулите на Ойлер получаваме $f(\varphi) = \dfrac{1}{z^n}\sum\limits_{k=0}^{2n} c_k z^k = \dfrac{1}{z^n}P_{2n}(z)$, като $c_{2n} = \dfrac{1}{2}(a_n - ib_n)$. Този полином има най-много $2n$ комплексни нули. Ако z е една от тях, то корените на уравнението $e^{i\varphi} = z$ са $\varphi = -i\log z = -i(\ln|z| + i\arg z)$. Такъв корен е реален само ако $|z| = 1$ и тогава той е $\varphi = \arg z$. Тъй като всяко комплексно число z има само един аргумент в интервала $[0, 2\pi)$, то на всяка нула z на полинома $P_{2n}(z)$ съответства най-много една нула $\varphi \in [0, 2\pi)$ на полинома $f(\varphi)$. С това твърдението е доказано.

5.8. Нека $f(z)$ е коя да е от функциите $\operatorname{ctg} z$, $\dfrac{1}{\sin z}$, $\dfrac{1}{e^z-1}$, z_k са нулите на знаменателя на $f(z)$ и $\delta > 0$ е произволно число. Да се докаже, че $f(z)$ е ограничена в областта $D_\delta = \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} K(z_k, \delta)$.

Решение. Преди всичко ще отбележим, че ако $f(z)$ е ограничена в областта D_δ, тя е ограничена и в областта D_{δ_1} за всяко $\delta_1 > \delta$, защото $D_{\delta_1} \subset D_\delta$. Тогава можем да считаме, че $\delta > 0$ е такова, че $K(z_k, \delta) \cap K(z_l, \delta) = \emptyset$ за $k \neq l$. Ще изложим решение само за функцията $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1}$. Тъй като $f(z)$ е периодична с основен период $2\pi i$, достатъчно е да докажем, че тя е ограничена в $D_\delta \cap \{z : 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi\}$. От неравенството на триъгълника имаме $|f(z)| = \dfrac{1}{|e^z-1|} \leq \dfrac{1}{||e^z|-1|} = \dfrac{1}{|e^x-1|}$, $z = x+iy$. Оттук при $x > 1$ следва $|f(z)| \leq \dfrac{1}{e^x-1} < \dfrac{1}{e-1}$, а при $x < -1$ — $|f(z)| \leq \dfrac{1}{1-e^x} = \dfrac{e}{e-e^{x+1}} < \dfrac{e}{e-1}$. Освен това, тъй като множеството $\Pi_\delta = D_\delta \cap \{z : 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi,\ -1 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ е компакт и $f(z)$ е непрекъсната функция върху Π_δ, то $|f(z)| \leq m(\delta)$ за всяко $z \in \Pi_\delta$. Така $|f(z)| \leq M(\delta)$ за всяко $z \in D_\delta$, където $M(\delta) = \max\left(\dfrac{e}{e-1}, m(\delta)\right)$ е константа, зависеща само от δ.

5.9. Да се докаже, че:

а) ако $z_1 \neq z_2$, то $\{u \in \mathbb{C} : u = \log z_1\} \cap \{v \in \mathbb{C} : v = \log z_2\} = \emptyset$;

б) ако $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ е област и $f(z)$ е еднозначен клон на $\log z$ в D, то $f(z)$ е еднолистна функция в D.

Решение. а) Да допуснем, че съществуват u и v, $u = \log_1 z_1$, $v = \log_2 z_2$, такива че $u = v$. Тогава $e^{\log_1 z_1} = e^{\log_2 z_2}$, т.е. $z_1 = z_2$ — противоречие.

б) Следва от а).

5.10. Да се пресметнат всички стойности на: $\log(1-i)$, $\log(\sqrt{3}-i)$, $\log\left(-1/2 - i\sqrt{3}/2\right)$; $1^{\sqrt{2}}$, i^i, $(1-i)^{i\sqrt{2}}$.

Решение. Тъй като $|1-i| = \sqrt{2}$ и $-\pi/4$ е един аргумент на $1-i$, то $\log(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\,(-\pi/4 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично, $\log(\sqrt{3}-i) = \ln 2 + i\,(-\pi/6 + 2k\pi)$, $\log\left(-1/2 - i\sqrt{3}/2\right) = i\,(4\pi/3 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log 1} = e^{i2\sqrt{2}k\pi}$, $i^i = e^{i\log i} = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $(1-i)^{i\sqrt{2}} = e^{i\sqrt{2}\log(1-i)} = e^{\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+2\sqrt{2}k\pi} e^{i\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.11. Да се сумират следните редове:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\varphi}{n}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$; **б)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$, $\varphi \neq 0$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\cos n\varphi}{(n-1)n}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$; **г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\sin n\varphi}{n(n+1)}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$;

д) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\cos n\varphi}{n^2-1}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$; **е)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n \sin n\varphi}{n^2-1}$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

Решение. а) От развитието на $\log_0(1+z)$ в степенен ред след заместване на z с $c - z$ получаваме $-\log_0(1-z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$, $|z| < 1$. Тъй като този ред е сходящ за всяко z, $|z| = 1$, $z \neq 1$, то от граничната теорема на Абел за всяко $\varphi \in (0, 2\pi)$ имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n} = -\lim_{z \to e^{i\varphi}} \log_0(1-z) = -\log_0(1-e^{i\varphi}).$$

Следователно, като отделим реална и имагинерна част, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\varphi}{n} = -\ln|1-e^{i\varphi}|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\varphi}{n} = -\arg_0(1-e^{i\varphi})$. Сега от $1-e^{i\varphi} = e^{i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}}\right) = -2i\sin\dfrac{\varphi}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} = 2\sin\dfrac{\varphi}{2} e^{i\frac{\varphi-\pi}{2}}$ предвид $\varphi \in (0, 2\pi)$ лесно намираме $|1-e^{i\varphi}| = 2\sin\dfrac{\varphi}{2}$ и $\arg_0(1-e^{i\varphi}) = \dfrac{\varphi - \pi}{2}$.

Отг. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\varphi}{n} = -\ln 2\sin\dfrac{\varphi}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\varphi}{n} = \dfrac{\pi - \varphi}{2}$.

б) *Упътване.* Докажете, че $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{1}{2}\left[\log_0(1+z) - \log_0(1-z)\right]$ за $|z| < 1$ и продължете както в а).

Отг. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}\right|$.

в) Редът $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{(n-1)n}$ има радиус на сходимост 1 и е сходящ за всяко z, $|z| = 1$. От разлагането $\dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ следва, че за $|z| < 1$ имаме $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{(n-1)n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{n-1} - \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^n}{n} = z\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{z^{n-1}}{n-1} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n} + z = -z\log_0(1-z) + \log_0(1-z) + z = (1-z)\log_0(1-z) + z$. Сега продължете както в а).

Отг. $(1-\cos\varphi)\ln 2\sin\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\varphi - \pi}{2}\sin\varphi + \cos\varphi$.

г) *Упътване.* Както във в), докажете, че $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n(n+1)} = \left(1+\dfrac{1}{z}\right)\log_0(1+z)$ за $|z|<1$, $z\neq 0$.

Отг. $\dfrac{\varphi}{2}(1+\cos\varphi)-\sin\varphi\ln 2\cos\dfrac{\varphi}{2}$.

д) *Упътване.* Докажете, че

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left[\left(z-\frac{1}{z}\right)\log_0(1+z)+1-\frac{z}{2}\right],\quad |z|<1,\ z\neq 0.$$

Отг. $\dfrac{1}{2}\left(1-\varphi\sin\varphi-\dfrac{1}{2}\cos\varphi\right)$.

е) *Упътване.* Докажете, че

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{nz^n}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left[\left(z+\frac{1}{z}\right)\log_0(1+z)-1+\frac{z}{2}\right],\quad |z|<1,\ z\neq 0.$$

Отг. $\dfrac{1}{4}\sin\varphi+\dfrac{1}{2}\varphi\cos\varphi$.

5.12. Да се пресметне $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\sin\theta\,d\theta$.

Решение. От решението на зад. 5.11 а) имаме

$$\log_0(1-e^{i2\theta})=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i2n\theta}}{n},\qquad \theta\in(0,\pi).$$

Освен това от решението на зад. 4.15 следва, че този ред е равномерно сходящ върху компактните подмножества на $\{z:|z|=1\}\setminus\{1\}$ и значи е равномерно сходящ за $\theta\in[\varepsilon,\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$. Тогава

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\log_0(1-e^{i2\theta})\,d\theta=-\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i2n\theta}}{n}\,d\theta=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}e^{i2n\theta}\,d\theta$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{e^{i2n\theta}}{2i}\,di2n\theta=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{e^{i2n(\pi-\varepsilon)}-e^{i2n\varepsilon}}{2i}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\varepsilon}{n^2}.$$

Тъй като този ред се мажорира от реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, той е равномерно сходящ при $\varepsilon>0$. Следователно

$$\int_0^{\pi}\log_0(1-e^{i2\theta})\,d\theta=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\log_0(1-e^{i2\theta})\,d\theta=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\varepsilon}{n^2}=0.$$

Сега, като отделим реалната част, получаваме

$$\int_0^\pi \ln 2\sin\theta\,d\theta = 0 \Rightarrow \int_0^\pi \ln 2\,d\theta + \int_0^\pi \ln\sin\theta\,d\theta = 0$$
$$\Rightarrow \int_0^\pi \ln\sin\theta\,d\theta = -\pi\ln 2.$$

§ 6. Конформни изображения с елементарни функции

В комплексния анализ е възприето холоморфните функции, които осъществяват взаимно-еднозначно изображение, да се наричат *еднолистни*, а самото изображение — *конформно* и *еднолистно*.

В този параграф се разглеждат конформни и еднолистни изображения, осъществявани от елементарните функции z^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, функцията на Жуковски и нейните обратни, e^z, тригонометричните функции и техните обратни, $\log z$. Като правило думите „конформно и еднолистно“ във формулировката ще се изпускат, но те винаги трябва да се имат предвид.

Функцията z^α се дефинира, както е известно, с равенството $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ и тя е многозначна. Нейни еднозначни клонове се отделят, като се отделят еднозначни клонове на $\log z$. Това най-често се прави, като комплексната равнина се разреже по някой лъч, т. е. като се разглеждат области от вида $D = \{z \in \mathbb{C}, \varphi < \arg z < \varphi + 2\pi,\ \varphi \in \mathbb{R}\}$, а отделеният клон е $z^\alpha = e^{\alpha(\ln|z| + i \arg z)}$. Ако $\alpha \in \mathbb{R}$, то $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$, така че $|z^\alpha| = |z|^\alpha$, $\arg z^\alpha = \alpha \arg z$. За да бъде така избраният клон еднолистна функция в някоя подобласт $D_1 \subset D$, трябва от $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in D_1$, да следва $z_1^\alpha \neq z_2^\alpha$. Ако $z_1^\alpha = z_2^\alpha$, то $|z_1|^\alpha = |z_2|^\alpha$ и $e^{i\alpha \arg z_1} = e^{i\alpha \arg z_2}$, т. е. $|z_1| = |z_2|$ и $\alpha \arg z_1 = \alpha \arg z_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Последното равенство показва, че ако D_1 е ъгъл с връх в началото и мярка, по-малка или равна на $\dfrac{2\pi}{|\alpha|}$, то z^α ще бъде еднолистна в него. В такива именно ъгли ще изучаваме геометричните свойства на z^α в дадените по-долу задачи.

6.1. Да се намери образът на лъча $\arg z = \theta$ чрез функцията $w = z^\alpha$.

Отг. Лъчът $\arg w = \alpha\theta$.

6.2. Да се намери образът на ъгъла $0 < \arg z < \theta$ чрез функцията $w = z^\alpha$.

Решение. Съгласно задача 6.1 лъчът $\arg z = 0$ се изобразява в $\arg w = 0.\alpha = 0$, а $\arg z = \theta$ — в $\arg w = \alpha\theta$. Следователно търсеният образ е ъгълът $0 < \arg w < \alpha\theta$, ако $\alpha > 0$, или $\alpha\theta < \arg w < 0$, ако $\alpha < 0$.

6.3. Да се изобрази ъгълът $0 < \arg z < \theta \leq 2\pi$ в ъгъла $0 < \arg w < \beta \leq 2\pi$.

Решение. Чрез z^α ъгълът $0 < \arg z < \theta$ се изобразява в ъгъла $0 < \arg w < \alpha\theta$. За да съвпадне този образ с ъгъла $0 < \arg w < \beta$, трябва $\alpha\theta = \beta$. Търсената функция е $w = z^{\frac{\beta}{\theta}}$.

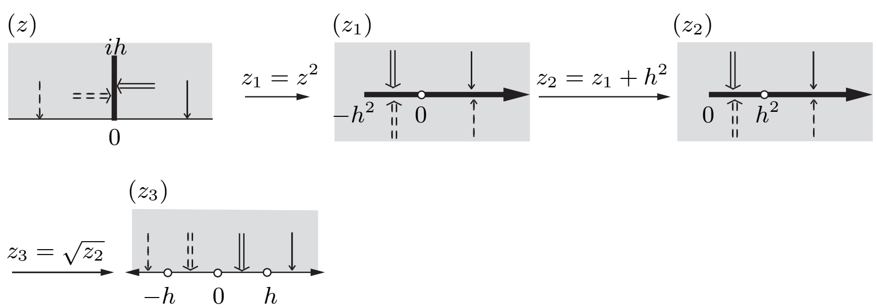
6.4. Да се изобрази цялата равнина, разрязана по лъча Ox^+, в единичния кръг.

Решение. Дадената област е ъгълът $0 < \arg z < 2\pi$. Той се изобразява в горната полуравнина, която е точно ъгълът $0 < \arg z_1 < \pi$, чрез функцията $z_1 = z^{\frac{\pi}{2\pi}} = z^{\frac{1}{2}}$ съгласно зад. 6.3 (изрично подчертаваме, че $z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}$).

Нека сега a е произволно число от горната полуравнина. Тогава $z_2 = e^{i\varphi}\dfrac{z_1 - a}{z_1 - \overline{a}}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, изобразява тази полуравнина в единичния кръг. Търсената функция е $w = z_2 \circ z_1 = e^{i\varphi}\dfrac{\sqrt{z} - a}{\sqrt{z} - \overline{a}}$.

6.5. Да се изобрази областта $\{\operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z = iy,\ 0 \le y \le h\}$ в горната полуравнина.

Решение. Най-напред трябва да „изправим“ разреза $[0, ih]$, който сключва ъгъл $\pi/2$ с $\mathbb{R}$, т. е. съгласно зад. 6.3 трябва да направим трансформацията $z_1 = z^2$. Така последователно получаваме (фиг. 6.1)



Фиг. 6.1

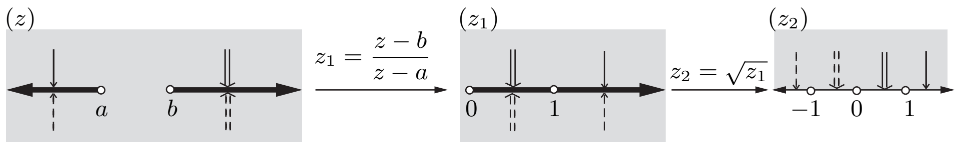
Търсената функция е $f(z) = z_3 \circ z_2 \circ z_1 = \sqrt{z^2 + h^2}$.

Забележка. В това решение, както и в повечето, които следват, със стрелки от вида $\longrightarrow$, $\Longrightarrow$, $\dashrightarrow$, $\Rrightarrow$ е посочено съответствието на границите при отделните трансформации. Така например разрезът отива в отсечката $[-h, h]$, като левият му бряг (стрелка $\Rrightarrow$) отива в $[-h, 0]$, а десният (стрелка $\Longleftarrow$) — в $[0, h]$.

6.6. Да се изобрази областта $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, a] \cup [b, +\infty),\ a < b\}$ в горната полуравнина.

Решение. Последователните трансформации са показани на фиг. 6.2. Тогава $f(z) = z_2 \circ z_1 = \sqrt{\dfrac{z - b}{z - a}}$.

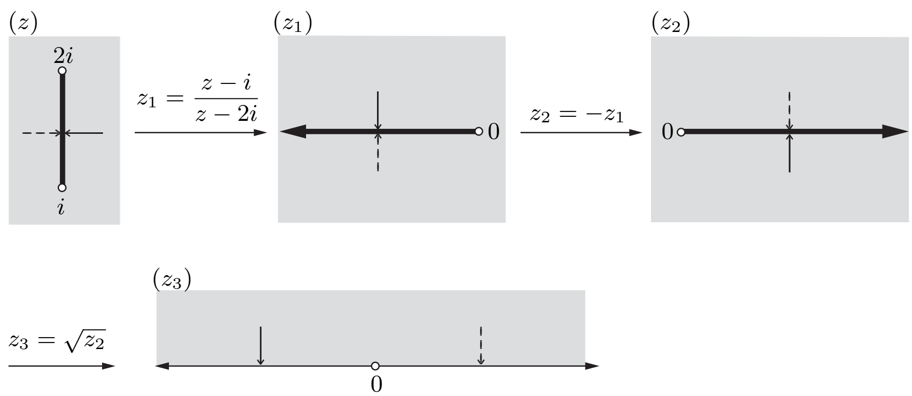
Забележка. Функцията $z_1 = \dfrac{z - b}{z - a}$ обикновено наричаме „залепване“ на лъчите $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$. Вж. зад. 3.21.



Фиг. 6.2

6.7. Да се изобрази областта $\mathbb{C} \setminus [i, 2i]$ в горната полуравнина.

Решение. $f = z_3 \circ z_2 \circ z_1$, където z_1, z_2 и z_3 са последователните трансформации от фиг. 6.3.



Фиг. 6.3

Забележка. Функцията $z_1 = \dfrac{z-i}{z-2i}$ обикновено се нарича „разтягане на отсечка до лъч“.

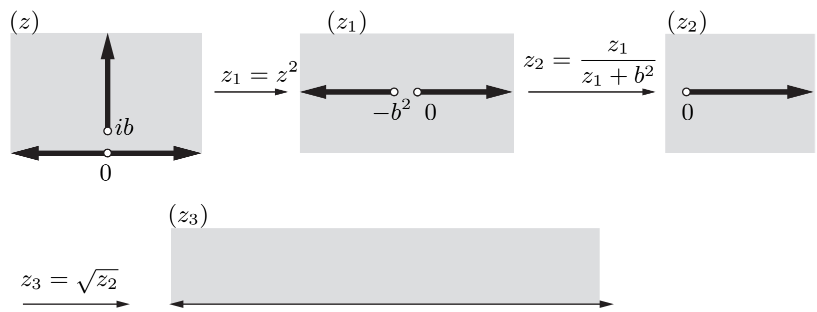
6.8. Да се изобрази областта $\{\operatorname{Im} z > 0\} \setminus [ib, +i\infty)$, $b > 0$, в $\{\operatorname{Im} w > 0\}$. Проследете сами съответствието на границите.

Решение. $f = z_3 \circ z_2 \circ z_1$, където z_1, z_2 и z_3 са последователните трансформации от фиг. 6.4.

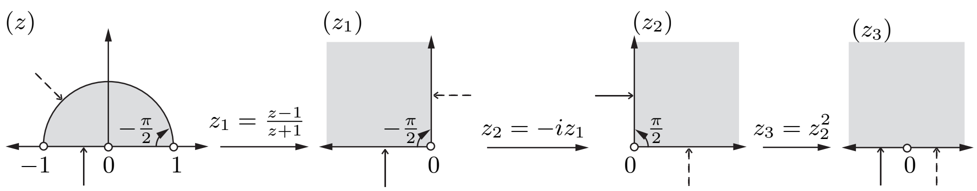
6.9. Да се изобрази областта $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ в $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

Решение. Последователните трансформации са показани на фиг. 6.5.

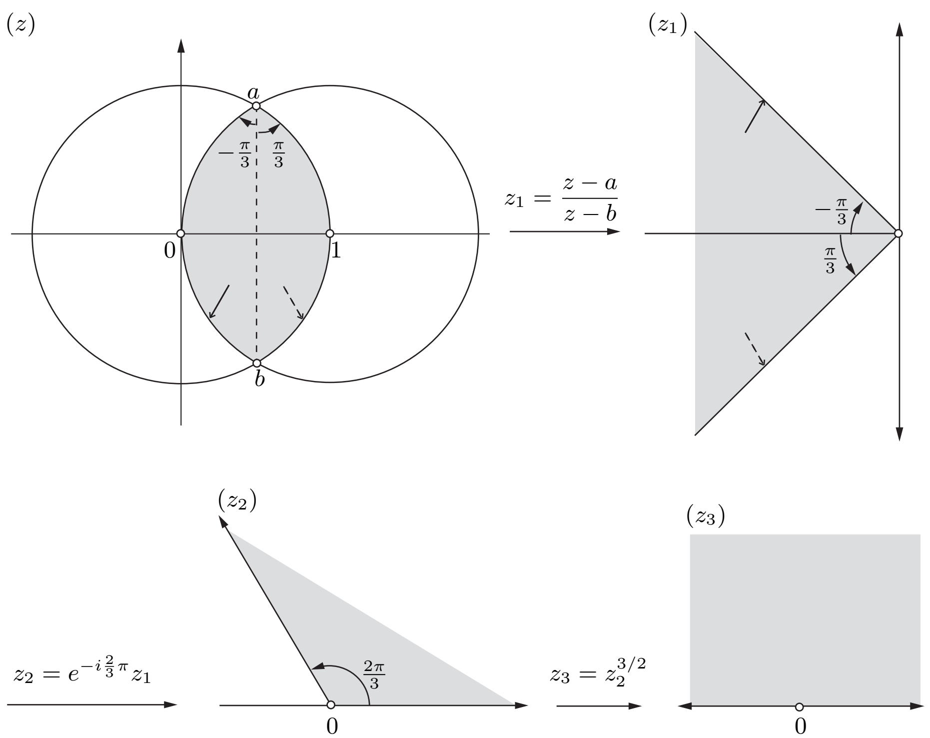
Обяснение. Чрез z_1 изправяме дъгата, без да изкривим отсечката $[-1, 1]$, като изпратим общата им точка -1 в ∞. Ъгълът е $-\pi/2$, отсечката $[-1, 1]$ отива в $(-\infty, 0]$ и поради конформността дъгата ще отиде в лъч, който сключва с $(-\infty, 0]$ ъгъл $-\pi/2$, т. е. в Oy^+. Образът на областта чрез z_1 е втори квадрант.



Фиг. 6.4



Фиг. 6.5



Фиг. 6.6

6.10. Да се изобрази областта $\{|z| < 1\} \cap \{|z-1| < 1\}$ в $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

Решение. Нека a и b са пресечните точки на двете окръжности. Чрез трансформацията $z_1 = \dfrac{z-a}{z-b}$ точката b отива в ∞ и следователно двете окръжности се изправят. Тъй като те се пресичат под ъгъл $2\pi/3$ и отсечката $[a, b]$ отива в лъча $[0, -\infty)$, то двете дъги $[\widehat{a, b}]$ се изобразяват в лъчи, сключващи с $[0, -\infty)$ ъгли съответно $-\pi/3$ и $\pi/3$. Резултатът може да се проследи на фиг. 6.6.

6.11. Да се докаже, че *функцията на Жуковски* $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ притежава следните свойства:

а) еднолистна е във всяка област, несъдържаща различни точки z_1 и z_2, такива че $z_1 z_2 = 1$;

б) ако $R > 0$ и $R \neq 1$, то окръжността $|z| = R$ се изобразява в елипсата

$$\frac{u^2}{\left[\dfrac{1}{2}\left(R + \dfrac{1}{R}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\dfrac{1}{2}\left(R - \dfrac{1}{R}\right)\right]^2} = 1,$$

чиито фокуси са ± 1; ако $R = 1$, окръжността $|z| = 1$ се изобразява в отсечката $[-1, 1]$, описана два пъти;

в) ако $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\varphi \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, то лъчът $\arg z = \varphi$ се изобразява в клон на хиперболата

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1,$$

чиито фокуси са точките ± 1. При $\varphi = 0$ отсечката $[1, 0]$ и лъчът $[1, +\infty)$ се изобразяват в лъча $[1, +\infty)$. При $\varphi = \pi$ отсечката $[0, -1]$ и лъчът $(-\infty, -1]$ се изобразяват в лъча $(-\infty, -1]$. Ако $\varphi = \pi/2$, лъчът $[i, +i\infty)$ се изобразява в лъча $[0, +i\infty)$, а отсечката $[i, 0]$ — в лъча $[0, -i\infty)$. Ако $\varphi = 3\pi/2$, отсечката $[-i, 0]$ отива в лъча $[0, +i\infty)$, а лъчът $(-i\infty, -i]$ — в лъча $(-i\infty, 0]$.

Решение. а) Нека $z_1 \neq z_2$, но $w(z_1) = w(z_2)$, т. е.

$$\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right).$$

Оттук следва $z_1 z_2 = 1$. Следователно, ако една област не съдържа различни точки z_1 и z_2, за които $z_1 z_2 = 1$, то в нея функцията на Жуковски е еднолистна. Най-често срещаните области на еднолистност, с които се работи, са $\{|z|<1\}$, $\{|z|>1\}$, $\{\operatorname{Im} z>0\}$, $\{\operatorname{Im} z<0\}$.

б) Нека $z=Re^{i\varphi}$, $\varphi\in[0,2\pi]$ и $w=u+iv$. Тогава от

$$u+iv=\frac{1}{2}\left(Re^{i\varphi}+\frac{1}{Re^{i\varphi}}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\varphi+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\varphi\right]$$

получаваме

(1) $$u=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\varphi,\quad v=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\varphi.$$

От (1) за $R\neq 1$ следва

(2) $$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\right]^2}+\frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\right]^2}=1,$$

така че образът на окръжността $|z|=R$ е елипсата с уравнение (2), която има полуоси $a=\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)$ и $b=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)$ и фокуси ± 1. Ако $R=1$, образът се дава с уравненията $u=\cos\varphi$, $v=0$. Следователно, когато z описва горната единична полуокръжност от 1 до -1, образът описва отсечката $[1,-1]$, а ако z описва долната полуокръжност $z=e^{i\varphi}$, $\varphi\in[\pi,2\pi]$, образът описва отсечката $[-1,1]$.

в) Ако $\varphi\neq 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$, то от (1) получаваме, че образът на лъча $\arg z=\varphi$ е единият клон на хиперболата

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi}-\frac{v^2}{\sin^2\varphi}=1,$$

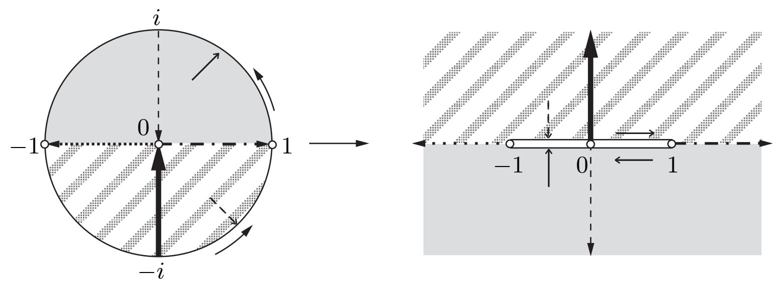
чиито фокуси са ± 1. Другият клон на тази хипербола е образ на лъча $\arg z=\pi-\varphi$.

При $\varphi=\pi/2$ параметричното представяне на образа на Oy^+ е $u=0$, $v=\frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)$ и лежи върху имагинерната ос. При това, когато R се мени от 0 до $+\infty$, v се мени от $-\infty$ до $+\infty$. Аналогично се разглежда и случаят $3\pi/2$.

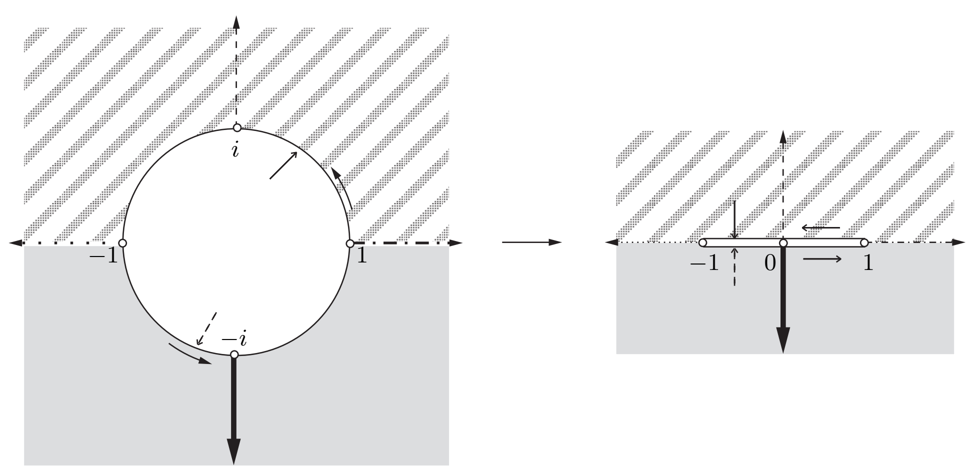
6.12. Да се намери образът на областта D чрез функцията на Жуковски, ако:

а) $D=\{|z|<1\}$; **б)** $D=\{|z|>1\}$; **в)** $D=\{|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$;
г) $D=\{|z|<1,\ \operatorname{Im} z<0\}$; **д)** $D=\{\operatorname{Im} z>0\}$; **е)** $D=\{\operatorname{Im} z<0\}$;
ж) $D=\{|z|<R<1\}$; **з)** $D=\{|z|>1/R,\ R<1\}$.

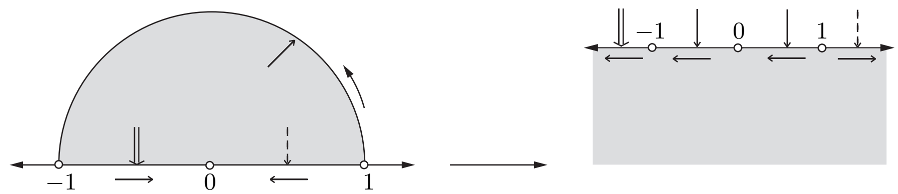
Решение. Търсените образи схематично са дадени на фиг. 6.7–6.14, където с различна щриховка са показани образите на отделни части от съответната област. Със стрелки е дадено съответствието на ориентираните граници.



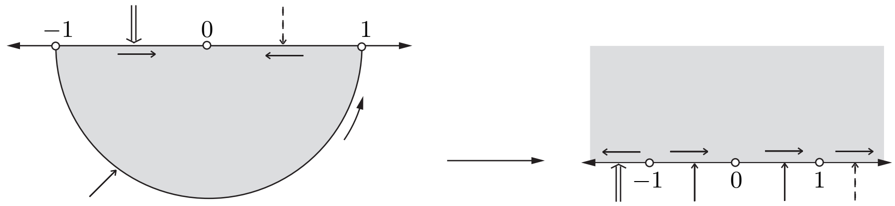
Фиг. 6.7. Зад. 6.12 а)



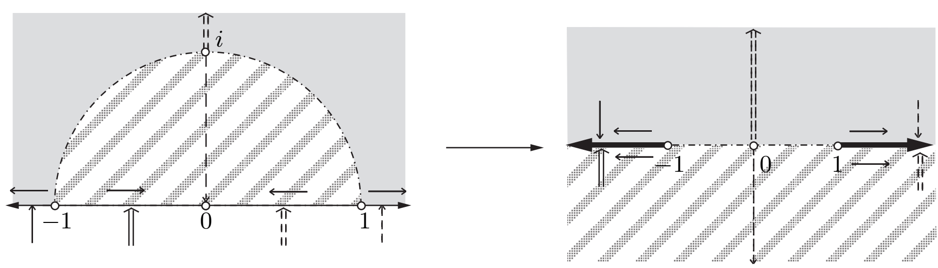
Фиг. 6.8. Зад. 6.12 б)



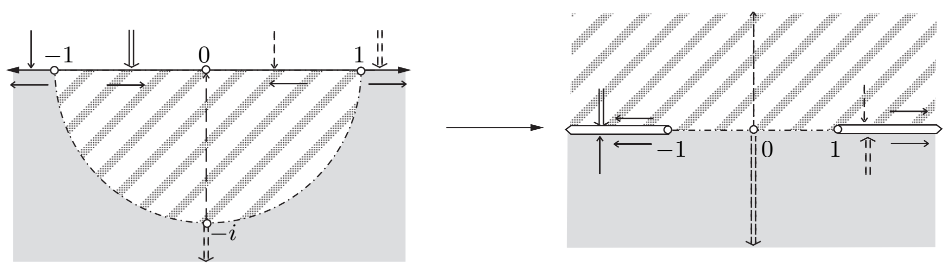
Фиг. 6.9. Зад. 6.12 в)



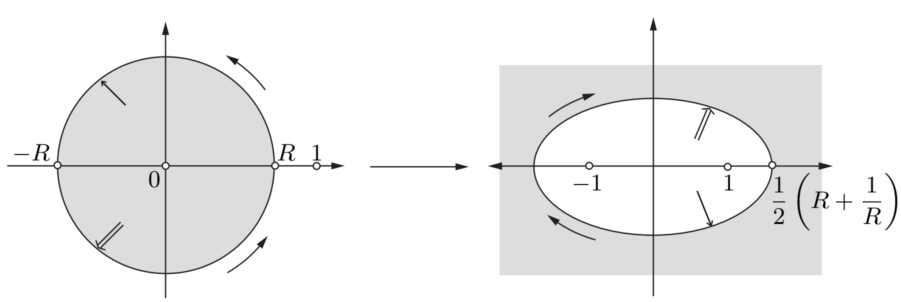
Фиг. 6.10. Зад. 6.12 г)



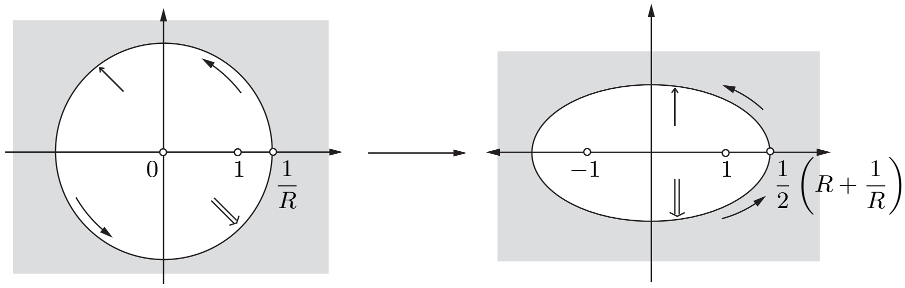
Фиг. 6.11. Зад. 6.12 д)



Фиг. 6.12. Зад. 6.12 е)



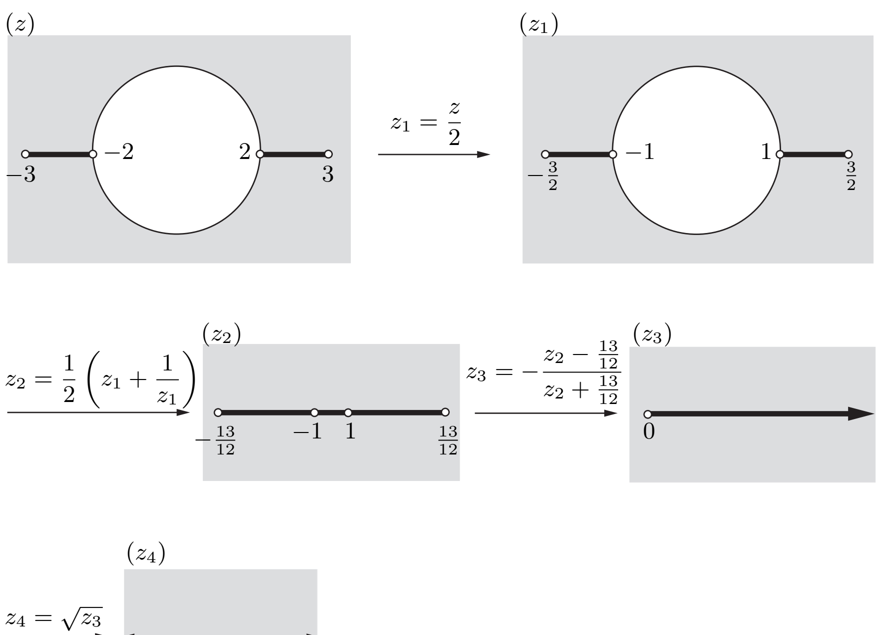
Фиг. 6.13. Зад. 6.12 ж)



Фиг. 6.14. Зад. 6.12 з)

6.13. Да се изобрази областта $|z|>2$, разрязана по отсечките $[-3,-2]$ и $[2,3]$, в горната полуравнина.

Решение. Последователните трансформации са изобразени на фиг. 6.15.

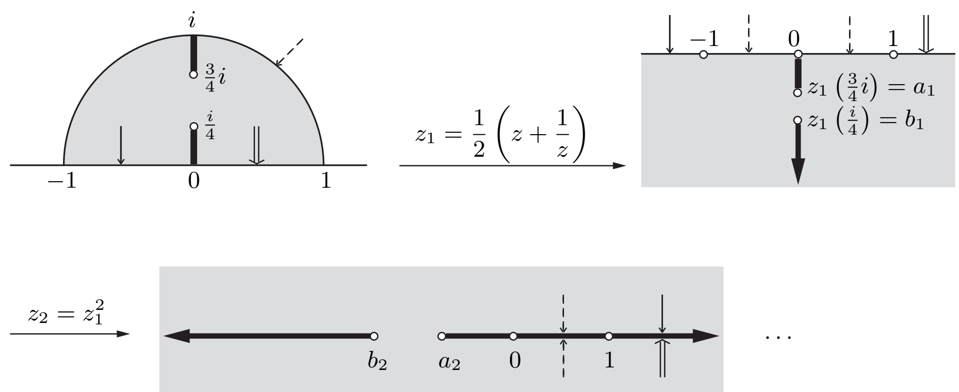


Фиг. 6.15

Забележка. Решете задачата без да използвате функцията на Жуковски.

6.14. Да се изобрази областта $\{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, разрязана по отсечките $[0, i/4]$ и $[3i/4, i]$, в горната полуравнина.

Решение. Получаваме последователно областите, изобразени на фиг. 6.16.



Фиг. 6.16

Нататък продължаваме както в зад. 6.6. Тук a_1, b_1, a_2, b_2, ... са последователните образи на $\dfrac{3}{4}i$ и $\dfrac{i}{4}$ чрез z_1, z_2, ... Точните им стойности не сме пресмятали.

6.15. Нека $D = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ и $D_1 = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$. Да се докаже, че във всяка от тези области има по две обратни на функцията на Жуковски. Да се намерят образите на D и D_1 чрез тях, както и техните аналитични изрази.

Решение. Областта D е външността на отсечката $[-1, 1]$ и от решенията на зад. 6.12, а) и б), се вижда, че тя е образ чрез функцията на Жуковски както на $|z| < 1$, така и на $|z| > 1$. Следователно в D има две обратни на функцията на Жуковски $f_1(w)$ и $f_2(w)$, изобразяващи D съответно в $|z| < 1$ и $|z| > 1$. Аналогично, от решенията на зад. 6.12, д) и е), се вижда, че D_1 е образ чрез функцията на Жуковски както на $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, така и на $\{\operatorname{Im} z < 0\}$. Следователно в D_1 има две обратни на функцията на Жуковски $g_1(w)$ и $g_2(w)$, изобразяващи я съответно в $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ и $\{\operatorname{Im} z < 0\}$.

Нека сега $w \in D$ е произволно число. За да намерим неговите прообрази чрез функцията на Жуковски, трябва да решим уравнението $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, откъдето намираме $z_{1,2} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$. Да изберем в D

онзи клон на $\sqrt{w^2-1}$, който е положителен върху лъча $(1,+\infty)$, т. е.

$$\sqrt{w^2-1} = \sqrt{|w^2-1|}e^{\frac{i}{2}(\arg(w-1)+\arg(w+1))},$$

като за $w > 1$ имаме $\arg(w-1) = \arg(w+1) = 0$. Нека сега $f_1(w) = w - \sqrt{w^2-1}$. Тя е една от обратните на функцията на Жуковски в D и следователно я изобразява или в $|z| < 1$, или в $|z| > 1$. Но

$$f_1(\infty) = \lim_{\substack{w\to\infty \\ w>1}}(w - \sqrt{w^2-1}) = \lim_{\substack{w\to\infty \\ w>1}} \frac{1}{w+\sqrt{w^2-1}} = 0 \in \{|z| < 1\},$$

така че $f_1(D) = \{|z| < 1\}$. Тъй като $f_2(w) = w + \sqrt{w^2-1} = \dfrac{1}{f_1(w)}$, то тя изобразява D в $|z| > 1$ и е втората обратна, чието съществуване беше доказано по-горе.

Да разгледаме сега областта D_1. Това е комплексната равнина, разрязана по лъчите $\{z < -1\}$ и $\{z > 1\}$. Както беше отбелязано по-горе, в D_1 има две обратни на функцията на Жуковски: $g_1(w) : D_1 \to \{\operatorname{Im} z > 0\}$ и $g_2(w) : D_1 \to \{\operatorname{Im} z < 0\}$. За всяко $w \in D_1$ $g_1(w)$ и $g_2(w)$ са решенията на уравнението $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, т. е. това са $w \pm \sqrt{w^2-1}$. Да дефинираме $\sqrt{w^2-1}$ в D_1 така, че $\sqrt{w^2-1}\big|_{w=0} = i$. За това е достатъчно да положим $\sqrt{w^2-1} = \sqrt{|w^2-1|}e^{\frac{i}{2}(\arg(w-1)+\arg(w+1))}$, където за $w \in (-1,1)$ имаме $\arg(w-1) = \pi$, $\arg(w+1) = 0$. (Проверете има ли връзка между този корен и използвания в дефиницията на f_1 и f_2 по-горе!) Тъй като $w + \sqrt{w^2-1}\big|_{w=0} = i \in \{\operatorname{Im} z > 0\}$, то ще имаме $z = g_1(w) = w + \sqrt{w^2-1}$, а тогава $g_2(w) = w - \sqrt{w^2-1} = \dfrac{1}{g_1(w)}$.

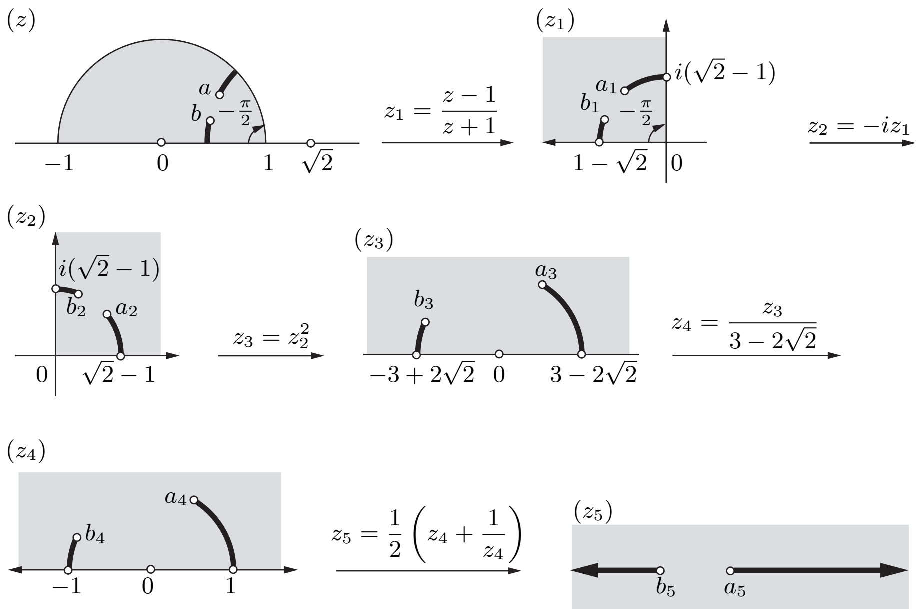
6.16. Да се намери образът на областта $D = \{\operatorname{Im} w > 0\}$ чрез всяка от обратните на функцията на Жуковски, намерени в зад. 6.15.

Решение. От зад. 6.12, а), б), д) и е), веднага получаваме $f_1(D) = \{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z < 0\}$, $f_2(D) = \{\operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 1\}$, $g_1(D) = \{\operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 1\} = f_2(D)$, $g_2(D) = \{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z < 0\} = f_1(D)$.

6.17. Да се изобрази областта $\{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, разрязана по две дъги от окръжността $|z - \sqrt{2}| = 1$ (фиг. 6.17), в $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

Решение. Пресечните точки $\sqrt{2}-1$ и $\sqrt{2}+1$ на $\{|z-\sqrt{2}| = 1\}$ с Ox са инверсни относно $\{|z| = 1\}$. Следователно $\{|z| = 1\}$, $\{|z-\sqrt{2}| = 1\}$

и Ox са две по две ортогонални. Започваме с изправяне на единичната окръжност:



Фиг. 6.17

Нататък продължаваме както в зад. 6.6.

Забележка. Решете задачата без да използвате функцията на Жуковски.

6.18. Да се изобрази външността на „кръста“ $[-1,1] \cup [-2i, i]$ в единичния кръг.

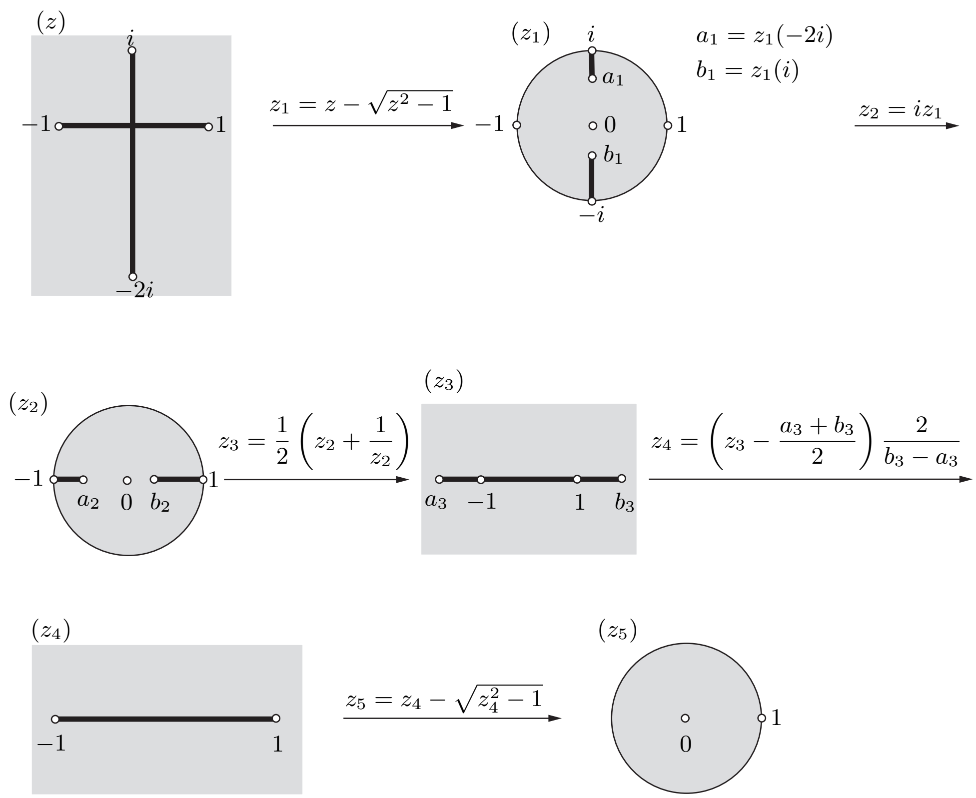
Решение. Нека $z_1 = z - \sqrt{z^2-1}$ е обратната на функцията на Жуковски, изобразяваща $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ в $|w| < 1$ (това е функцията $f_1(z)$ от зад. 6.15). Графичното решение на задачата е показано на фиг. 6.18.

6.19. Да се изобрази цялата равнина, разрязана по долната единична полуокръжност и по отсечката $[0, -2i]$, в горната полуравнина.

Упътване. Чрез $z_1 = \dfrac{z+i}{z-i}$ изобразете областта във външността на „кръст“ и продължете както в зад. 6.18.

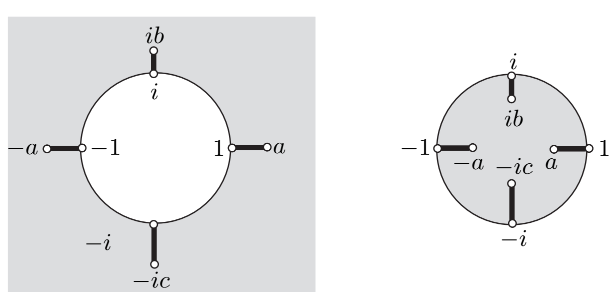
6.20. Да се изобрази цялата равнина, разрязана по долната единична полуокръжност и по лъча $[0, -i\infty)$, в горната полуравнина.

Упътване. Направете трансформацията $z_1 = \dfrac{z+i}{z-i}$.



Фиг. 6.18

6.21. Да се изобразят областите, показани на фиг. 6.19, в единичния кръг.

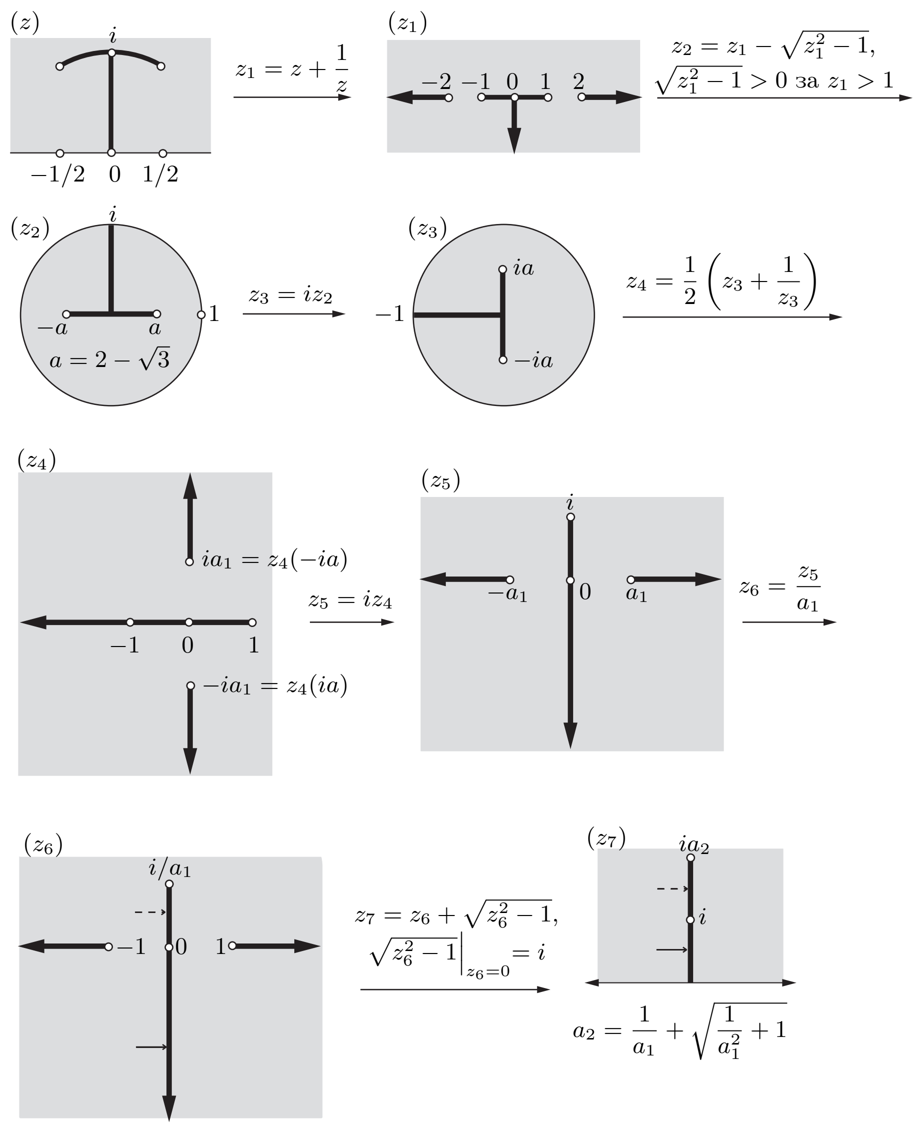


Фиг. 6.19

Упътване. Започнете с функцията на Жуковски.

6.22. Да се изобрази горната полуравнина, разрязана по отсечката $[0, i]$ и по дъгата $\{z : |z| = 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0,\ -1/2 \le \mathrm{Re}\, z \le 1/2\}$, в горната полуравнина.

Решение. Последователно прилагаме изображенията (фиг. 6.20):



Фиг. 6.20

Нататък е ясно (вж. зад. 6.5).

6.23. Да се изобрази външността D на елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$, в единичния кръг.

Решение. D се изобразява чрез $z_1=\dfrac{z}{\sqrt{a^2-b^2}}$ във външността D_1 на елипсата

$$\frac{x_1^2}{\dfrac{a^2}{a^2-b^2}}+\frac{y_1^2}{\dfrac{b^2}{a^2-b^2}}=1,$$

която има фокуси в точките ±1. Нека $R>1$ е корен на уравнението

$$\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Тогава $\dfrac{1}{2}\left(R-\dfrac{1}{R}\right)=\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$. Оттук следва, че функцията на Жуковски изобразява както $|z_2|<1/R$, така и $|z_2|>R$ в D_1. Следователно обратната на функцията на Жуковски $z_2=z_1-\sqrt{z_1^2-1}$ изобразява D_1 в $|z_2|<1/R$. Търсеното изображение е $w=Rz_2\circ z_1$. Тук отново $\sqrt{z_1^2-1}>0$ за $z_1>1$.

6.24. Да се изобрази луничката $\{|z|<1,\ |z+i|>\sqrt{2}\}$, разрязана по отсечката $[3i/4, i]$, в горната полуравнина.

Решение. Двете окръжности сключват с отсечката $[1,-1]$ ъгли съответно $-\pi/2$ и $-\pi/4$. След няколко изправяния ще получим резултата, показан на фиг. 6.21. Нататък продължаваме както в зад. 6.5. Вместо z_4 бихме могли да направим трансформация на Жуковски. (Опитайте!)

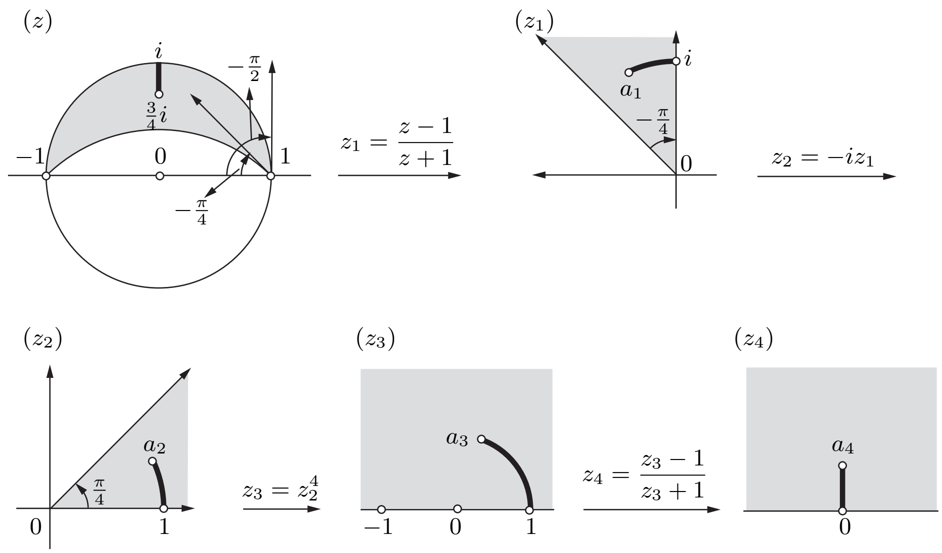
6.25. Да се изобрази луничката $\{|z-i|<\sqrt{2},\ |z+i|>\sqrt{2}$, разрязана по дъгите от единичната окръжност $\widehat{[1, e^{i\frac{\pi}{4}}]}$ и $\widehat{[e^{i\frac{3}{4}\pi}, -1]}$, в горната полуравнина.

Решение. Последователно прилагаме изображенията, показани на фиг. 6.22, след което продължаваме както в зад. 6.6.

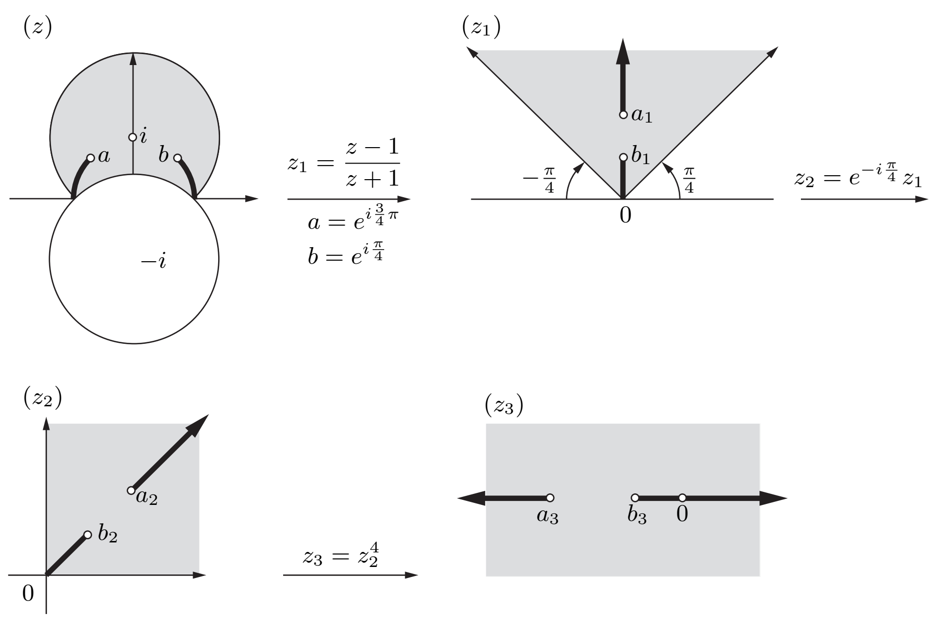
6.26. Да се докаже, че функцията $w=e^z$ притежава следните свойства:

а) еднолистна е във всяка ивица $D=\{z\in\mathbb{C}: a<\operatorname{Im}z<b,\ b-a\le 2\pi\}$ и $w(D)=\{w\in\mathbb{C}: a<\arg w<b\}$.

б) всяка права $y=y_0$ се изобразява взаимноеднозначно в лъча $\arg w=y_0$.



Фиг. 6.21



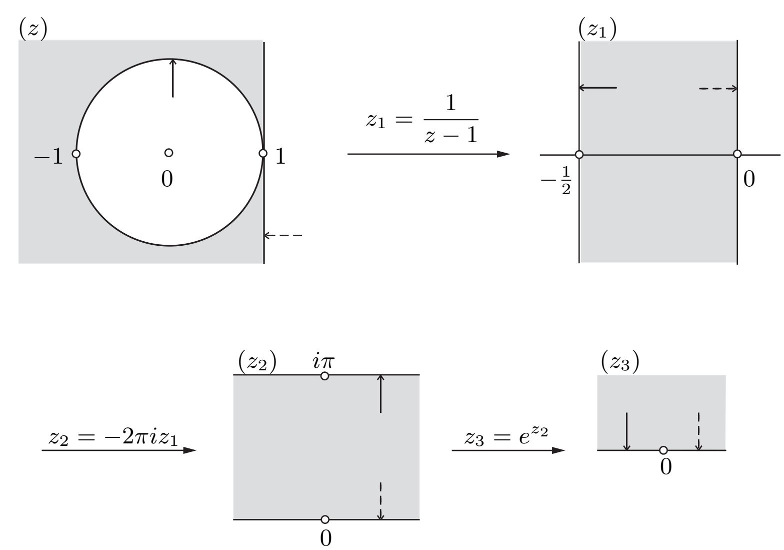
Фиг. 6.22

в) всяка отсечка $z = x_0 + iy$, $a < y < b$ се изобразява в дъгата $\{w : |w| = e^{x_0},\ a < \arg w < b\}$.

Упътване. Използвайте, че $|e^{x+iy}| = e^x$, $\arg e^{x+iy} = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.27. Да се изобрази областта $\{|z| > 1,\ \operatorname{Re} z < 1\}$ в $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

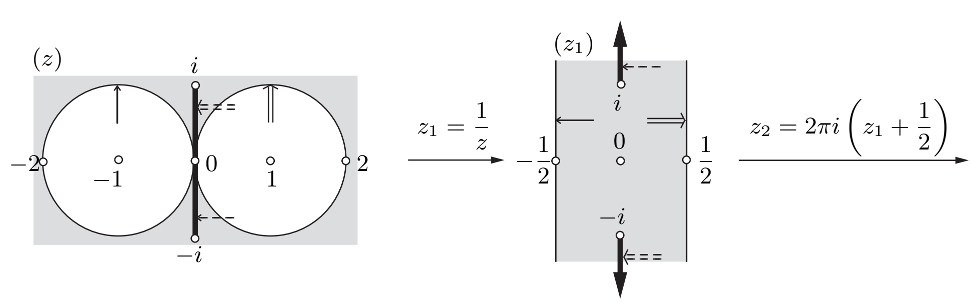
Решение. Вижте фиг. 6.23.



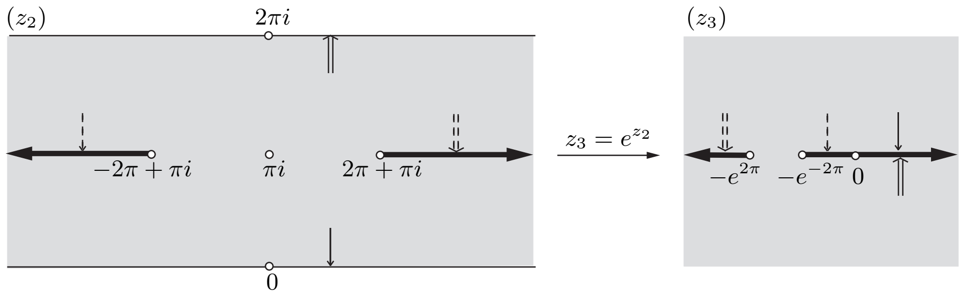
Фиг. 6.23

6.28. Да се изобрази областта $\{|z-1| > 1,\ |z+1| > 1\}$, разрязана по отсечката $[-i, i]$, в горната полуравнина.

Решение. Най-напред прилагаме изображенията от фиг. 6.24 и после продължаваме както в зад. 6.8 след z_1.



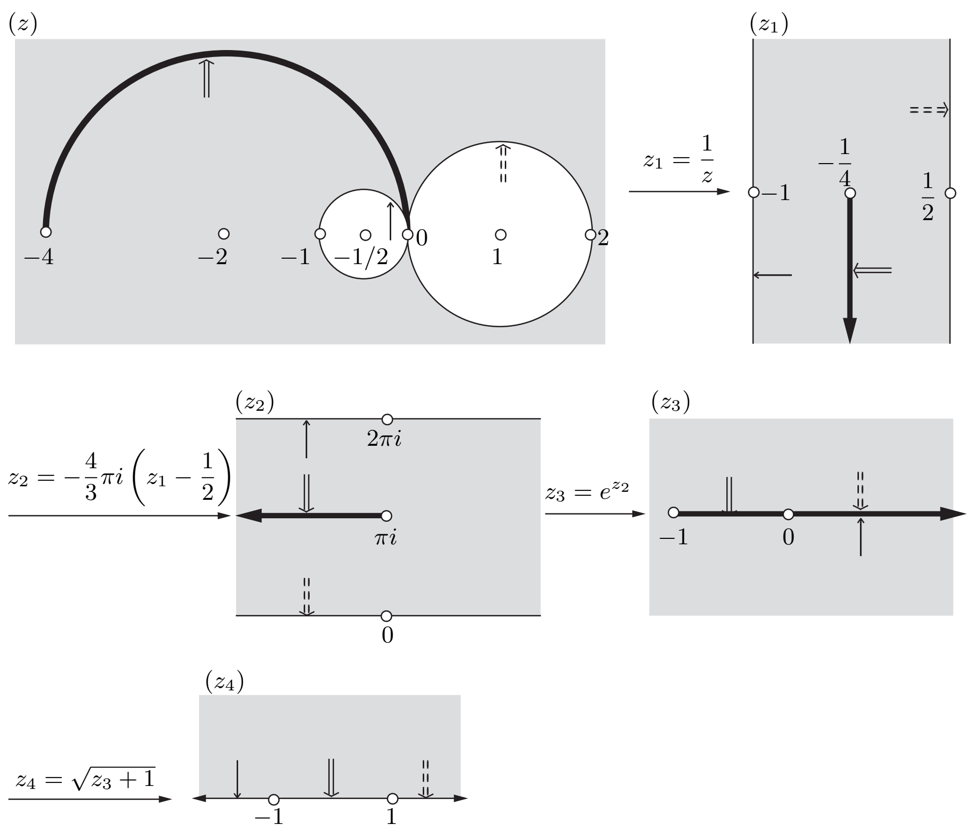
Фиг. 6.24



Фиг. 6.24 (продължение)

6.29. Да се изобрази областта $\{|z+\frac{1}{2}| > \frac{1}{2},\ |z-1| > 1\}$, разрязана по дъгата $z = -2 + 2e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$, в горната полуравнина.

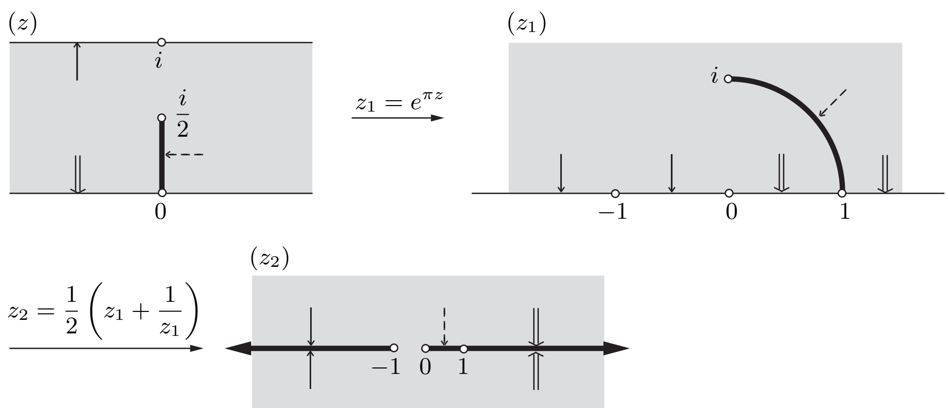
Решение. Получаваме последователно (фиг. 6.25):



Фиг. 6.25

6.30. Да се изобрази ивицата $\{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$, разрязана по отсечката $[0, i/2]$, в горната полуравнина.

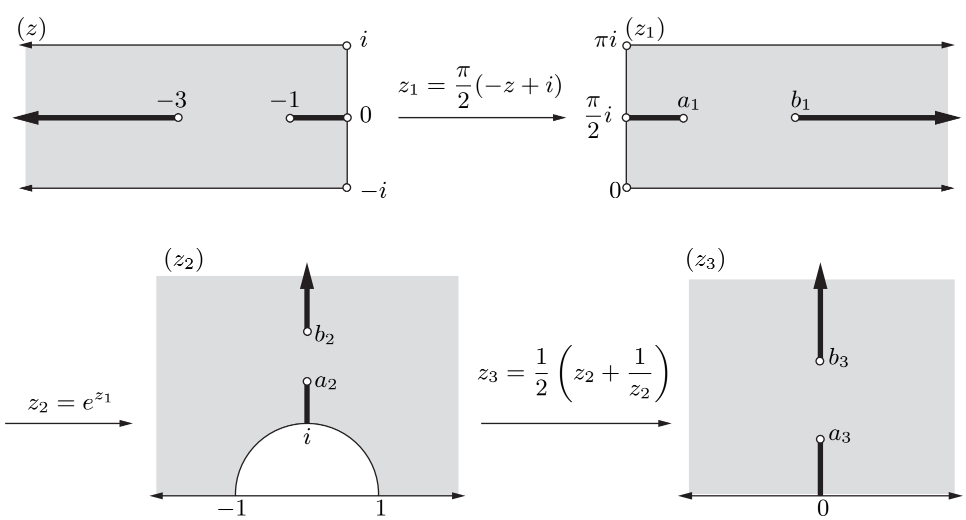
Решение. Първите две преобразования са показани на фиг. 6.26. Нататък е ясно — слепване на лъчи и коренуване.



Фиг. 6.26

6.31. Да се изобрази полуивицата $\{-1 < \operatorname{Im} z < 1, \operatorname{Re} z < 0\}$, разрязана по отсечката $[-1, 0]$ и по лъча $(-\infty, -3]$, в горната полуравнина.

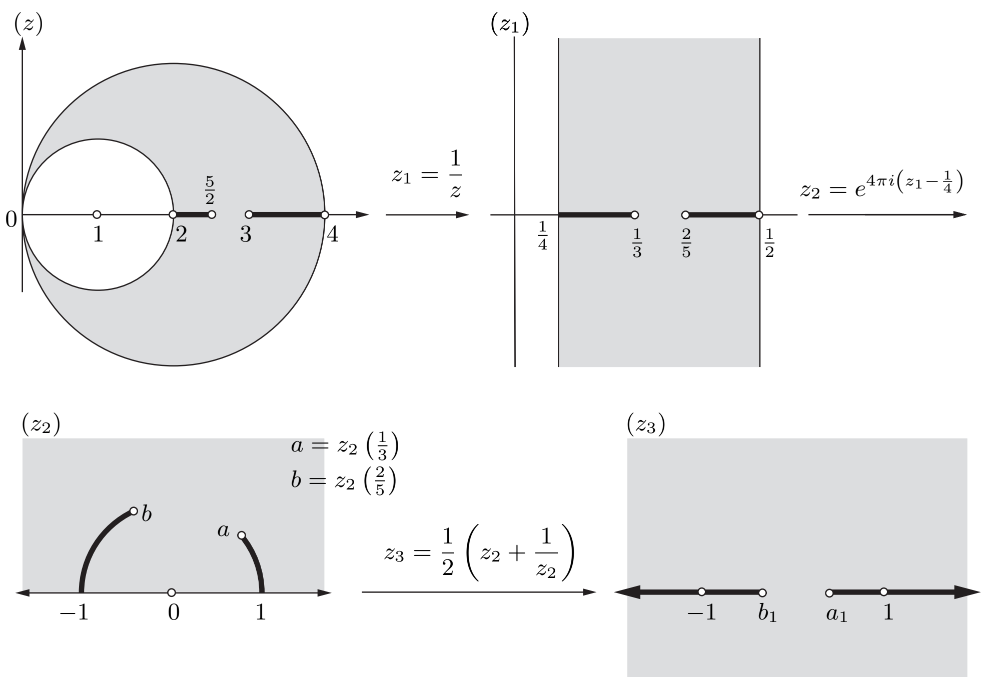
Решение. Първите три трансформации са показани на фиг. 6.27. Нататък е ясно — повдигане на квадрат, слепване на лъчи, коренуване.



Фиг. 6.27

6.32. Областта $\{|z-1|>1,\ |z-2|<2\}$, разрязана по отсечките $[2, 5/2]$ и $[3, 4]$, да се изобрази в горната полуравнина.

Решение. Последователно прилагаме изображенията (фиг. 6.28):



Фиг. 6.28

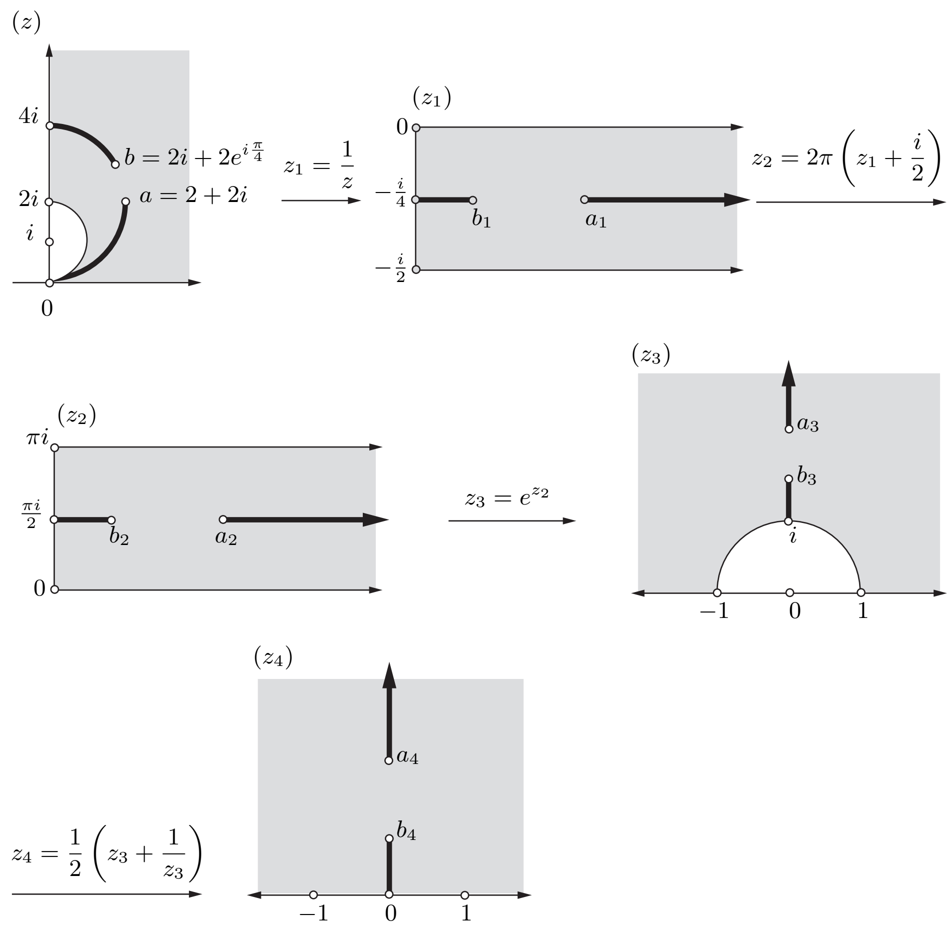
Нататък е ясно. Проследете сами съответствието на границите.

6.33. Областта $\{\operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0,\ |z-i| > 1\}$, разрязана по дъгите $\gamma_1 = \{z : z = 2i + 2e^{i\varphi},\ \varphi \in [-\pi/2, 0]\}$ и $\gamma_2 = \{z : z = 2i + 2e^{i\varphi},\ \varphi \in [\pi/4, \pi/2]\}$, да се изобрази в горната полуравнина.

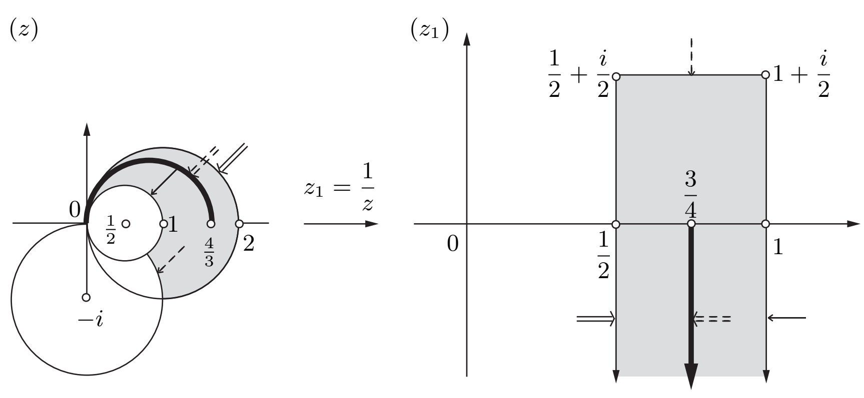
Решение. Първите четири трансформации са представени графично на фиг. 6.29. След това е ясно — изправяне на правия ъгъл с z_4^2, слепване на лъчи, кореноване.

6.34. Областта $\{|z-1/2| > 1/2,\ |z-1| < 1,\ |z+i| > 1\}$, разрязана по дъгата $\gamma = \{z : z = 2/3 + 2e^{i\varphi}/3,\ \varphi \in [0, \pi]\}$, да се изобрази в $\operatorname{Im} w > 0$.

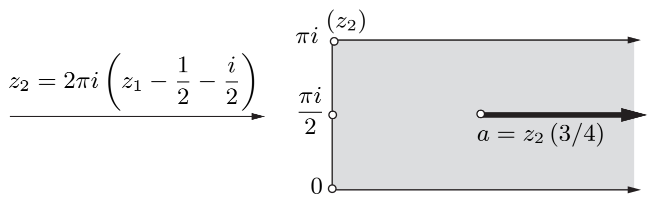
Решение. Началото на решението е показано на фиг. 6.30. Нататък е както в предишната задача след z_2.



Фиг. 6.29



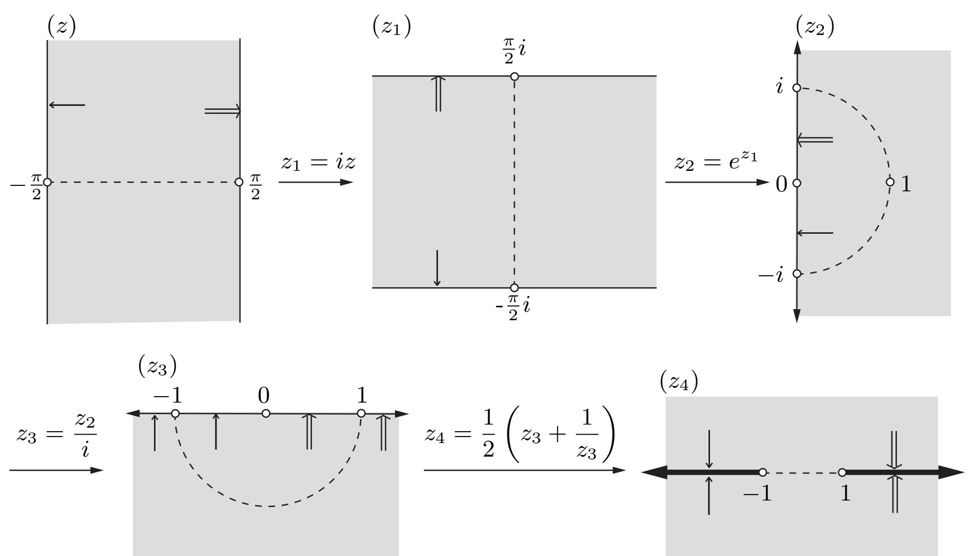
Фиг. 6.30



Фиг. 6.30 (продължение)

6.35. Да се намери образът на ивицата $\{-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$ чрез функцията $w = \sin z$. Да се докаже, че полученото изображение е еднолистно.

Решение. Имаме $w = \sin z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{iz}}{i} + \dfrac{i}{e^{iz}}\right) = z_4 \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1$, където $z_1 = iz$, $z_2 = e^{z_1}$, $z_3 = \dfrac{z_2}{i}$, $z_4 = \dfrac{1}{2}\left(z_3 + \dfrac{1}{z_3}\right)$. Последователно получаваме (фиг. 6.31):



Фиг. 6.31

Всяка от функциите z_k, $k = 1, 2, 3, 4$, е еднолистна. Следователно такава е и $w = \sin z$. Освен това отсечката $[-\pi/2, \pi/2]$ се изобразява в отсечката $[-1, 1]$, като $w(0) = 0$. Обратната функция $f(w) = z$ е еднолистна в $D = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ и удовлетворява условието $\sin f(w) = w$, т. е. е обратна на $\sin z$. Върху отсечката $[-1,1]$ тя взема същите стойности както известната от реалния анализ функция $\arcsin x$ и значи е продължение на $\arcsin x$ от $[-1,1]$ в D.

6.36. Да се докаже, че функцията $w = \sin z$ е еднолистна в полуивицата $G = \{z : -\pi < \operatorname{Re} z < \pi,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, и да се намери образът $D = \sin(G)$.

Упътване. Следвайте решението на зад. 6.35.

Отг. $D = \mathbb{C} \setminus \{[-1,1] \cup [0, -i\infty)\}$.

6.37. Да се докаже, че функцията $w = \operatorname{tg} z$ изобразява еднолистно ивицата $G = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$ в областта $D = \{\mathbb{C} \setminus [i, +i\infty) \cup [-i, -i\infty)\}$. Използвайте този факт, за да дефинирате в D функцията $\operatorname{arctg} w$, която съвпада върху $\mathbb{R}$ с известната от реалния анализ функция $\operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$.

Упътване. Имаме $\operatorname{tg} z = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$. Приложете последователно трансформациите $z_1 = 2iz$, $z_2 = e^{z_1}$, $z_3 = \dfrac{z_2 - 1}{z_2 + 1}$, $z_4 = -iz_3$.

6.38. Да се намери образът на кръга $\{|z| < 1\}$ чрез дефинираната в зад. 6.37 функция $w = \operatorname{arctg} z$.

Отг. Ивицата $-\pi/4 < \operatorname{Re} w < \pi/4$.

6.39. Да се намери образът на областта $D = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi/2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ чрез функцията $w = \operatorname{tg}^2 \dfrac{z}{2}$. Да се докаже, че изображението е еднолистно.

Решение. Имаме

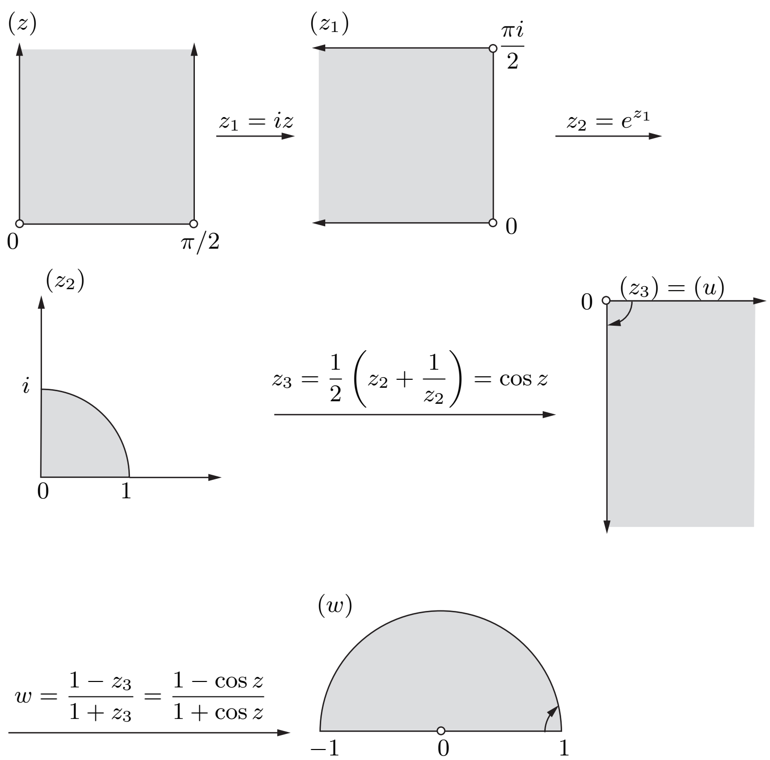
$$w = \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2} = \frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}.$$

Най-напред ще намерим образа на D чрез функцията $u = \cos z = \dfrac{1}{2}\left(e^{iz} + \dfrac{1}{e^{iz}}\right)$. Последователните трансформации са показани на фиг. 6.32.

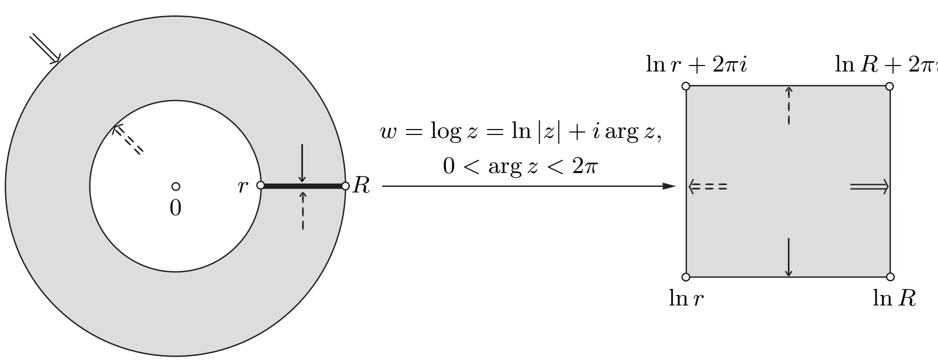
6.40. Да се изобрази в правоъгълник венецът $r < |z| < R$, разрязан по отсечката $[r, R]$.

Решение. Като приложим функцията $\log z$ получаваме резултата, показан на фиг. 6.33.

6.41. Да се изобрази в правоъгълник областта $D = \{|z| > 1,\ |z-1| < 5/2\}$, разрязана по отсечката $[1, 7/2]$.



Фиг. 6.32



Фиг. 6.33

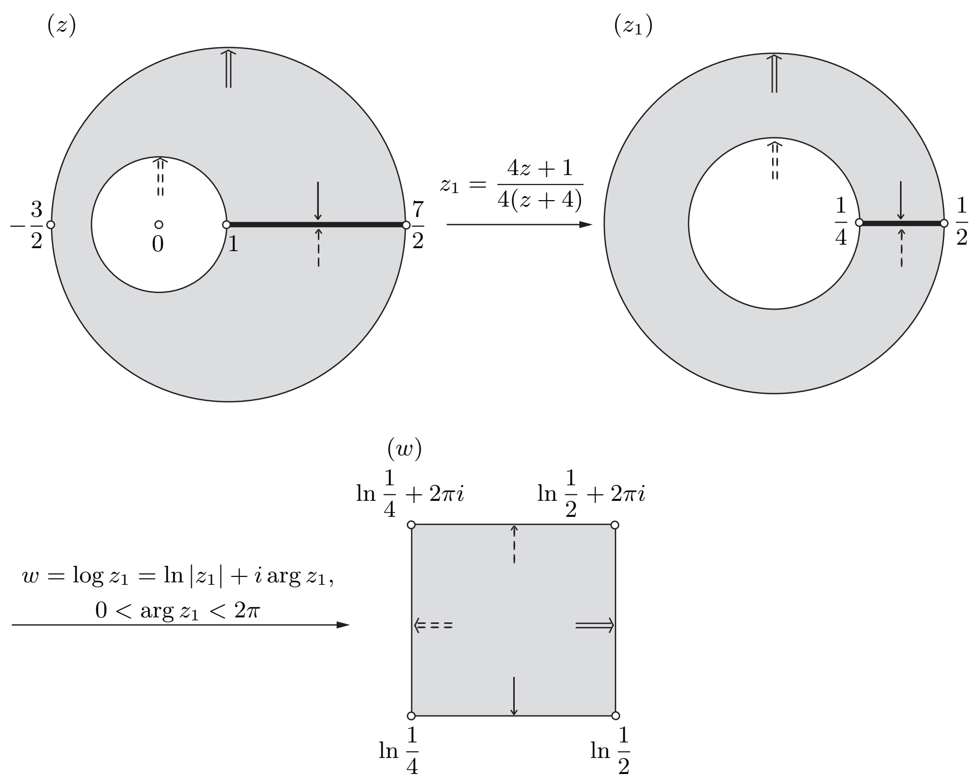
Решение. Най-напред ще изобразим D във венец (вж. зад. 3.34). Двойката точки a и b, инверсни както относно $C(0,1)$, така и относно $C\,(1,5/2)$, са корени на уравнението

$$\frac{1^2}{\overline{z}} = \frac{(5/2)^2}{\overline{z}-1} + 1,$$

т. е. $a = -1/4$, $b = -4$. Тогава функцията

$$z_1 = \frac{z+1/4}{z+4} = \frac{4z+1}{4(z+4)}$$

изобразява D във венец с център 0. Тъй като $z_1(1) = 1/4$, $z_1\,(7/2) = 1/2$, то това е венецът $1/4 < |z_1| < 1/2$, разрязан по отсечката $[1/4, 1/2]$. Получаваме (фиг. 6.34)



Фиг. 6.34

Обратни кръгови функции

6.42. Нека за всяко $k \in \mathbb{Z}$ да дефинираме

$$A_k = \left\{ w \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \operatorname{Re} w < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\},$$
$$B_k = \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} + 2k\pi < \operatorname{Re} w < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\}.$$

Да се докаже, че изображенията $\sin w : A_k \to \mathbb{C}$ и $\sin w : B_k \to \mathbb{C}$ са еднолистни и за образите им имаме $\sin(A_k) = \sin(B_k) = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ за всяко $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. От дефиницията на функцията $\sin w$ имаме

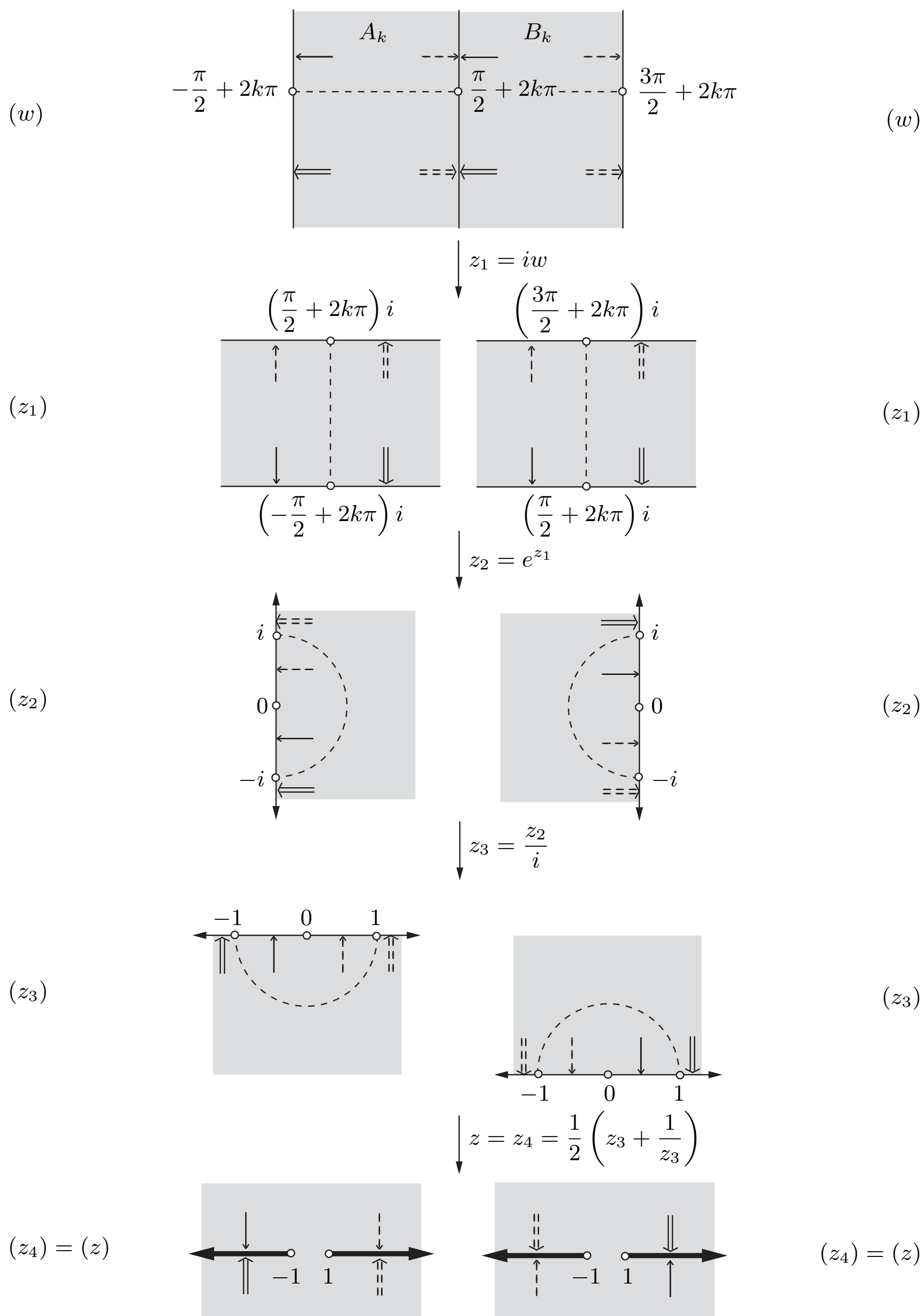
$$\sin w = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{iw}}{i} + \frac{1}{\dfrac{e^{iw}}{i}} \right) = z_4 \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1,$$

където $z_1 = iw$, $z_2 = e^{z_1}$, $z_3 = \dfrac{z_2}{i}$, $z_4 = \dfrac{1}{2}\left(z_3 + \dfrac{1}{z_3}\right)$. На фиг. 6.35 в две успоредни колонки даваме последователните изображения на ивиците A_k и B_k, осъществявани от тези четири функции (сравнете със зад. 6.35).

От фиг. 6.35 се вижда, че образът на всяка от ивиците A_k и B_k е областта $D = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$ със съответствие на границите, както е посочено със стрелките. Всяка от функциите z_k, $k = 1, 2, 3, 4$, е еднолистна в своята дефиниционна област, така че двете изображения $\sin w : A_k \to D$ и $\sin w : B_k \to D$ са еднолистни. Нека $w = f_k(z) : D \to A_k$ и $w = g_k(z) : D \to B_k$ са техните обратни. Всички те удовлетворяват равенствата $\sin f_k(z) = z$, $\sin g_k(z) = z$. Това ни дава основание да дадем следната

Дефиниция. Всяка от функциите $f_k(z)$ и $g_k(z)$, дефинирани в D, се нарича обратна на функцията $\sin w$ и се бележи съответно $f_k(z) = \arcsin_k z$, $g_k(z) = \arcsin_k^* z$. Функцията $f_0(z) = \arcsin_0 z$ изобразява D в ивицата $-\pi/2 < \operatorname{Re} w < \pi/2$, като отсечката $[-1, 1]$ се изобразява в отсечката $[-\pi/2, \pi/2]$ и $\arcsin_0(0) = 0$. Следователно тя съвпада върху $[-1, 1]$ с известната функция от реалния анализ $\arcsin x$. Тази функция се нарича *главна стойност* на $\arcsin z$, $z \in D$.

Ще се заемем с намиране на аналитичен израз за всяка от функциите $f_k(z)$ и $g_k(z)$. Имаме $f_k(z) = z_1^{-1} \circ z_2^{-1} \circ z_3^{-1} \circ z_4^{-1}$. Функцията $z_3 = z_4^{-1}(z)$



(w)
A_k
B_k
$-\frac{\pi}{2}+2k\pi$
$\frac{\pi}{2}+2k\pi$
$\frac{3\pi}{2}+2k\pi$
(w)
$z_1 = iw$
(z_1)
$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i$
$\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)i$
$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i$
$\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i$
(z_1)
$z_2 = e^{z_1}$
(z_2)
i
0
$-i$
i
0
$-i$
(z_2)
$z_3 = \frac{z_2}{i}$
(z_3)
-1 0 1
-1 0 1
(z_3)
$z = z_4 = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right)$
$(z_4) = (z)$
-1 1
-1 1
$(z_4) = (z)$

Фиг. 6.35

е обратната на функцията на Жуковски, която изобразява D в долната полуравнина, т. е. $z_4^{-1}(z) = z - \sqrt{z^2-1}$, където $\sqrt{z^2-1}\big|_{z=0} = i$ (вж. зад. 6.15). Очевидно $z_3^{-1} = iz_3$. Функцията z_2^{-1} е обратната на e^{z_1}, която изобразява дясната полуравнина $-\pi/2 < \arg z_2 < \pi/2$ в ивицата $-\pi/2 + 2k\pi < \operatorname{Im} z_1 < \pi/2 + 2k\pi$, т. е. това е функцията $z_1 = \log_0 z_2 + 2k\pi i$, $\log_0 z_2 = \ln|z_2| + i\arg z_2$, $-\pi < \arg z_2 < \pi$. Накрая $w = z_1^{-1} = z_1/i$. Така получаваме

$$\begin{aligned} f_k(z) &= \frac{1}{i}\left(\log_0 i(z-\sqrt{z^2-1}) + 2k\pi i\right) = \frac{1}{i}\log_0 i(z-\sqrt{z^2-1}) + 2k\pi \\ &= \arcsin_0 z + 2k\pi = \arcsin_k z = \frac{1}{i}\log_k i(z-\sqrt{z^2-1}), \end{aligned}$$

където, както е известно, $\log_k u = \ln|u| + i\arg u$, $-\pi + 2k\pi < \arg u < \pi + 2k\pi$.

За пресмятане на $g_k(z)$ забелязваме, че $z_4^{-1} = z_3$ е обратната на функцията на Жуковски (вж. дясната колона на фиг. 6.35), изобразяваща D в горната полуравнина, т. е. $z_3 = z_4^{-1} = z + \sqrt{z^2-1}$, $\sqrt{z^2-1}\big|_{z=0} = i$. По-нататък, $z_2 = iz_3$, а $z_1 = z_2^{-1}$ е обратната на e^{z_1}, която изобразява лявата полуравнина $\pi/2 < \arg z_2 < 3\pi/2$ в ивицата $\pi/2 + 2k\pi < \operatorname{Im} z_1 < 3\pi/2 + 2k\pi$, т. е. това е функцията $\log_k^* z_2 = \log_0^* z_2 + 2k\pi i$, където $\log_0^* z_2 = \ln|z_2| + i\arg z_2$, $0 < \arg z_2 < 2\pi$. Окончателно получаваме

$$g_k(z) = \arcsin_k^* z = \frac{1}{i}\log_0^* i(z+\sqrt{z^2-1}) + 2k\pi.$$

6.43. Да се намерят производните на функциите $\arcsin_k z$ и $\arcsin_k^* z$, $z \in D$.

Решение. От формулите $\arcsin_k z = \dfrac{1}{i}\log_0 i(z-\sqrt{z^2-1}) + 2k\pi$ намираме

$$(\arcsin_k z)' = \frac{1}{i}\frac{1}{i(z-\sqrt{z^2-1})}i\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right) = \frac{1}{-i\sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

където $\sqrt{1-z^2} = -i\sqrt{z^2-1}$ е онзи корен, който взема положителни стойности върху отсечката $(-1, 1)$.

Аналогично,

$$(\arcsin_k^* z)' = \frac{1}{i\sqrt{z^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

6.44. Да се докаже, че в областта D е в сила равенството $\arcsin_0 z + \arcsin_0^* z = \pi$.

Решение. От зад. 6.43 получаваме, че $\arcsin_0 z + \arcsin_0^* z = c = \mathrm{const}$. При $z = 0$, като се вземе предвид, че $\arcsin_0 0 = 0$, $\arcsin_0^* 0 = \pi$, пресмятаме $c = \pi$.

Забележка. От зад. 6.44 става ясно защо функцията $\arcsin_0 z$ се нарича главна стойност на $\arcsin z$ в D: всяка друга стойност се изразява чрез нея. Така $\arcsin_k z = \arcsin_0 z + 2k\pi$, $\arcsin_k^* z = \arcsin_0^* z + 2k\pi = \pi - \arcsin_0 z + 2k\pi$.

6.45. Да се докаже, че функциите

$$F_k(z) = \begin{cases} \arcsin_k z, & \operatorname{Im} z > 0, \\ \arcsin_k^* z, & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad G_k(z) = \begin{cases} \arcsin_k z, & \operatorname{Im} z < 0, \\ \arcsin_k^* z, & \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$$

могат да се дефинират и върху $(1, +\infty)$, така че да станат холоморфни в $D_1 = C \setminus (-\infty, 1]$ и такива, че $F_k(z)$ изобразява D_1 еднолистно в полуивицата $\{-\pi/2 + 2k\pi < \operatorname{Re} w < 3\pi/2 + 2k\pi, \operatorname{Im} w > 0\}$, а $G_k(z)$ изобразява D_1 еднолистно в полуивицата $\{-\pi/2 + 2k\pi < \operatorname{Re} w < 3\pi/2 + 2k\pi, \operatorname{Im} w < 0\}$.

Решение. От зад. 6.42, фиг. 6.35, е ясно, че за всяко $x > 1$ имаме $\lim\limits_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z > 0}} \arcsin_k z = \lim\limits_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z < 0}} \arcsin_k^* z$ и тази граница принадлежи на лъча $\operatorname{Re} w = \pi/2 + 2k\pi$. Ако положим $F_k(x) = \lim\limits_{\substack{z \to x \\ \operatorname{Im} z > 0}} \arcsin_k z$, ще получим функция, непрекъсната върху $(1, +\infty)$ и холоморфна в горната и долната полуравнина. Съгласно теоремата на Морера (вж. зад. 7.26) $F_k(z)$ е холоморфна в D_1. Освен това е ясно, че ако $x_1, x_2 > 1$, $x_1 \neq x_2$, то $F_k(x_1) \neq F_k(x_2)$, така че F_k е еднолистна в D_1. Твърдението, че $F_k(D_1) = \{-\pi/2 + 2k\pi < \operatorname{Re} w < 3\pi/2 + 2k\pi, \operatorname{Im} w > 0\}$ следва непосредствено от зад. 6.42, фиг. 6.35.

Разсъжденията за $G_k(z)$ са съвсем аналогични.

Забележка. Функцията $F_k(z)$ се нарича *аналитично продължение* на $\arcsin_k z$ от горната полуравнина през лъча $(1, \infty)$ в долната полуравнина и резултатът от това продължение е $\arcsin_k^* z$. Аналогично, $\arcsin_k^* z$ се продължава през $(1, \infty)$ от долната в горната полуравнина и резултатът е $\arcsin_k z$. С аналогични разсъждения лесно се проверява, че всяка от функциите $\arcsin_k z$ се продължава както през $(-\infty, -1)$, така и през $(1, \infty)$, и продължението е „съседна“ функция $\arcsin_k^* z$. Така например продължението на $\arcsin_k^* z$ от горната полуравнина в долната през $(-\infty,-1)$ е функцията $\arcsin_{k+1} z$. (Проверете!) В този случай обикновено казваме, че всеки клон на многозначната функция $\arcsin z$ е *неограничено продължим* през всяко от множествата $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$ и резултатът е също клон на $\arcsin z$.

6.46. Да се докаже, че всеки еднозначен клон на $\arcsin z$ в D може неограничено да се продължи през всяко от множествата $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$ както „отгоре надолу“, така и „отдолу нагоре“, и резултатът е отново еднозначен клон на $\arcsin z$.

Упътване. Разсъждавайте както в зад. 6.45, за да обосновете твърденията от предишната забележка.

6.47. Нека са дадени ивиците $A_k = \{w : 2k\pi < \operatorname{Re} w < (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ и $B_k = \{w : (2k+1)\pi < \operatorname{Re} w < (2k+2)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Да се докаже, че:

а) всяко от изображенията $\cos w : A_k \to \mathbb{C}$ и $\cos w : B_k \to \mathbb{C}$ е еднолистно и $\cos(A_k) = \cos(B_k) = D = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\}$;

б) в D има безбройно много обратни функции $\arccos_k z : D \to A_k$ и $\arccos_k^* z : D \to B_k$ и те се дават с формулите

$$\arccos_k z = \frac{1}{i}\log_0^*(z+\sqrt{z^2-1})+2k\pi,\ \arccos_k^* z = \frac{1}{i}\log_0^*(z-\sqrt{z^2-1})+2k\pi,$$

където $\sqrt{z^2-1}$ е онзи клон, който при $z=0$ взема стойност i, а $\log^* u = \ln|u| + i\arg u$, $0 < \arg u < 2\pi$;

в) $(\arccos_k z)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, $(\arccos_k^* z)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, където $\sqrt{1-z^2} > 0$ за $z \in (-1,1)$;

г) $\arccos_k z + \arccos_k^* z = 2\pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$;

д) всяка от тези обратни функции е неограничено продължима през всеки от разрезите $(-\infty,-1)$ и $(1,\infty)$ и продължението е отново обратна функция на $\cos w$;

е) функцията $\arccos_0 z$ съвпада върху $[-1,1]$ с известната от реалния анализ функция $\arccos x$ и се нарича *главен клон* на $\arccos z$. Всеки друг клон може да се изрази чрез главния (вж. г)).

Упътване. Използвайте, че $\cos w = z_3 \circ z_2 \circ z_1$, където $z_1 = iw$, $z_2 = e^{z_1}$, $z_3 = \dfrac{1}{2}\left(z_2 + \dfrac{1}{z_2}\right) = z$.

6.48. Нека $A_k = \{w : -\pi/2 + k\pi < \operatorname{Re} w < \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Да се докаже, че:

а) изображението $\operatorname{tg} w : A_k \to \mathbb{C}$ е еднолистно и $\operatorname{tg}(A_k) = D = \mathbb{C} \setminus \{[i, +i\infty) \cup [-i, -i\infty)\}$ за всяко $k \in \mathbb{Z}$;

б) в D има безбройно много обратни функции $\operatorname{arctg}_k z : D \to A_k$ и те се дават с формулата

$$\operatorname{arctg}_k z = \frac{1}{2i} \log_0 \frac{1 + iz}{1 - iz} + k\pi = \frac{1}{2i} \log_0 \frac{i - z}{i + z} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

където $\log_0 u = \ln |u| + i \arg u$, $-\pi < \arg u < \pi$;

в) функцията $\operatorname{arctg}_0 z = \dfrac{1}{2i} \log_0 \dfrac{i - z}{i + z}$ съвпада върху $\mathbb{R}$ с известната от реалния анализ функция $\operatorname{arctg} x$.

Решение. Имаме

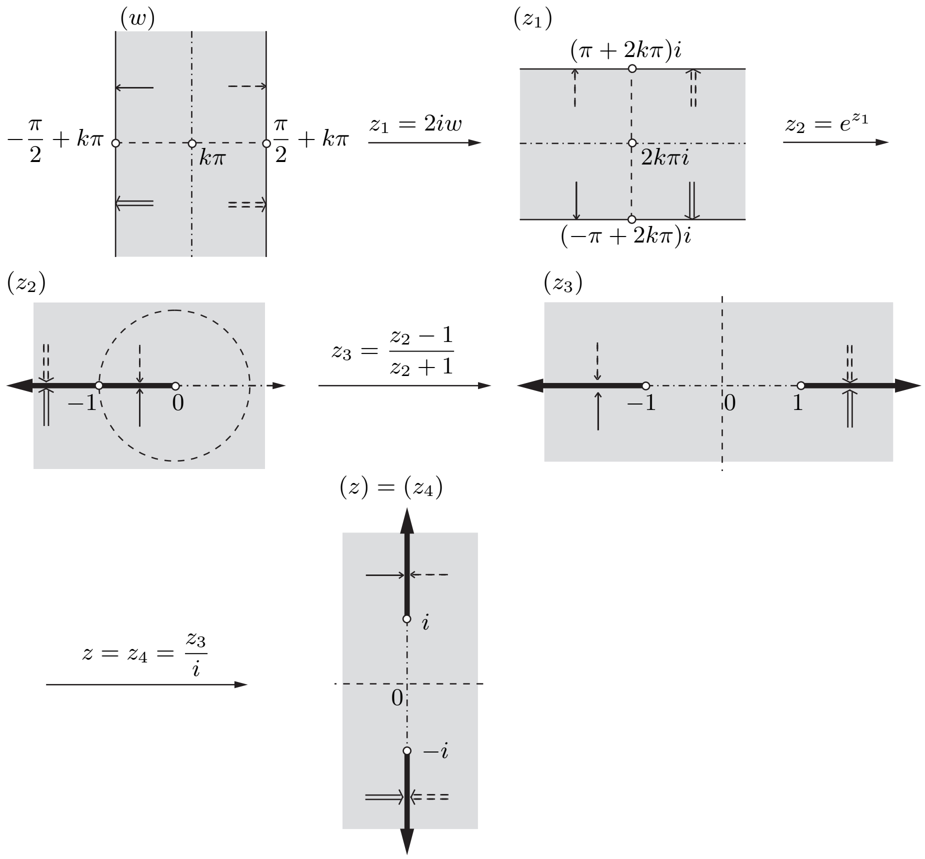
$$\operatorname{tg} w = \frac{1}{i} \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} = z_4 \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1,$$

където $z_1 = 2iw$, $z_2 = e^{z_1}$, $z_3 = \dfrac{z_2 - 1}{z_2 + 1}$, $z_4 = \dfrac{z_3}{i}$. Прилагането на тази формула води до резултата, графично изобразен на фиг. 6.36.

Преобразованието очевидно е еднолистно. Да означим с $\operatorname{arctg}_k z : D \to A_k$ обратното изображение. Имаме $\operatorname{tg} \operatorname{arctg}_k z = z$, така че това означение е оправдано. По-нататък за последователните обратни изображения имаме $z_3 = iz$, $z_2 = \dfrac{1 + z_3}{1 - z_3}$, $z_1 = \log z_2 = \ln |z_2| + i \arg z_2$, където $-\pi + 2k\pi < \arg z_2 < \pi + 2k\pi$. Следователно $z_1 = \log_0 z_2 + 2k\pi i = \log_k z_2$. Тъй като $w = \dfrac{z_1}{2i}$, окончателно получаваме

$$\operatorname{arctg}_k z = \frac{1}{2i} \log_0 \frac{1 + iz}{1 - iz} + k\pi = \frac{1}{2i} \log_0 \frac{i - z}{i + z} + k\pi.$$

С това а) и б) са доказани. Остава да проверим в). От фиг. 6.36 се вижда, че при $k = 0$ отсечката $(-\pi/2, \pi/2)$ се изобразява в реалната права. Следователно $\operatorname{arctg}_0 z$ удовлетворява тъждеството $\operatorname{tg} \operatorname{arctg}_0 z = z$ и $\operatorname{arctg}_0 z \in (-\pi/2, \pi/2)$ за $z \in \mathbb{R}$, т. е. върху $\mathbb{R}$ тя съвпада с известната от реалния анализ функция.



Фиг. 6.36

6.49. Да се докаже, че:

а) за всяко $y_0 \in \mathbb{R}$, $|y_0| > 1$, имаме

$$\lim_{\substack{z\to iy_0\\ \operatorname{Re} z>0}} \operatorname{arctg}_k z - \lim_{\substack{z\to iy_0\\ \operatorname{Re} z<0}} \operatorname{arctg}_k z = \pi;$$

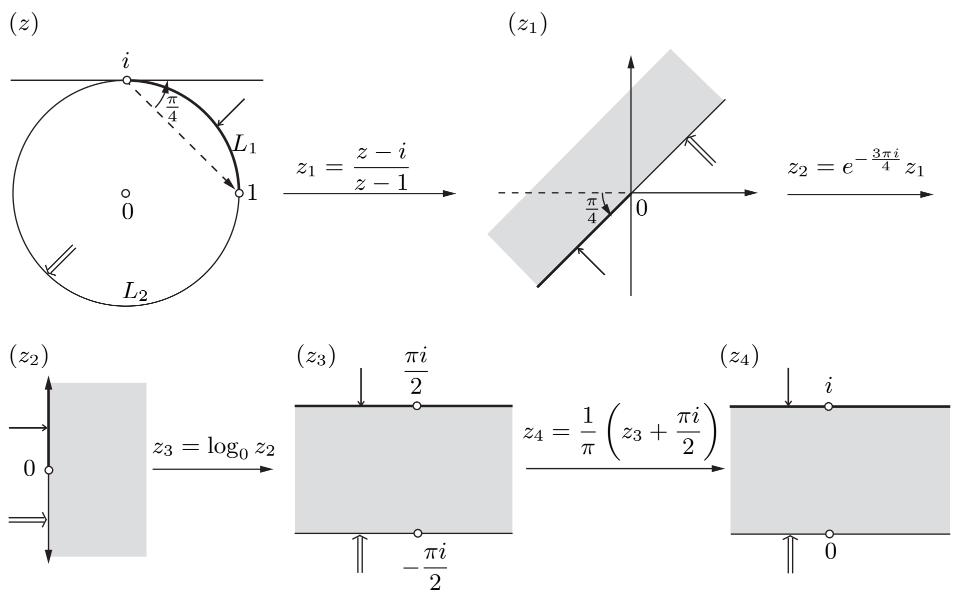
б) съществува еднолистна в $\mathbb{C}\setminus[-i,i]$ функция $f(z)$, която изобразява $\mathbb{C}\setminus[-i,i]$ в $\{k\pi < \operatorname{Re} w < (k+1)\pi\}$ и такава, че $f\big|_{\operatorname{Re} z>0} = \operatorname{arctg}_k z$, $f\big|_{\operatorname{Re} z<0} = \operatorname{arctg}_{k+1} z$.

Упътване. а) Използвайте формулата за $\operatorname{arctg}_k z$, получена в зад. 6.48, за пресмятане на двете граници.

б) Използвайте а) и връзката $\operatorname{arctg}_{k+1} z = \operatorname{arctg}_k z + \pi$.

6.50. Да се намери хармонична в $K(0,1)$ функция $u(z)$, която да бъде непрекъсната в $\overline{K(0,1)} \setminus \{1, i\}$ и такава, че $u\big|_{L_1} = 1$, $u\big|_{L_2} = 0$, където $L_1 = \{z : z = e^{i\varphi},\ \varphi \in (0, \pi/2)\}$ и $L_2 = C(0,1) \setminus L_1$.

Решение. Ако $f(z)$ е холоморфна в $K(0,1)$ функция, която изобразява $K(0,1)$ в ивицата $0 < \operatorname{Im} w < 1$, така че L_2 се изобразява в реалната права, а L_1 — в правата $\operatorname{Im} w = 1$, то хармоничната функция $u(z) = \operatorname{Im} f(z)$ ще бъде решение на задачата. Намирането на f е показано на



Фиг. 6.37

фиг. 6.37 (L_1 е начертана с удебелена линия). Търсената функция е

$$f(z) = z_4 \circ z_3 \circ z_2 \circ z_1 = \frac{i}{2} + \frac{1}{\pi} \log_0 e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{z-i}{z-1}.$$

Тъй като $z_2 = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \dfrac{z-i}{z-1}$ лежи в дясната полуравнина, то $\arg z_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{Im} z_2}{\operatorname{Re} z_2}$. Тогава

$$u(z) = \operatorname{Im} f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arg e^{-i\frac{3\pi}{4}} \frac{z-i}{z-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1}{x^2 + y^2 - 1}.$$

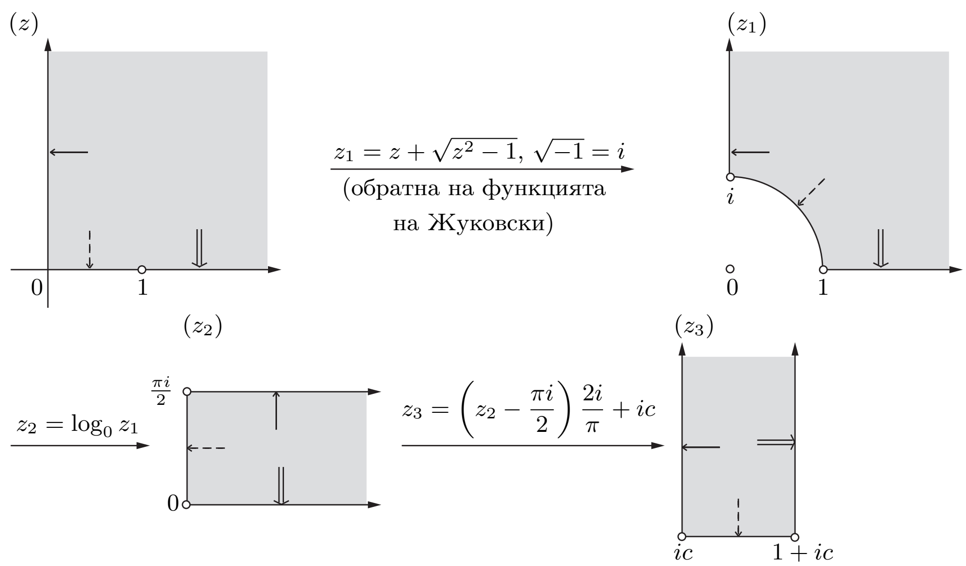
6.51. Да се намери функция $u(x,y)$, хармонична в полуивицата $D = \{-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, непрекъсната в $\overline{D} \setminus \{\pm\pi/2\}$ и такава, че $u\,(-\pi/2, y) = u\,(\pi/2, y) = 0$ за $y > 0$ и $u(x,0) = 1$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Упътване. Изобразете D в ивицата $0 < \operatorname{Im} w < 1$, така че $[-\pi/2, \pi/2] \to \{\operatorname{Im} w = 1\}$, а $\{z = -\pi/2 + iy,\ y > 0\} \cup \{z = \pi/2 + iy,\ y > 0\} \to \{\operatorname{Im} w = 0\}$. Ако $f(z)$ е полученото изображение, то $u(z) = \operatorname{Im} f(z)$.

Отг. $f(z) = \dfrac{2}{\pi} \log \dfrac{i - e^{iz}}{i + e^{iz}}$, $\log \zeta = \ln|\zeta| + i \arg \zeta$, $0 \le \arg \zeta \le \dfrac{\pi}{2}$, $u(z) = u(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sh} y}$.

6.52. Да се намери хармонична в $D = \{\operatorname{Im} z > 0,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ функция $u(z)$, непрекъсната в $\overline{D} \backslash \{0, 1\}$ и такава, че $u(0, y) = 0$ за $y > 0$, $u(x, 0) = 1$ за $x > 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$ за $x \in (0, 1)$.

Решение. Нека v е спрегнатата на u функция. От уравненията на Коши — Риман имаме $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ върху $(0, 1)$ и тогава $v(x, 0) = \text{const}$ за $x \in (0, 1)$. Следователно $u(z)$ е реална част на холоморфна в D функция, която изобразява D в полуивица $\{0 < \operatorname{Re} w < 1,\ \operatorname{Im} w > \text{const}\}$, така че лъчът $[0, +i\infty)$ се изобразява в лъча $\{\operatorname{Re} w = 0,\ \operatorname{Im} w > \text{const}\}$, лъчът $\operatorname{Re} z > 1$ — в лъча $\{\operatorname{Re} w = 1,\ \operatorname{Im} w > \text{const}\}$, а отсечката $(0, 1)$ — в отсечката $\{0 < \operatorname{Re} w < 1,\ \operatorname{Im} w = \text{const}\}$. За изобразяващата функция получаваме (фиг. 6.38)



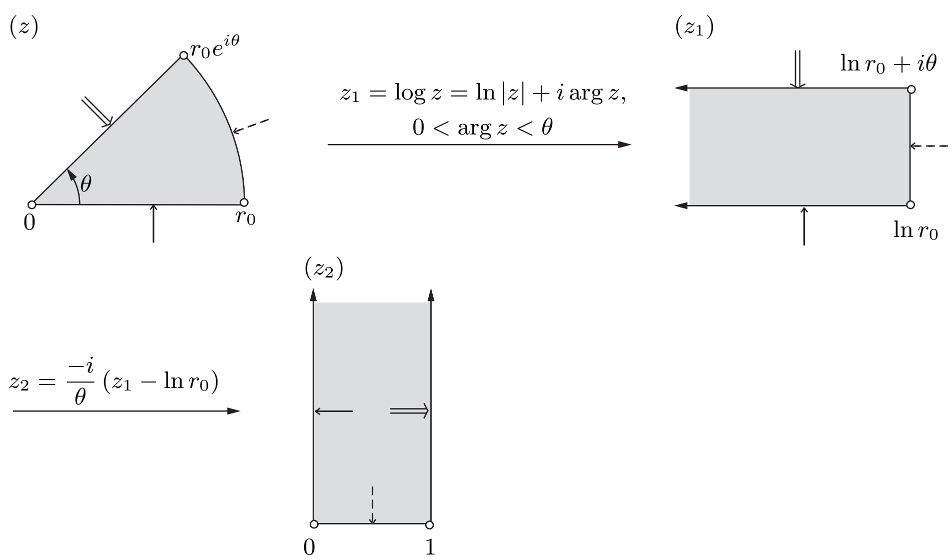
Фиг. 6.38

Следователно

$$f(z) = 1 + \frac{2i}{\pi}\log_0(z + \sqrt{z^2-1}) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos_0 z = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos_0 z\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\arcsin_0 z,$$
$$u(z) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\arcsin_0 z.$$

6.53. Да се намери хармонична в сектора $D = \{0 < \arg z < \theta, 0 < r < r_0\}$ функция $u(x,y) = u(r,\varphi)$, която да бъде непрекъсната в $\overline{D} \setminus \{0, r_0, r_0e^{i\theta}\}$ и такава, че $u\big|_{(0,r_0)} = 0$, $u\big|_{(0,r_0e^{i\theta})} = 1$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{|z|=r_0} = 0$.

Решение. Лесно се проверява, че в полярни координати (r,φ) уравнението $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ на Коши — Риман има вида $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}$. Оттук и от $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{|z|=r_0} = 0$ получаваме $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}\right|_{|z|=r_0} = 0$ и тогава върху дъгата $z = r_0e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \theta$, имаме $v = v(r_0,\varphi) = c = \text{const}$. Следователно, ако $f(z)$ е холоморфна функция, която изобразява D в ивицата $\{0 < \operatorname{Re} w < 1, \operatorname{Im} w > c\}$ и такава, че $f((0,r_0)) = \{\operatorname{Re} w = 0, \operatorname{Im} w > c\}$, $f((0,r_0e^{i\theta})) = \{\operatorname{Re} w = 1, \operatorname{Im} w > c\}$, $f(\{|z| = r_0, \arg z \in (0,\theta)\}) = \{0 < \operatorname{Re} w < 1, \operatorname{Im} w = c\}$, то $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ ще бъде решение на поставената задача.



Фиг. 6.39

Така получаваме (фиг. 6.39):

$$f(z) = \frac{1}{i\theta}\log z + \frac{i}{\theta}\ln r_0 + ic, \quad c \in \mathbb{R} \text{ е произволна константа,}$$
$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{\theta}\arg z.$$

§ 7. Интегриране в комплексната област. Теорема на Лайбниц — Нютон. Теорема и формула на Коши. Теорема на Морера

Крива γ в $\mathbb{C}$ се нарича всяко непрекъснато изображение $z = z(t)$ на интервал $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$. Функцията $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, пренася естествената наредба в $[a, b]$ върху γ и когато t описва интервала $[a, b]$, точката $z = z(t)$ описва γ от точката $z(a)$, наричана *начало* на γ, до точката $z(b)$, наричана *край* на γ. Кривата се нарича:

- *затворена*, ако $z(a) = z(b)$;
- *жорданова*, ако $z(t_1) \neq z(t_2)$ за $t_1 \neq t_2 \in [a, b]$ с евентуално изключение $z(a) = z(b)$;
- *гладка*, ако съществува $z'(t)$, която е непрекъсната и различна от нула в $[a, b]$;
- *частично гладка*, ако има такова разделяне на интервала $[a, b]$ на краен брой затворени подинтервали, че във всеки от тях γ е гладка крива;
- *ректифицируема*, ако има крайна дължина $l(\gamma)$. Всяка частично гладка крива е ректифицируема.

Нека $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, е ректифицируема крива и $f(z) = f(z(t))$, $t \in [a, b]$, е функция, дефинирана върху γ. Да разгледаме сумите от вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$, където $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $z_k = z(t_k)$ и $\zeta_k = z(\tau_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ако тези суми имат крайна граница, когато $\max\limits_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}| \to 0$, казваме, че f е *интегруема* върху γ. Границата наричаме *линеен интеграл* от f по γ и бележим с $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$ или за краткост $\displaystyle\int_\gamma f$. Той запазва повечето от свойствата на реалните интеграли и не зависи от параметризацията на кривата в следния смисъл: ако $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, $t = \varphi(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, е монотонно растяща и непрекъсната функция, такава че $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $\gamma_1 : z = z(\varphi(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, то $\displaystyle\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f$. Ако γ^- е кривата с противоположна на γ ориентировка, то $\displaystyle\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$; ако f е непрекъсната върху γ, то $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\, dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\, |dz|$, където $|dz| := ds$ е елементът на дължината на γ; в частност, ако $|f(z)| \leq M$, $z \in \gamma$, то $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\, dz\right| \leq M l(\gamma)$. Ако γ е частично гладка, линейният интеграл се редуцира до интеграл върху интервала $[a, b]$,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt,$$

и е свързан с реалните криволинейни интеграли от II род с равенството

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy,$$

където $f = u + iv$ и $z = x + iy$.

Теорема 1 (Лайбниц — Нютон). Ако f е дефинирана в област $D \subset \mathbb{C}$ и има примитивна F в D (т. е. F е холоморфна в D и $F' = f$ в D), то за всяка крива $\gamma \subset D$ с начало z_1 и край z_2

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1).$$

В частност, ако γ е затворена, то $\displaystyle\int_\gamma f = 0$. Обратно, ако $\displaystyle\int_\gamma f = 0$ за всяка затворена крива $\gamma \subset D$, то f има примитивна в D.

Теорема 2 (Коши). Ако D е едносвързана област, f е холоморфна в D и $\gamma \subset D$ е затворена крива, то $\displaystyle\int_\gamma f = 0$.

Така всяка холоморфна в едносвързана област функция има примитивна.

Теорема 3 (Коши, за сложен контур). Ако D е ограничена крайно-свързана област с ректифицируема граница ∂D и f е холоморфна в околност на $\overline{D}$, то $\displaystyle\int_{\partial D} f = 0$.

Тук с ∂D е означен контурът на областта D, т. е. топологичната граница на D, ориентирана така, че при движение по нея областта остава отляво.

При същите условия за D и f е в сила следната **формула на Коши**

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz, \quad z_0 \in D.$$

Всяка холоморфна функция е безкрайно диференцируема, т. е. ако f е холоморфна, то и f', f'', ..., са холоморфни и

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz, \quad z_0 \in D,\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4 (Морера). Ако f е непрекъсната в областта D и $\displaystyle\int_\gamma f = 0$ за всяка затворена крива $\gamma \subset D$ (достатъчно е за всеки правоъгълен контур γ със страни, успоредни на координатните оси), то f е холоморфна в D.

Накрая ще отбележим, че теоремата и формулата на Коши за сложен контур остават в сила и при по-слаби предположения за f, а именно: достатъчно е f да бъде холоморфна в D и непрекъсната в $\overline{D}$.

Във всички задачи по-долу, ако γ е затворена жорданова крива, то тя е ориентирана в посока, противоположна на движението на часовниковата стрелка, освен ако не е казано друго.

7.1. Да се пресметне $\displaystyle\int_\gamma (y - x - 3x^2 i)\, dz$, където γ е:

а) отсечката $[0, 1+i]$;

б) начупената линия $[0,i] \cup [i, 1+i]$.

Решение. а) Параметричното представяне на отсечката $[0,1+i]$ е $x = t$, $y = t$ или $z = (1+i)t$, $t \in [0,1]$. Тогава

$$\int_\gamma (y - x - 3x^2 i)\, dz = \int_0^1 (-3t^2 i)(1+i)\, dt = (1-i)\int_0^1 3t^2\, dt = 1 - i.$$

б) Параметричното представяне на $[0,i]$ е $x = 0$, $y = t$ или $z = it$, $t \in [0,1]$, а на $[i, 1+i]$ е $x = t$, $y = 1$ или $z = t + i$, $t \in [0,1]$. Тогава $\displaystyle\int_\gamma = \int_{[0,i]} + \int_{[i,1+i]}$ и

$$\int_\gamma (y - x - 3x^2 i)\, dz = \int_0^1 it\, dt + \int_0^1 (1 - t - 3t^2 i)\, dt = \frac{i}{2} + 1 - \frac{1}{2} - i = \frac{1}{2}(1-i).$$

7.2. Да се пресметне $\displaystyle\int_\gamma |z|\, dz$, където γ е:

а) отсечката $[-i, i]$;

б) лявата половина на окръжността $C(0,1)$ с начало $-i$ и край i;

в) дясната половина на $C(0,1)$ с начало $-i$ и край i.

Решение. а) *Отг.* i. б) Имаме $z = \gamma^-(t) = e^{it}$, $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Тогава

$$\int_\gamma |z|\, dz = -\int_{\gamma^-} |z|\, dz = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} ie^{it}\, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{it}\, dit = -\left(e^{i\frac{3\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$= 2i.$$

в) *Отг.* $2i$.

7.3. Да се пресметне $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\, dz$, където γ е:

а) горната половина на $C(0,1)$ с начало 1 и край -1;

б) долната половина на $C(0,1)$ с начало -1 и край 1.

Решение. а) $z = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ и $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\, dz = \int_0^\pi e^{-it} i e^{it}\, dt = \pi i$.

б) *Отг.* πi.

7.4. Да се пресметне $\displaystyle\int_\gamma |z|\overline{z}\, dz$, където γ е контурът на областта $\{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

Решение. Имаме $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, където $\gamma_1 : z = t$, $t \in [-1, 1]$, а $\gamma_2 : z = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Тогава

$$\int_\gamma |z|\overline{z}\, dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_{-1}^1 |t| t\, dt + \int_0^\pi e^{-it} i e^{it}\, dt = \int_0^\pi i\, dt = \pi i,$$

тъй като $\displaystyle\int_{-1}^1 t|t|\, dt = 0$ ($t|t|$ е нечетна функция).

7.5. Да се пресметне $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{\overline{z}} dz$, където γ е контурът на областта $\{1 < |z| < 2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

Решение. Имаме $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^- \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, където $\gamma_1 : z = t$, $t \in [-2, -1]$, $\gamma_2 : z = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $\gamma_3 : z = t$, $t \in [1, 2]$, $\gamma_4 : z = 2e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Тъй като $z = \overline{z}$ върху $\mathbb{R}$, то $\displaystyle\int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2} = 1$, $\displaystyle\int_{\gamma_2^-} \frac{z}{\overline{z}}\, dz = -\int_0^\pi \frac{e^{it}}{e^{-it}} i e^{it}\, dt = -i\int_0^\pi e^{i3t}\, dt = \frac{2}{3}$; $\displaystyle\int_{\gamma_4} \frac{z}{\overline{z}}\, dz = \int_0^\pi \frac{e^{it}}{e^{-it}} 2ie^{it}\, dt = 2i\int_0^\pi e^{3it}\, dt = -\frac{4}{3}$. Следователно $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{\overline{z}}\, dz = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2^-} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = \frac{4}{3}$.

7.6. Да се пресметне $\displaystyle\int_\gamma (z - a)^n\, dz$, $n \in \mathbb{Z}$, където γ е:

а) полуокръжността $\{z : z = a + Re^{it},\ t \in [0, \pi]\}$;

б) окръжността $\{z : z = a + Re^{it},\ t \in [0, 2\pi]\}$.

Решение. а) *Отг.* $\begin{cases} \pi i & \text{при } n = -1, \\ \dfrac{R^{n+1}}{n+1}\big((-1)^{n+1} - 1\big) & \text{при } n \neq -1. \end{cases}$

б) $\displaystyle\int_\gamma (z - a)^n\, dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} iRe^{it}\, dt = iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt$
$= \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$

7.7. Нека γ е затворена жорданова крива и S е лицето на областта, заградена от γ. Да се докаже, че

$$\int_\gamma x\,dz = -i\int_\gamma y\,dz = \frac{1}{2}\int_\gamma \overline{z}\,dz = iS.$$

Решение. От реалния анализ е известно, че $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\gamma xdy - ydx$. Тъй като z има примитивна в $\mathbb{C}$, то от теоремата на Лайбниц — Нютон следва, че $\displaystyle\int_\gamma z\,dz = 0 \iff \int_\gamma x\,dz = -i\int_\gamma y\,dz$. Освен това $\displaystyle\int_\gamma x\,dx + y\,dy = 0$, тъй като $x\,dx + y\,dy = \dfrac{1}{2}d(x^2+y^2)$ е точен диференциал. Тогава

$$\frac{1}{2}\int_\gamma \overline{z}\,dz = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,dx + y\,dy + \frac{1}{2}i\int_\gamma x\,dy - y\,dx = iS$$

и

$$\int_\gamma x\,dz = \frac{1}{2}\int_\gamma (z+\overline{z})\,dz = \frac{1}{2}\int_\gamma \overline{z}\,dz = iS.$$

* * *

7.8. Нека $\gamma : u = u(t)$, $t \in [0,1]$, е гладка крива, $z = z(u)$ е холоморфна в околност на γ функция и $\Gamma = z(\gamma) : z = z(u(t))$, $t \in [0,1]$, е образът на γ чрез функцията $z(u)$. Нека $f(z)$ е непрекъсната върху Γ. Да се докаже, че

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z(u))z'(u)\,du \quad \text{(формула за смяна на променливата).}$$

Решение. Съгласно формулата за пресмятане на интеграл по гладка крива

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\,dz &= \int_0^1 f(z(u(t)))[z(u(t))]'\,dt = \int_0^1 f(z(u(t)))z'(u(t))u'(t)\,dt \\ &= \int_\gamma f(z(u))z'(u)\,du.\end{aligned}$$

7.9. Нека γ е произволна ректифицируема крива, $\overline{\gamma}$ е нейният образ при изображението $z \to \overline{z}$ и $f(z)$ е функция, непрекъсната върху γ. Да се докаже, че

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\,dz.$$

Решение. Нека $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$ е редица от интегрални суми на Риман, клоняща към $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$. Тогава

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \overline{f(\zeta_k)}(\overline{z_k} - \overline{z_{k-1}}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \overline{f(\overline{\eta_k})}(t_k - t_{k-1}),$$

където $\overline{\eta}_k = \zeta_k$, $t_k = \overline{z}_k$. Последната сума обаче е интегрална сума на Риман за функцията $\overline{f(\overline{t})}$ върху $\overline{\gamma}$ и следователно клони към $\displaystyle\int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{t})}\,dt$.

7.10. Нека $f(z)$ е непрекъсната върху единичната окръжност γ : $|z| = 1$. Да се докаже, че

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = -\int_\gamma \overline{f(z)}\,\frac{dz}{z^2}.$$

Решение. Съгласно зад. 7.9

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\,dz.$$

Ако в последния интеграл направим смяната $z = \overline{u} = \dfrac{1}{u}$, то $\overline{\gamma} \to \gamma$ и $dz = -\dfrac{du}{u^2}$. Съгласно зад. 7.8 получаваме

$$\int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\,dz = -\int_\gamma \overline{f(u)}\frac{du}{u^2}.$$

7.11. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е произволна област (не непременно едносвързана), c е произволно комплексно число и $f(z)$ е холоморфна в D функция. Нека $\gamma : z = z(t)$, $t \in [0,1]$, е произволна крива в D. Да се докаже, че съществува непрекъсната в $[0,1]$ функция $\Phi(t)$, която притежава следните свойства:

а) $\Phi(0) = c$ (начално условие за $\Phi(t)$);

б) за всяко $t \in [0,1]$ съществуват отворен в $[0,1]$ подинтервал Δ_t на t, кръг $K(z(t), \delta_t)$, съдържащ дъгата $\{z(\tau),\ \tau \in \Delta_t\}$, и примитивна $\Phi_t(z)$ на $f(z)$ в $K(z(t), \delta_t)$, такава че $\Phi_t(z(\tau)) = \Phi(\tau)$ за всяко $\tau \in \Delta_t$;

в) $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi_1(z(1)) - \Phi_0(z(0)) = \Phi_1(b) - \Phi_0(a)$, $a = z(0)$, $b = z(1)$.

Забележка. Функцията $\Phi(t)$ се нарича *примитивна* на $f(z)$ върху кривата γ, която удовлетворява началното условие а).

Решение. Нека $\delta > 0$ е разстоянието от γ до ∂D. Върху $[0,1]$ вземаме точки $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ толкова близо една до друга, че дъгата $z(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$ да се съдържа в кръга $K(z(t_k), \delta/2) = K(z_k, \delta/2)$. Кръгът $K(a, \delta/2)$ е едносвързана област и съгласно теоремата на Лайбниц — Нютон в него има безбройно много примитивни на $f(z)$, зависещи от произволна адитивна константа. Тази константа избираме така, че съответната примитивна $F_0(z)$ да удовлетворява началното условие $F_0(a) = F_0(z(0)) = c$. Аналогично, в $K(z_1, \delta/2)$ можем да изберем примитивна $F_1(z)$ така, че $F_0(z_1) = F_1(z_1)$. Продължавайки така, във всеки кръг $K(z_k, \delta/2)$ можем да намерим примитивна, за която $F_{k-1}(z_k) = F_k(z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. От това равенство е ясно, че ако за $\tau \in [t_{k-1}, t_k]$ положим $\Phi(\tau) = F_{k-1}(z(\tau)) = F_k(z(\tau))$, ще получим непрекъсната в $[0,1]$ функция.

Нека сега за $t \in (t_{k-1}, t_k)$ положим $\Phi_t(z) = F_{k-1}(z)$. Ясно е, че $\Phi_t(z)$ е примитивна на $f(z)$ в $K(z_{k-1}, \delta/2)$ и че $\Phi_t(z(\tau)) = F_{k-1}(z(\tau)) = \Phi(\tau)$ за $\tau \in [t_{k-1}, t_k]$.

Тъй като за всяко $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ множеството $D_k = K(z_k, \delta/2) \cap K(z_{k+1}, \delta/2)$ е отворено и непразно, то съществува околност Δ_{t_k} на t_k, такава че $z(\Delta_{t_k}) \subset D_k$. Тогава полагаме $\Phi_{t_k}(z) = F_k(z) = F_{k+1}(z)$, $z \in D_k$. С това а) и б) са доказани.

в) По теоремата на Лайбниц — Нютон

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z)\,dz = F_{k-1}(z_k) - F_{k-1}(z_{k-1}).$$

Тогава

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} (F_{k-1}(z_k) - F_{k-1}(z_{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (F_{k-1}(z_k) - F_k(z_k)) + F_{n-1}(z_n) - F_0(z_0) \\
&= F_{n-1}(z(1)) - F_0(z(0)) = \Phi_1(b) - \Phi_0(a) = \Phi(1) - \Phi(0).
\end{aligned}$$

Важна забележка. Процедурата, по която от функцията $F_0(z)$, дефинирана в околност на началото $a = z(0)$ на кривата γ, получихме функцията $F_n(z)$, дефинирана в края b на γ, се нарича *аналитично продължение* на F_0 от a в b по кривата γ, като е използвана веригата от пресичащи се кръгове $K(z_k, \delta/2)$. Обикновено, когато се пресмята интеграл от многозначна функция, се задава само стойността ѝ в началото a. Това предполага, че е извършено следното: в околност на a се дефинира еднозначен клон на многозначната функция, който в a взема дадената стойност. Този клон се продължава по кривата до края ѝ b. Рестрикцията на това продължение върху γ е еднозначна непрекъсната функция на параметъра t. Именно тази рестрикция се интегрира по кривата. Например ако трябва да интегрираме функцията $\log z$, която при $z = 1$ има стойност 0, по единичната окръжност без частта ѝ, лежаща в четвърти квадрант, като считаме $z = 1$ за начало, а $z = -i$ — за край, постъпваме така: в околност на $z = 1$ избираме $\log z = \log_0 z$, тъй като именно $\log_0 1 = 0$. Продължението на $\log_0 z$ по горната полуокръжност до -1 е $\log_0 z$, като в -1 аргументът на z става π. Аналитичното продължение на $\log_0 z$ по частта от кривата в трети квадрант от -1 до $-i$ е функцията $\log z = \ln|z| + i\arg z$, $\pi \le \arg z \le 3\pi/2$. Следователно върху кривата от 1 до $-i$ продължението ще бъде $\log z = \ln|z| + i\arg z$, $0 \le \arg z \le 3\pi/2$, и под $\displaystyle\int_\gamma \log z\,dz$ се има предвид именно интегралът от тази функция.

След тази забележка е почти ясно, че пресмятането на интеграли от многозначни функции става по правилото, изложено в зад. 7.11. Именно, нека многозначната функция $f(z)$ е зададена в началото a чрез своя стойност. Нека клонът, който в a има тази стойност, е $f_0(z)$. Продължаваме f_0 по кривата и под $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ разбираме именно интеграла от това продължение. В околност на a $f_0(z)$ има примитивна $F_0(z)$. Нея продължаваме до b по кривата до $F_n(z)$. Тогава $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = F_n(b) - F_0(a)$.

7.12 (Интегриране по части). Нека f и g са холоморфни в областта D и γ е крива в D с начало a и край b. Да се докаже, че

$$\int_\gamma fg'\,dz = fg\Big|_a^b - \int_\gamma gf'\,dz.$$

Тук, разбира се, $fg\big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Решение. Функцията fg е примитивна в D на функцията $fg' + gf'$ и резултатът е следствие от теоремата на Лайбниц — Нютон.

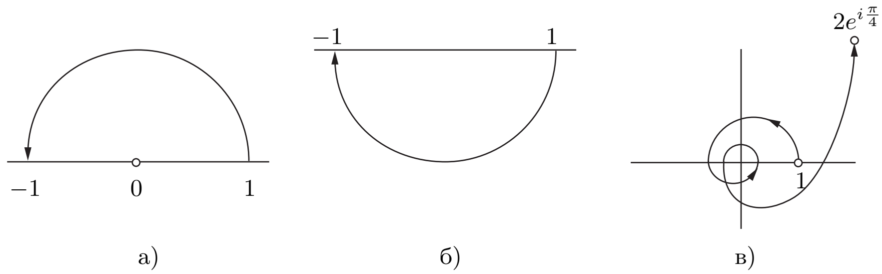
Забележка. И тук е в сила това, което казахме във *Важна забележка*: Ако f и g не са еднозначни, отделят се техни еднозначни клонове в началото на кривата, така че началното условие да бъде изпълнено. Те се продължават по кривата и стойностите им в b са стойностите именно на тези продължения.

7.13. Нека $\sqrt{z}$ е онзи клон, който в околност на $z = 1$ е еднозначен и $\sqrt{1} = 1$. Да се пресметне $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$, където γ е:

а) горната единична полуокръжност с начало $z = 1$ (фиг. 7.1 а));

б) долната единична полуокръжност с начало $z = 1$ (фиг. 7.1 б));

в) кривата на фиг. 7.1 в).



Фиг. 7.1

Решение. а) Тъй като $\sqrt{1} = 1$, то в околност на $z = 1$, $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log_0 z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\arg z}{2}}$, $-\pi < \arg z < \pi$. Продължението на този логаритъм по горната единична полуокръжност води от $\arg 1 = 0$ до $\arg(-1) = \pi$. Тогава функцията $2\sqrt{z}$ е примитивна на $1/\sqrt{z}$ и получаваме

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_1^{-1} = 2\left(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{0}{2}}\right) = 2(i-1).$$

б) Разсъждавайки както в а), ще получим $\arg 1 = 0$, $\arg(-1) = -\pi$, откъдето

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_1^{-1} = 2\left(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{0}{2}}\right) = 2(-i-1).$$

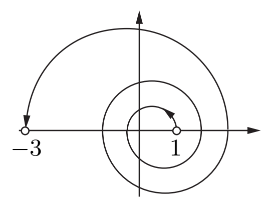
в) Тъй като кривата прави две пълни обиколки около началото, то $\arg 1 = 0$, $\arg\left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 2.2\pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{17\pi}{4}$, откъдето получаваме

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_1^{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = 2\left(e^{\frac{1}{2}\left(\ln 2 + i\frac{17\pi}{4}\right)} - e^0\right) = 2\left(\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{8}} - 1\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}} - 1\right).$$

7.14. Нека γ е кривата:

а) $C(0,1)$ с начало и край точката 1; **б)** на фиг. 7.2.



Фиг. 7.2

Да се пресметне $\displaystyle\int_\gamma \log z\, dz$, $\log 1 = 0$.

Решение. а) Условието $\log 1 = 0$ изисква в околност на $z = 1$ да дефинираме $\log z = \log_0 z = \ln|z| + i\arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$. Продължението на тази функция по горната единична полуокръжност води до същата функция с $\arg 1 = 0$, $\arg(-1) = \pi$. Продължението по долната единична полуокръжност от -1 до 1 води до $\log z = \ln|z| + i\arg z$, $\pi \le \arg z \le 2\pi$ с $\arg 1 = 2\pi$. Тогава, като интегрираме по части, получаваме

$$\int_\gamma \log z\, dz = (z\log z - z)\Big|_1^1 = 1(\ln 1 + 2\pi i - \ln 1 - 0i) = 2\pi i.$$

б) Сега продължението на $\log z$ по кривата от 1 до -3 дава $\log z = \ln|z| + i\arg z$, $0 \le \arg z \le 4\pi + \pi$, тъй като кривата прави две пълни обиколки около $z = 0$. Имаме $\arg 1 = 0$, $\arg(-3) = 5\pi$. Тогава интегрирането по части води до

$$\begin{aligned}\int_\gamma \log z\, dz &= (z\log z - z)\Big|_1^{-3}\\ &= -3(\ln|-3| + i\arg(-3) - 1) - 1(\ln|1| + i\arg 1 - 1)\\ &= -3(\ln 3 + 5\pi i) + 4.\end{aligned}$$

7.15. Нека $\log u$ е онзи клон, който за $u > 0$ взема стойност $\ln u$. Да се пресметне $\displaystyle\int_\gamma z^2 \log\frac{z+1}{z-1}\, dz$, ако:

а) $\gamma = C(0,2)$ с начало и край $z = 2$;

б) $\gamma = C(1,1)$ с начало и край $z = 1 + i$.

Решение. а) По условие при $z > 1$ (тогава $\dfrac{z+1}{z-1} > 0$) във формулата $\log\dfrac{z+1}{z-1} = \ln\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| + i(\arg(z+1) - \arg(z-1))$ трябва да имаме $\arg(z+1) - \arg(z-1) = 0$. За това е достатъчно да положим $\arg(z-1) = \arg(z+1) = 0$, ако $z > 1$. Тогава изменението на $\arg(z+1) - \arg(z-1)$ върху $C(0,2)$, като се почне в 2 и се свърши в 2, е от 0 до $2\pi - 2\pi = 0$. След интегриране по части получаваме

$$\begin{aligned}
\int_{C(0,2)} z^2 \log\frac{z+1}{z-1}\,dz &= \frac{1}{3} z^3 \log\frac{z+1}{z-1}\bigg|_2^2 + \frac{2}{3}\int_{C(0,2)} \frac{z^3\,dz}{(z+1)(z-1)} \\
&= \frac{2}{3}\int_{C(0,2)} \frac{z^3\,dz}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{3}\left[\int_{C(0,2)} \frac{z^3}{z-1}\,dz - \int_{C(0,2)} \frac{z^3}{z+1}\,dz\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[2\pi i z^3\Big|_{z=1} - 2\pi i z^3\Big|_{z=-1}\right] = \frac{4\pi i}{3},
\end{aligned}$$

като последните два интеграла са пресметнати по формулата на Коши.

б) Сега изменението на $\arg(z+1)$ по $C(1,1)$, почвайки от $z = 2$, е от 0 до α, $\alpha = \sphericalangle(1, -1, 1+i)$, а на $\arg(z-1)$ — от 0 до $\pi/2$. Тогава изменението на $\arg(z+1)$ по $C(1,1)$ от начало $1+i$ до край $1+i$ ще бъде от α до α, а на $\arg(z-1)$ — от $\pi/2$ до $\pi/2 + 2\pi$. Следователно

$$\begin{aligned}
\int_{C(1,1)} z^2 \log\frac{z+1}{z-1}\,dz &= \frac{1}{3} z^3 \log\frac{z+1}{z-1}\bigg|_{1+i}^{1+i} + \frac{2}{3}\int_{C(1,1)} \frac{z^3/(z+1)}{z-1}\,dz \\
&= \frac{1}{3}(1+i)^3\left[\ln 5 + i\alpha - i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) - \left(\ln 5 + i\alpha - i\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&\quad + \frac{2}{3}\cdot 2\pi i\,\frac{z^3}{z+1}\bigg|_{z=1} = 2\pi i\left(1 - \frac{2i}{3}\right).
\end{aligned}$$

7.16. Нека γ е затворена жорданова крива, $0 \in \operatorname{Int}\gamma$ и $f(z)$ е холоморфна в околност на $\overline{\operatorname{Int}\gamma}$ функция. Нека $z_0 \in \gamma$ е избрана за начало и $\log z$ е кой да е еднозначен в околност на z_0 клон на логаритъма. Да се докаже, че

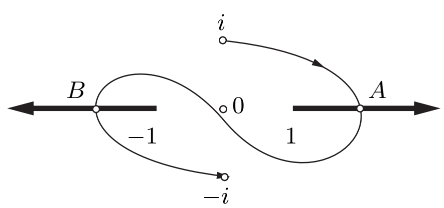
$$\int_\gamma f'(z)\log z\,dz = 2\pi i(f(z_0) - f(0)).$$

Решение. Ако избраният клон взема стойност $\ln|z_0| + i\arg z_0$ в z_0, то продължението му по γ до края z_0 ще доведе до стойност $\ln|z_0| +$

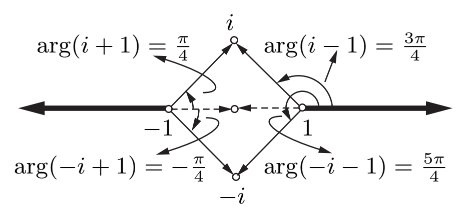
$i(\arg z_0 + 2\pi)$, тъй като γ обикаля началото веднъж в положителна посока. Тогава, интегрирайки по части, получаваме

$$\begin{aligned}\int_\gamma f'(z)\log z\,dz &= f(z)\log z\Big|_{z_0}^{z_0} - \int_\gamma \frac{f(z)}{z}\,dz\\ &= f(z_0)(\ln|z_0| + i(\arg z_0 + 2\pi) - (\ln|z_0| + i\arg z_0)) - 2\pi i f(0)\\ &= 2\pi i(f(z_0) - f(0)).\end{aligned}$$

7.17. Нека D е разрязаната по $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ комплексна равнина, $\sqrt{1-z^2}$ е холоморфната в D функция, която в $(-1, 1)$ взема положителни стойности, и $\arcsin z = \arcsin_0 z$, $z \in D$ (вж. зад. 6.42 и 6.45). Нека γ е кривата от фиг. 7.3. Да се пресметне $\displaystyle\int_\gamma \frac{\arcsin z}{(1-z^2)^{3/2}}\,dz$, където $(1-z^2)^{3/2} = (\sqrt{1-z^2})^3$.



Фиг. 7.3



Фиг. 7.4

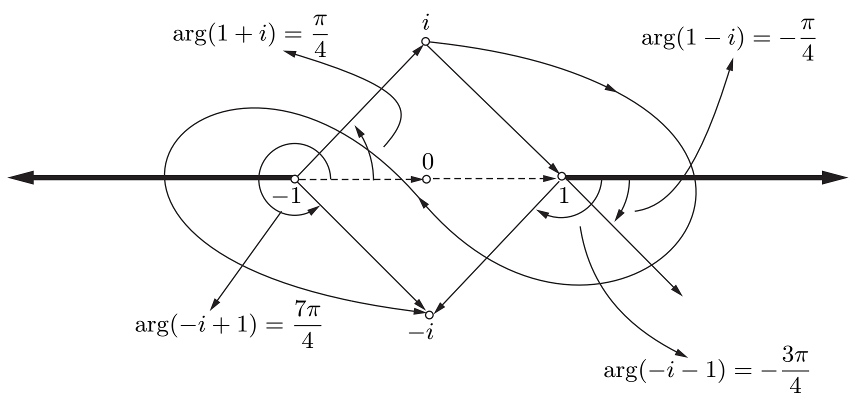
Решение. Като интегрираме по части, получаваме

$$\begin{aligned}&\int_\gamma \frac{\arcsin z}{(1-z^2)^{3/2}}\,dz\\ &\quad= \int_\gamma \arcsin z\, d\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{z\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}}\Big|_i^{-i} - \int_\gamma \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} d\arcsin z\\ &\quad= \frac{z\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}}\Big|_i^{-i} + \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{d(1-z^2)}{1-z^2} = \frac{z\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}}\Big|_i^{-i} + \frac{1}{2}\log(1-z^2)\Big|_i^{-i}.\end{aligned}$$

От зад. 6.42 имаме $\arcsin_0 z = \dfrac{1}{i}\log_0 i(z - \sqrt{z^2-1})$, където за $z = 0$ $\sqrt{z^2-1} = i$, т. е. $\sqrt{z^2-1} = \sqrt{|z^2-1|}e^{\frac{i}{2}(\arg(z-1)+\arg(z+1))}$, като при $z = 0$ имаме $\arg(0-1) = \pi$, $\arg(0+1) = 0$ (фиг. 7.4). При непрекъснатото изменение на z от 0 до i, $\arg(z-1)$ се мени от π до $3\pi/4$, а $\arg(z+1)$ — от 0 до $\pi/4$. Следователно $\sqrt{i^2-1} = \sqrt{2}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = i\sqrt{2}$, откъдето $\arcsin_0 i = \dfrac{1}{i}\log_0 i(i - i\sqrt{2}) = \dfrac{1}{i}\log_0(\sqrt{2}-1) = \dfrac{1}{i}\ln(\sqrt{2}-1)$.

Аналогично намираме $\arg(-i-1) = 5\pi/4$, $\arg(-i+1) = -\pi/4$ и тогава $\sqrt{(-i)^2-1} = \sqrt{2}e^{\frac{i}{2}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)} = i\sqrt{2}$. Оттук получаваме $\arcsin_0(-i) = \dfrac{1}{i}\log_0 i(-i-i\sqrt{2}) = \dfrac{1}{i}\ln(\sqrt{2}+1)$.

При продължението на $\arcsin_0 z$ през точка A (фиг. 7.3) от горната полуравнина в долната резултатът е $\arcsin_0^* z$ (вж. зад. 6.42 и 6.45), а при продължението на $\arcsin_0^* z$ през точката B от горната в долната полуравнина резултатът е $\arcsin_1 z = \arcsin_0 z + 2\pi$. Следователно $\arcsin z\Big|_{z=-i} = \arcsin_0(-i) + 2\pi = 2\pi + \dfrac{1}{i}\ln(\sqrt{2}+1)$.



Фиг. 7.5

Съгласно дефиницията на $\sqrt{1-z^2}$ (положителен в $(-1,1)$) ще имаме $\arg(1-z)\Big|_{z=0} = \arg(1+z)\Big|_{z=0} = 0$ (фиг. 7.5). Когато z се изменя от 0 до i, $\arg(1-z)$ се изменя от 0 до $-\dfrac{\pi}{4}$, а $\arg(1+z)$ — от 0 до $\pi/4$. Следователно $\sqrt{1-i^2} = \sqrt{2}e^{\frac{i}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}$. При непрекъснатото изменение на z по кривата от i до $-i$, $\arg(1-z)$ се изменя от $-\pi/4$ до $-7\pi/4$, а $\arg(1+z)$ — от $\pi/4$ до $7\pi/4$. Следователно $\sqrt{1-(-i)^2} = \sqrt{2}e^{\frac{i}{2}\left(-\frac{7\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}$. Така получаваме

$$\frac{z\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}}\Bigg|_i^{-i} = -i\pi\sqrt{2}.$$

Като използваме вече намерените изменения на $\arg(1-z)$ и $\arg(1+z)$ по кривата от i до $-i$, получаваме

$$\log(1-(-i)^2) = \ln 2 + i\left(-\frac{7\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right) = \ln 2,$$

$$\log(1-i^2) = \ln 2 + i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \ln 2.$$

Следователно $\log(1-z^2)\Big|_i^{-i} = \log(1-(-i)^2) - \log(1-i^2) = 0$. Окончателно получаваме

$$\int_\gamma \frac{\arcsin z\, dz}{(1-z^2)^{3/2}} = -i\pi\sqrt{2}.$$

* * *

7.18. Нека γ е затворена жорданова крива, която не минава през точката $a \in \mathbb{C}$, и $n \in \mathbb{Z}$. Да се докаже, че

$$\int_\gamma (z-a)^n\, dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1,\ a \in \operatorname{Int}\gamma, \\ 0, & n = -1,\ a \notin \overline{\operatorname{Int}\gamma}. \end{cases}$$

Решение. Ако $a \notin \overline{\operatorname{Int}\gamma}$, от теоремата на Коши следва, че $\displaystyle\int_\gamma (z-a)^n\, dz = 0$ за всяко n. Нека $a \in \operatorname{Int}\gamma$ и $C = C(a,\delta)$ е окръжност, такава че $\overline{K(a,\delta)} \subset \operatorname{Int}\gamma$. Функцията $(z-a)^n$ е холоморфна в околност на $\overline{\operatorname{Int}\gamma} \setminus K(a,\delta)$ и съгласно теоремата на Коши за сложен контур имаме $\displaystyle\int_{\gamma\cup C^-} (z-a)^n\, dz = 0$ или $\displaystyle\int_\gamma (z-a)^n\, dz = \int_C (z-a)^n\, dz$. Сега твърдението следва от зад. 7.6 б).

7.19. Да се пресметнат интегралите на Френел

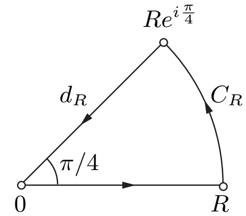
$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \cos x^2\, dx.$$

Решение. Нека γ_R е контурът на областта $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R,\ 0 < \arg z < \pi/4\}$ (фиг. 7.6). Тъй като функцията e^{iz^2} е холоморфна в цялата равнина, от теоремата на Коши следва $\displaystyle\int_{\gamma_R} e^{iz^2}\, dz = 0$ за всяко $R > 0$. От друга страна, следвайки означенията на фиг. 7.6,

$$(1) \qquad 0 = \int_{\gamma_R} e^{iz^2}\, dz = \int_0^R e^{ix^2}\, dx + \int_{C_R} e^{iz^2}\, dz + \int_{d_R} e^{iz^2}\, dz.$$

Имаме

$$\int_0^R e^{ix^2}\, dx = \int_0^R \cos x^2\, dx + i\int_0^R \sin x^2\, dx, \quad \int_{d_R} e^{iz^2}\, dz = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-x^2}\, dx.$$



Фиг. 7.6

Ще докажем, че $\int_{C_R} e^{iz^2}\,dz \to 0$ при $R\to\infty$. Действително, като използваме стандартната оценка за модула на интеграла и известното неравенство $\sin x \ge 2x/\pi$, $x\in[0,\pi/2]$, последователно получаваме

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}\,dz\right| \le \int_{C_R} |e^{iz^2}|\,|dz| = R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2t}\,dt \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4R^2}{\pi}t}\,dt$$
$$= \frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right) \to 0 \text{ при } R\to\infty.$$

Сега от (1) при $R\to\infty$ получаваме

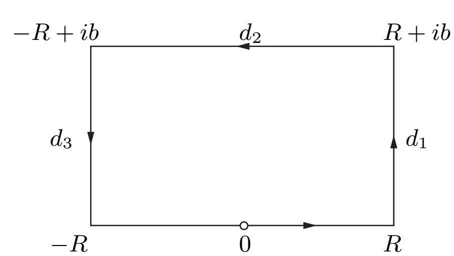
$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx + i\int_0^\infty \sin x^2\,dx = e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

От реалния анализ е известно, че $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (интеграл на Поасон). Следователно, като отделим реална и имагинерна част, получаваме

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

7.20. Да се пресметне $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$, $b>0$.

Упътване. Интегрирайте функцията e^{-z^2} по контура на правоъгълника $\{z\in\mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \le R,\ 0\le \operatorname{Im} z \le b\}$. Следвайки означенията на фиг. 7.7, последователно докажете, че $\int_{d_1} e^{-z^2}\,dz \to 0$, $\int_{d_3} e^{-z^2}\,dz \to 0$ при $R\to\infty$, а



Фиг. 7.7

$\displaystyle\int_{d_2} e^{-z^2}\,dz = -e^{b^2}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}e^{-i2bx}\,dx$. След граничен преход (отново се използва стойността на интеграла на Поасон) ще получите

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \sqrt{\pi}e^{-b^2}.$$

Отг. $\sqrt{\pi}e^{-b^2}/2$.

7.21. Да се пресметне $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$, $a > 0$, $b > 0$.

Решение. Нека γ е елипсата $z = a\cos t + ib\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. От зад. 7.18 имаме $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$. От друга страна,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{\overline{z}dz}{|z|^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t - ib\sin t)(-a\sin t + ib\cos t)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt + iabI.$$

Сега от двете равенства получаваме $I = 2\pi/ab$.

7.22. Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е едносвързана област и $u(x, y) : D \to \mathbb{R}$ е хармонична в D функция. Да се докаже, че съществува холоморфна в D функция $f(z)$, такава че $u = \operatorname{Re} f$. Освен това f е единствена с точност до константа.

Решение. Нека $u = \operatorname{Re} f$ за някоя холоморфна в D функция f и $f = u + iv$. Тогава

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y. \tag{2}$$

Така ако f съществува, то f' е напълно определена от u и значи f е единствена с точност до адитивна константа. Равенството (2) ни подсеща как да конструираме f. Нека $g = u_x - iu_y$. Очевидно $g \in C^1(D)$ и g удовлетворява условията на Коши — Риман. Следователно g е холоморфна в D. Да фиксираме $z_0 \in D$ и нека $f(z) := u(z_0) + \displaystyle\int_{z_0}^{z} g(\zeta)\,d\zeta$, $z \in D$, където интегрирането е по произволна крива $\gamma \subset D$, свързваща z_0 и z. От теоремата на Коши следва, че интегралът не зависи от кривата γ. Тогава f е холоморфна в D и $f' = g = u_x - iu_y$. Нека $\tilde{u} = \operatorname{Re} f$.

От $\tilde{u}_x - i\tilde{u}_y = f' = u_x - iu_y$ следва, че $(u - \tilde{u})_x = (u - \tilde{u})_y = 0$ и значи $u - \tilde{u} = \text{const}$, $z \in D$. Тъй като за $z = z_0$ имаме $f(z_0) = u(z_0)$, то $u(z_0) = \tilde{u}(z_0)$ и следователно $u \equiv \tilde{u} \equiv \operatorname{Re} f$, $z \in D$.

7.23. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в околност на кръга $\overline{K(0, R)}$, $R > 0$.

а) Да се докаже, че за всяко a, $|a| < R$,

$$\frac{a}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z(z-a)}\, dz = f(a) - f(0).$$

б) Да се докаже, че ако $2|a| < R$ и $M := \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$, то $|f(a) - f(0)| \leq 2|a|M/R$.

в) Като използвате а) и б), докажете, че всяка ограничена цяла функция е константа (теорема на Лиувил).

Решение. а) Имаме $\dfrac{a}{z(z-a)} = \dfrac{1}{z-a} - \dfrac{1}{z}$. Тогава от формулата на Коши получаваме

$$\begin{aligned}\frac{a}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z(z-a)}\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z}\, dz \\ &= f(a) - f(0).\end{aligned}$$

б) От а), стандартната оценка за модула на интеграла и неравенството на триъгълника последователно получаваме

$$\begin{aligned}|f(a) - f(0)| &= \frac{|a|}{2\pi} \left| \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z(z-a)}\, dz \right| \leq \frac{|a|}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{|f(z)|}{|z||z-a|}\, |dz| \\ &\leq \frac{|a|}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{|f(z)|}{|z|(|z|-|a|)}\, |dz| \leq \frac{|a|}{2\pi} \cdot \frac{M}{R(R-|a|)} \cdot 2\pi R \\ &< \frac{2|a|M}{R}.\end{aligned}$$

в) Ако f е цяла функция, то а) и б) са изпълнени за всяко $R > 0$ и всяко $a \in \mathbb{C}$. При $R \to \infty$ от б) следва, че $f(a) = f(0)$ за всяко $a \in \mathbb{C}$, т. е. f е константа.

7.24. Нека D е ограничена, крайно свързана област, $f(z)$ е функция, холоморфна в околност на $\overline{D}$, $z_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и $\omega_n(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} (z - z_k)$.

Да се докаже, че

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)} \cdot \frac{\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

е полином от степен най-много $n-1$ и $P(z_k) = f(z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Решение. Тъй като полиномът $\omega_n(\zeta) - \omega_n(z)$ от степен n се анулира при $\zeta = z$, то $\omega_n(\zeta) - \omega_n(z) = (\zeta - z) \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k(\zeta) z^k$, където $c_k(\zeta)$ са полиноми на ζ. Тогава

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)} \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\zeta) z^k\, d\zeta = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{c_k(\zeta) f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)}\, d\zeta \right) z^k$$

е полином от степен най-много $n-1$. Освен това от формулата на Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

получаваме, че

$$f(z) - P(z) = \frac{\omega_n(z)}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)\omega_n(\zeta)}\, d\zeta$$

и следователно $f(z_k) - P(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

7.25 (Формула на Коши за неограничена област). Нека γ е затворена жорданова крива и $f(z)$ е функция, холоморфна във външността $\operatorname{Ext}\gamma$ на γ, в ∞ и по γ. Да се докаже, че

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} -f(z) + f(\infty), & z \in \operatorname{Ext}\gamma, \\ f(\infty), & z \in \operatorname{Int}\gamma. \end{cases}$$

Решение. Да фиксираме $z \in \mathbb{C}$ и нека $R > 0$ е такова, че $\gamma \cup \operatorname{Int}\gamma \subset K(z, R)$. В областта, определена от γ и окръжността $C_R := C(z, R)$, прилагаме формулата на Коши и получаваме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R \cup \gamma^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in \operatorname{Ext}\gamma, \\ 0, & z \in \operatorname{Int}\gamma. \end{cases}$$

Тъй като

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R \cup \gamma^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

достатъчно е да докажем, че

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(\infty).$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно и $R > 0$ е такова, че $|f(\zeta) - f(\infty)| < \varepsilon$ за $|\zeta - z| \geq R$. Тогава (зад. 7.6 б))

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(\infty) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta) - f(\infty)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{R} \cdot 2\pi R = \varepsilon.$$

С това формулата е доказана.

7.26. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е отворено множество, l е права, $l \cap D \neq \emptyset$ и $f(z)$ е функция, непрекъсната в D и холоморфна в $D \setminus l$. Да се докаже, че $f(z)$ е холоморфна в D.

Решение. Преди всичко ще отбележим, че без ограничение на общността можем да считаме, че l е реалната права. В противен случай вместо за $f(z)$ ще разсъждаваме за функцията $f(az + b)$, където линейната трансформация $w = az + b$ изобразява $\mathbb{R}$ в l. Освен това, тъй като холоморфността е локално свойство, за да установим холоморфност на $f(z)$ в точка $z_0 \in l \cap D$, ще разсъждаваме в околност на z_0, т. е. в кръг около z_0. Ето защо без ограничение можем да смятаме, че D е кръг.

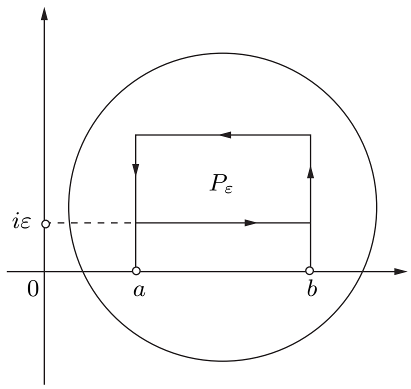
Ще докажем, че $\displaystyle\int_{\partial P} f(z)\, dz = 0$ за всеки затворен правоъгълник $P \subset D$ със страни, успоредни на координатните оси. Възможни са три случая:

1. $l \cap P = \emptyset$. Твърдението следва от теоремата на Коши.

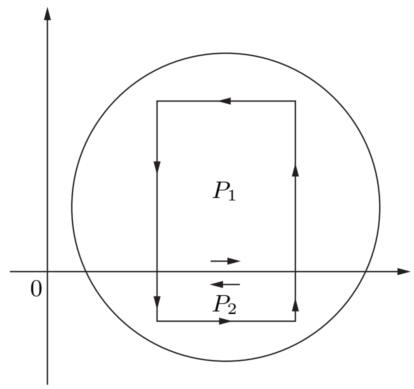
2. Страна на P лежи върху l. Нека $\varepsilon > 0$ и $P_\varepsilon \subset P$ е правоъгълник, получен от P с ε-отместване на страната $[a, b]$, лежаща върху l (фиг. 7.8), така че $l \cap p_\varepsilon = \emptyset$. Тогава

$$\int_{\partial P} f(z)\, dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial P_\varepsilon} f(z)\, dz = 0,$$

защото $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^b f(x + i\varepsilon)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$ поради непрекъснатостта на f върху l.



Фиг. 7.8



Фиг. 7.9

3. $l \cap P \neq \emptyset$ (фиг. 7.9). Сега

$$\int_{\partial P} f(z)\,dz = \int_{\partial P_1} f(z)\,dz + \int_{\partial P_2} f(z)\,dz,$$

където P_1 и P_2 са както в 2. Така отново $\displaystyle\int_{\partial P} f(z)\,dz = 0$.

Накрая от теоремата на Морера следва, че $f(z)$ е холоморфна в D.

7.27. Нека f е холоморфна в единичния кръг $K(0,1)$ и непрекъсната върху $\overline{K(0,1)}$. Да се докаже, че за всяко $z_0 \in K(0,1)$

$$\overline{f(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0}\,dz.$$

Решение. Тъй като $z\overline{z} = 1$ за $|z| = 1$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \overline{\left(\frac{f(z)}{z(1-\overline{z}_0 z)}\right)}\frac{dz}{z^2}$$

и от зад. 7.10 получаваме, че

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z - z_0}\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\overline{\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z(1-\overline{z}_0 z)}\,dz}.$$

Сега твърдението следва от формулата на Коши за функцията $\dfrac{f(z)}{1-\overline{z}_0 z}$, която е холоморфна в $K(0,1)$ и непрекъсната върху $\overline{K(0,1)}$.

7.28 (Формула на Шварц). Нека f е холоморфна в $K(0,1)$ и непрекъсната върху $\overline{K(0,1)}$. Да се докаже, че за всяко $z_0 \in K(0,1)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{Re} f(z)}{z}\cdot\frac{z+z_0}{z-z_0}\,dz + i\operatorname{Im} f(0).$$

Решение. Като вземем предвид, че $\dfrac{z+z_0}{z(z-z_0)} = \dfrac{2}{z-z_0} - \dfrac{1}{z}$, $\operatorname{Re} f = (f+\overline{f})/2$, формулата на Коши и зад. 7.27, за интеграла в дясната страна на равенството последователно получаваме

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)+\overline{f(z)}}{2}\left(\frac{2}{z-z_0} - \frac{1}{z}\right)dz\\
&\quad= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)+\overline{f(z)}}{z-z_0}\,dz - \frac{1}{4\pi i}\int_{|z|=1} \frac{f(z)+\overline{f(z)}}{z}\,dz\\
&\quad= f(z_0) + \overline{f(0)} - \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}\overline{f(0)} = f(z_0) - i\operatorname{Im} f(0).
\end{aligned}$$

Забележка. Чрез формулата на Шварц всяка холоморфна в единичния кръг функция може да бъде възстановена по стойностите на реалната ѝ част върху единичната окръжност. При това, ако $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\frac{z+z_0}{z-z_0}\,dt + i\operatorname{Im} f(0), \quad z_0 \in K(0,1),$$

и като вземем предвид, че $\operatorname{Re}\dfrac{z+z_0}{z-z_0} = \dfrac{|z|^2-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}$ и отделим реалната част, получаваме формулата на Поасон за хармонични функции

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}\,dt,$$

или ако $z_0 = re^{it_0}$,

$$u(re^{it_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-t_0)+r^2}\,dt.$$

Тази формула решава класическата задача на Дирихле за единичния кръг.

§ 8. Ред на Тейлър. Ред на Лоран. Особени точки от еднозначен характер

Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област и $f(z)$ е холоморфна в D функция. В сила е следната

Теорема на Тейлър. Нека $z_0 \in D$. Тогава в околност на z_0 функцията $f(z)$ може да се развие в степенен ред

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{1}$$

който се нарича *ред на Тейлър* на $f(z)$ около $z = z_0$. Коефициентите a_n се пресмятат по формулите

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}},$$

където $r > 0$ е такова, че $\overline{K(z_0, r)} \subset D$ и интегрирането е в посока, обратна на посоката на движение на часовниковата стрелка.

Радиусът на сходимост R на (1) е равен на разстоянието от z_0 до най-близката особена точка на f и следователно $R \geq \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$.

Когато $f(z)$ не е холоморфна в околност на $z_0 \in \mathbb{C}$, а само във венец $D : r < |z - z_0| < R$ с център в z_0, тя може да се представи като сума на два реда:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \end{aligned} \tag{2}$$

Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{(z - z_0)^n}$ е сходящ абсолютно и равномерно върху компактните подмножества на $|z - z_0| > r$, а редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ е сходящ абсолютно и равномерно върху компактните подмножества на $|z - z_0| < R$. Следователно $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, където $f_1(z)$ е холоморфна в $|z - z_0| > r$, а $f_2(z)$ — в $|z - z_0| < R$. Функцията $f_1(z)$ се нарича *характеристична функция* на $f(z)$ във венеца D. Коефициентите се определят еднозначно по следните формули:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z)(z - z_0)^{n-1}\,dz, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}},$$

където ρ е произволно число между r и R и интегрирането е в посока, противоположна на посоката на движение на часовниковата стрелка.

Редът (2) се нарича *ред на Лоран* на $f(z)$ във венеца D и обикновено се записва така:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \text{ където } a_n = b_{-n} \text{ при } n < 0.$$

Нека сега $r = 0$, т. е. $f(z)$ е холоморфна в пробития кръг $D : 0 < |z - z_0| < R$. В този случай z_0 се нарича *изолирана особена точка на $f(z)$ от еднозначен характер*. Възможни са следните случаи:

1. Всички коефициенти b_n са равни на нула. Тогава $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ и ако положим $f(z_0) = a_0$, получаваме, че f се продължава до холоморфна в $|z - z_0| < R$ функция. В този случай z_0 се нарича *отстранима особена точка* на $f(z)$ и е в сила

Теорема на Риман. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) z_0 е отстранима особена точка на $f(z)$.

(2) Съществува $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

(3) $f(z)$ е ограничена в пробита околност на z_0.

2. Съществува цяло положително число m, такова че $b_m \neq 0$, но $b_n = 0$ за всяко $n > m$, т. е. редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{b_n}{(z - z_0)^n}$ съдържа само краен брой членове. Тогава z_0 се нарича *полюс* на $f(z)$ от кратност m и е в сила

Теорема. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) z_0 е полюс на $f(z)$.

(2) Съществува $m \in \mathbb{N}$, такова че $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$ в пробита околност на z_0, където $\varphi(z)$ е холоморфна в z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$. (В този случай z_0 е m-кратен полюс на $f(z)$.)

(3) Съществува $m \in \mathbb{N}$, такова че z_0 е m-кратна нула за $1/f(z)$. (В този случай m е кратността на полюса z_0.)

(4) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

3. Безбройно много коефициенти b_n са различни от 0. Тогава z_0 се нарича *съществена особена точка* на $f(z)$. В този случай поведението на $f(z)$ в околност на z_0 е напълно неконтролируемо. Именно, в сила е

Теорема (Сохоцки — Казорати — Вайерщрас). Следните твърдения са еквивалентни:

(1) z_0 е съществена особена точка на $f(z)$.

(2) За всяка пробита околност $D_\varepsilon = \{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ множеството $f(D_\varepsilon)$ е навсякъде гъсто в $\overline{\mathbb{C}}$, т. е. за всяко $\alpha \in \overline{\mathbb{C}}$ съществува редица $z_n \to z_0$, такава че $f(z_n) \to \alpha$.

(3) В $\overline{\mathbb{C}}$ не съществува $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Въведените дотук понятия могат да бъдат пренесени и за $z_0 = \infty$. Именно, нека $f(z)$ е холоморфна в областта $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$. Правим трансформацията $\zeta = \dfrac{1}{z}$, която изобразява D в пробитата околност $0 < |\zeta| < \dfrac{1}{R}$ на

$\zeta = 0$ и функцията $\varphi(\zeta) = f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)$ е холоморфна в нея. Тогава $z = \infty$ се нарича съответно отстранима особеност, полюс или съществена особена точка на $f(z)$, ако $\zeta = 0$ е такава за $\varphi(\zeta)$. Като вземем предвид развитието на $\varphi(\zeta)$ в ред на Лоран в $0 < |\zeta| < \dfrac{1}{R}$ и се върнем към $f(z) = \varphi\left(\dfrac{1}{z}\right)$, ще получим:

а) ако ∞ е отстранима особеност на $f(z)$, то в $|z| > R$ е в сила развитието $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{z^n}$ — Тейлъров ред на $f(z)$ в $z = \infty$;

б) ако ∞ е полюс на $f(z)$, то

$$f(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad b_m \neq 0;$$

в) ако $z = \infty$ е съществена особена точка на $f(z)$, то

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

като безбройно много коефициенти b_n са различни от нула.

Тези редове са абсолютно и равномерно сходящи в компактните (в $\overline{\mathbb{C}}$) подмножества на $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > R\}$ и са в сила формулите

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) z^{n-1}\, dz, \quad r > R.$$

8.1. Да се развие в ред на Тейлър около $z = 0$ функцията $f(z)$ и да се намери неговият радиус на сходимост, където:

а) $f(z) = \operatorname{ch} z$; **б)** $f(z) = \operatorname{sh} z$; **в)** $f(z) = \sin^2 z$; **г)** $f(z) = \dfrac{1}{az + b}$, $b \neq 0$;

д) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 4z + 13}$; **е)** $f(z) = \log_0 \dfrac{1+z}{1-z}$;

ж) $f(z) = \log_0(z^2 - 3z + 2)$;

з) $f(z) = (a + z)^\alpha$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, $f(0) = e^{\alpha \log a}$, където $\log a$ е зададена стойност;

и) $f(z) = \sqrt{z + i}$, $f(0) = e^{i\frac{\pi}{4}}$; **к)** $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^2}$;

л) $f(z) = \operatorname{arctg} z$, $f(0) = 0$; **м)** $f(z) = \displaystyle\int_0^z e^{\zeta^2}\, d\zeta$; **н)** $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{\sin\zeta}{\zeta}\, d\zeta$.

Решение. а) Тъй като $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$, то

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$z \in \mathbb{C}$ и $R = \infty$.

б) *Отг.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$.

в) *Упътване.* Използвайте формулата $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)$.

Отг. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$, $R = \infty$.

г) За $\left|\frac{az}{b}\right| < 1 \iff |z| < \left|\frac{b}{a}\right|$ имаме

$$f(z) = \frac{1}{b\left(1 + \frac{az}{b}\right)} = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{az}{b}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a^n}{b^{n+1}} z^n.$$

Следователно $R \geq \left|\frac{b}{a}\right|$. Тъй като $-\frac{b}{a}$ е единствената особена точка на $f(z)$, то $R = \left|\frac{b}{a}\right|$.

д) Нека $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$. Тогава

$$f(z) = \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{z}{z_1 - z_2}\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right)$$

и от г) получаваме

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z_1 - z_2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_1^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_2^{n+1}} z^n\right) = \frac{1}{z_1 - z_2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_1^n - z_2^n}{(z_1 z_2)^n} z^n \\ &= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{(\sqrt{13})^n} z^n, \end{aligned}$$

където $\theta = \arg z_1$. Тогава $R = |z_1| = |z_2| = \sqrt{13}$.

е) Имаме $\log_0 \frac{1+z}{1-z} = \log_0(1 + z) - \log_0(1 - z) + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$, откъдето при $z = 0$ получаваме $\log_0 1 = i2k\pi$, т. е. $k = 0$. Сега използвайте тейлъровото развитие на $\log_0(1 + z)$.

Отг. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} z^{2n+1}$, $R = 1$.

ж) *Упътване.* Използвайте равенството $f(z) = \log_0(1 - z)(2 - z) = \ln 2 + \log_0(1 - z) + \log_0\left(1 - \frac{z}{2}\right)$.

Отг. $\ln 2 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n2^n} z^n$, $R = 1$.

з) *Упътване.* Покажете, че $(a+z)^\alpha = a^\alpha \left(1+\frac{z}{a}\right)^\alpha$, където $\left(1+\frac{z}{a}\right)^\alpha$ е онзи еднозначен клон, който при $z = 0$ приема стойност 1.

Отг. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{a^\alpha}{a^n} z^n$, $R = |a|$.

и) *Отг.* $e^{i\frac{\pi}{4}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{z^n}{i^n} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left[1 + \frac{1}{2i} z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!i^n} z^n\right]$, R=1.

к) От $\frac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $|z| < 1$ и теоремата за диференциране на степенни редове следва $\frac{-1}{(z+1)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}$. Тогава $f(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1) z^n$ и $R = 1$.

л) Имаме $f'(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$, $|z| < 1$, като редът е равномерно сходящ върху компактните подмножества на $|z| < 1$. Тогава

$$f(z) = f(z) - f(0) = \int_0^z f'(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1.$$

м) *Отг.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)}$, $R = \infty$.

н) *Отг.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, $R = \infty$.

8.2. Да се развие в ред на Тейлър около $z = 1$ функцията $f(z)$ и да се намери неговият радиус на сходимост:

а) $f(z) = \frac{z}{z+2}$; **б)** $f(z) = \sqrt[3]{z}$, $f(1) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

в) $f(z) = \log_0 z$; **г)** $f(z) = \sin(2z - z^2)$.

Решение. а) Полагаме $z - 1 = u$. Тогава $z = 1 + u$ и развиваме в ред около $u = 0$ функцията

$$f(u) = \frac{1+u}{3+u} = 1 - \frac{2}{u+3} = 1 - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{u}{3}\right)^n, \quad |u| < 3.$$

Следователно $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^{n+1}} (z-1)^n$ и $R = 3$.

б) По условие $\sqrt[3]{z} = e^{\frac{1}{3}(\log_0 z + i2\pi)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{\frac{1}{3}\log_0 z}$. Полагаме $z - 1 = u$ и получаваме

$$\sqrt[3]{1+u} = e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{\frac{1}{3}\log_0(1+u)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} u^n.$$

Отг. $e^{i\frac{2\pi}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{3}}{n} (z-1)^n$, $R = 1$.

в) *Отг.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$, $R = 1$.

г) След полагането $z - 1 = u$ получаваме функцията $\sin(1 - u^2)$. Имаме

$$\begin{aligned} \sin(1-u^2) &= \sin 1 \cos u^2 - \cos 1 \sin u^2 \\ &= \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(u^2)^{2n}}{(2n)!} - \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(u^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(1 - \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} u^{2n}. \end{aligned}$$

Отг. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(1 - \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} (z-1)^{2n}$, $R = \infty$.

8.3. Да се намерят първите четири различни от нула коефициенти в тейлъровото развитие около $z = 0$ на функцията:

а) $f(z) = \dfrac{z}{\log_0(1+z)}$; **б)** $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{arctg} z}$, $\operatorname{arctg} 0 = 0$;

в) $f(z) = \sqrt{\cos z}$, $f(0) = 1$; **г)** $f(z) = e^{e^z}$.

Решение. а) Нека $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Тъй като $z = -1$ е единствената ѝ особена точка (тя е точка на разклоняване на $\log_0(1+z)$), то радиусът на сходимост на реда е $R = 1$. Тогава за $|z| < 1$ имаме

$$z = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \log_0(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n},$$

като и двата реда са абсолютно сходящи. Затова можем да ги умножим почленно. Така получаваме $z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Тъй като степенните редове, намиращи се от двете страни на това равенство, съвпадат за $|z| < 1$, от теоремата на Тейлър следва, че и коефициентите им съвпадат. Получаваме уравненията $c_1 = 1$, $c_n = 0$, $n \neq 1$ или,

$$a_0 = 1,\ -\frac{1}{2}a_0 + a_1 = 0,\ \frac{1}{3}a_0 - \frac{1}{2}a_1 + a_2 = 0,\ -\frac{1}{4}a_0 + \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + a_3 = 0,\ \dots,$$

откъдето последователно намираме $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = -\dfrac{1}{12}$ и $a_3 = \dfrac{1}{24}$. Така

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{12}z^2 + \frac{1}{24}z^3 - \cdots, \quad |z| < 1.$$

Забележка. Описаният по-горе начин за определяне на коефициентите a_n наричаме *метод на неопределените коефициенти.*

б) *Упътване.* Използвайте, че $f(z)$ е четна функция, откъдето $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$, $|z| < 1$.

Отг. $f(z) = 1 + \dfrac{1}{3}z^2 - \dfrac{4}{45}z^4 + \dfrac{44}{945}z^6 + \cdots$, $|z| < 1$.

в) *Упътване.* Използвайте, че $f(z)$ е четна функция и $f^2(z) = \cos z$, $|z| < \pi/2$ ($\pi/2$ е най-близката до нулата точка на разклоняване на $f(z)$).

Отг. $f(z) = 1 - \dfrac{1}{4}z^2 - \dfrac{1}{96}z^4 - \dfrac{19}{5760}z^6 - \cdots$, $|z| < \dfrac{\pi}{2}$.

г) *Упътване.* Използвайте равенството $f'(z) = e^z f(z)$.

Отг. $f(z) = e\left(1 + z + z^2 + \dfrac{5}{6}z^3 + \cdots\right)$, $z \in \mathbb{C}$.

8.4. Нека $\dfrac{1}{1 - z - z^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Да се докаже, че:

а) $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \geq 0$;

б) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$, $n \geq 0$.

Решение. Особените точки на функцията $\dfrac{1}{1 - z - z^2}$ са $z_1 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $z_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, като по-близка до нулата е z_2. Следователно радиусът на сходимост на тейлъровия ѝ ред е $R = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

а) За $|z| < R$ имаме $(1 - z - z^2)(a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots) = 1$ и като сравним коефициентите пред съответните степени на z, получаваме $a_0 = 1$, $-a_0 + a_1 = 0$, $\dots$, $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$, $n \geq 0$.

Забележка. Редицата $\{a_n\}$ с горните свойства се нарича *редица на Фибоначи.*

б) От друга страна, $\dfrac{1}{1-z-z^2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{z-z_1} + \dfrac{1}{z_2-z}\right)$ и като развием в ред всяка от дробите (вж. зад. 8.1 г)), получаваме

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z_1^{n+1}-z_2^{n+1}}{(z_1z_2)^{n+1}}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left((-z_1)^{n+1}-(-z_2)^{n+1}\right)z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]z^n.$$

Сега твърдението следва от единствеността на тейлъровото развитие.

8.5. Нека $\dfrac{1}{\cos z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}}{(2n)!}z^{2n}$. Да се докаже, че $E_0 = 1$, $E_0 + \dbinom{2n}{2}E_2 + \cdots + \dbinom{2n}{2n}E_{2n} = 0$.

Забележка. Числата E_n, $n \geq 0$, се наричат *числа на Ойлер.*

Решение. Радиусът на сходимост на реда е $\dfrac{\pi}{2}$ и за $|z| < \dfrac{\pi}{2}$ имаме

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_{2n}z^{2n}}{(2n)!} = 1.$$

Приравняваме коефициентите пред z^{2n}, $n = 0, 1, \ldots$, и получаваме твърдението. Чрез него можем да пресметнем всяко от числата E_{2n}. Така $E_2 = -1$, $E_4 = 5$, $E_6 = -61$, …, и

$$\frac{1}{\cos z} = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{5}{4!}z^4 + \frac{61}{6!}z^6 + \cdots, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

8.6. Нека $\log_0(1+e^z) = \ln 2 + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1}$. Да се докаже, че:

а) $a_0 = \dfrac{1}{2}$, $a_0 + na_1 + n(n-1)a_2 + \cdots + n!a_{n-1} + 2n!a_n = 1$, $n \geq 1$;

б) $a_{2n} = 0$, $n \geq 1$.

Решение. а) Нека $f(z) = \log_0(1+e^z)$. Преди всичко ще отбележим, че най-близката до нулата особена точка на $f(z)$ е $i\pi$ и следователно радиусът на сходимост на реда е π. Тогава за $|z| < \pi$ имаме $f'(z) =$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. От друга страна, $f'(z) = \dfrac{e^z}{1+e^z} \iff (1+e^z)f'(z) = e^z$, откъдето следва равенството

$$\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

След приравняване на съответните коефициенти получаваме $a_0 = 1/2$, $\dfrac{a_0}{n!} + \dfrac{a_1}{(n-1)!} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{1!} + 2a_n = \dfrac{1}{n!}$, или $a_0 + na_1 + n(n-1)a_2 + \cdots + n!a_{n-1} + 2n!a_n = 1$.

б) Имаме $f(-z) = \log_0(1+e^{-z}) = \log_0(1+e^z) - z = f(z) - z$, откъдето следва $f(z) - \dfrac{z}{2} = f(-z) + \dfrac{z}{2}$. Това означава, че функцията $f(z) - \dfrac{z}{2} = \ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}z^{n+1}$ е четна и значи $a_{2n} = 0$, $n \geq 1$.

8.7. Нека $\dfrac{z}{e^z - 1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n}{n!}z^n$. Да се докаже, че:

а) $B_0 = 1$, $\dbinom{n+1}{0}B_0 + \dbinom{n+1}{1}B_1 + \cdots + \dbinom{n+1}{n}B_n = 0$;

б) $B_{2n+1} = 0$, $n \geq 1$.

Забележка. Числата B_n се наричат *числа на Бернули.* Те са рационални числа и $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$ и т. н. Радиусът на сходимост на степенния ред е 2π.

Упътване за б). Докажете, че функцията $\dfrac{z}{e^z - 1} + \dfrac{z}{2}$ е четна.

8.8. Да се развие в ред на Тейлър около $z = 0$ функцията $f(z)$ и да се намери неговият радиус на сходимост R:

а) $f(z) = z\operatorname{ctg} z$; **б)** $f(z) = \operatorname{tg} z$; **в)** $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$; **г)** $f(z) = \log_0 \cos z$.

Решение. а) Нека $g(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$. Тогава $\operatorname{ctg} z = i\dfrac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i + \dfrac{2i}{e^{2iz}-1}$ $= i + \dfrac{g(2iz)}{z}$, или $z\operatorname{ctg} z = iz + g(2iz)$. Оттук и от зад. 8.7 получаваме

$$z\operatorname{ctg} z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}B_{2n}z^{2n} \quad \text{и} \quad R = \pi.$$

б) *Упътване.* Използвайте формулата $\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z - 2\operatorname{ctg} 2z$.

Отг. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4^n(4^n-1)}{(2n)!}B_{2n}z^{2n-1}$, $R = \dfrac{\pi}{2}$.

в) *Упътване.* Докажете и използвайте, че $\dfrac{1}{\sin z} = \operatorname{ctg} z + \operatorname{tg}\dfrac{z}{2}$.

Отг. $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{4^n-2}{(2n)!}B_{2n}z^{2n}$, $R = \pi$.

г) *Упътване.* Използвайте, че $(\log_0 \cos z)' = -\operatorname{tg} z$.

Отг. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^n(4^n-1)}{2n(2n)!}B_{2n}z^{2n}$, $R = \dfrac{\pi}{2}$.

8.9. Нека $\dfrac{4-t^2}{t^2-4zt+4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n(z)t^n$. Да се докаже, че:

а) $T_n(z)$ е полином от n-та степен с коефициент 1 пред z^n;

б) $T_n(z) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos z)$;

в) $4T_{n+1}(z) - 4zT_n(z) + T_{n-1}(z) = 0$, $n \geq 1$, $z \in \mathbb{C}$.

Решение. а) От формулата на Коши за тейлъровите коефициенти имаме

$$T_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\frac{4-t^2}{t^2-4zt+4}\cdot\frac{dt}{t^{n+1}},$$

където r е толкова малко в зависимост от z, че корените на $t^2-4zt+4$ са извън кръга $|t| \leq r$. Тези корени са $t_1 = 2(z+i\sqrt{1-z^2})$ и $t_2 = 2(z-i\sqrt{1-z^2})$. Тук ще считаме, че $z \neq \pm 1$ (засега) и $\sqrt{1-z^2}$ е клонът, който взема положителни стойности в $(-1,1)$. Тогава

$$\frac{1}{t^2-4zt+4} = \frac{1}{t_1-t_2}\left(\frac{1}{t-t_1} - \frac{1}{t-t_2}\right), \quad \frac{4-t^2}{t^2-4zt+4} = -1 + \frac{8-4zt}{t^2-4zt+4}$$

и тъй като $\displaystyle\int_{|t|=r}\frac{dt}{t^{n+1}} = 0$ за $n = 1, 2, \ldots$, то

$$\begin{aligned}
T_n(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\frac{8-4zt}{t^2-4zt+4}\frac{dt}{t^{n+1}} \\
&= \frac{8}{t_1-t_2}\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\left(\frac{1}{t-t_1}-\frac{1}{t-t_2}\right)\frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\quad - \frac{4z}{t_1-t_2}\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\left(\frac{1}{t-t_1}-\frac{1}{t-t_2}\right)\frac{dt}{t^n}.
\end{aligned}$$

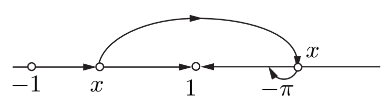
Като използваме формулата на Коши за външността на $|t| = r$, получаваме (вж. зад. 7.25)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\frac{1}{t-t_k}\frac{dt}{t^s} = -\frac{1}{t_k^s}, \quad k = 1, 2 \text{ и } s = n, n+1.$$

Като използваме, че $t_1 t_2 = 4$, получаваме

$$\begin{aligned}
T_n(z) &= \frac{8}{t_1 - t_2}\left(-\frac{1}{t_1^{n+1}} + \frac{1}{t_2^{n+1}}\right) - \frac{4z}{t_1 - t_2}\left(-\frac{1}{t_1^{n}} + \frac{1}{t_2^{n}}\right) \\
&= \frac{2}{t_1 - t_2}\frac{t_1^{n+1} - t_2^{n+1}}{4^n} - \frac{4z}{t_1 - t_2}\frac{t_1^n - t_2^n}{4^n} \\
&= \frac{2}{4^n(t_1 - t_2)}\left[t_1^n(t_1 - 2z) + t_2^n(2z - t_2)\right] \\
&= \frac{2}{4^n 4i\sqrt{1 - z^2}}\left[2i\sqrt{1 - z^2}(t_1^n + t_2^n)\right] \\
&= \frac{1}{2^n}\left[(z + i\sqrt{1 - z^2})^n + (z - i\sqrt{1 - z^2})^n\right].
\end{aligned}$$

Ясно е, че при повдигането на n-та степен по бинома на Нютон корените се унищожават, така че $T_n(z)$ е полином от степен n. От условието $\sqrt{1 - x^2} > 0$ за $x \in (-1, 1)$ следва $\arg(1 - x) = \arg(1 + x) = 0$. В такъв случай за $x > 1$ получаваме (фиг. 8.1) $\arg(1 - x) = -\pi$, $\arg(1 + x) = 0$, откъдето



Фиг. 8.1

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{|1 - x^2|}e^{\frac{i}{2}(\arg(1-x)+\arg(1+x))} = \sqrt{x^2 - 1}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{x^2 - 1}.$$

Тогава за коефициентите a_n пред z^n получаваме

$$\begin{aligned}
a_n &= \lim_{x\to+\infty}\frac{T_n(x)}{x^n} \\
&= \frac{1}{2^n}\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x + i(-i\sqrt{x^2 - 1})}{x}\right)^n + \left(\frac{x - i(-i\sqrt{x^2 - 1})}{x}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{2^n}(2^n + 0^n) = 1.
\end{aligned}$$

б) Нека $x \in (-1, 1)$ и $\alpha = \arccos x$, $\alpha \in (0, \pi)$. Тогава

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \frac{1}{2^n}\left[(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n\right] \\
&= \frac{1}{2^n}\left(e^{in\alpha} + e^{-in\alpha}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos n\alpha = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x).
\end{aligned}$$

Оттук съгласно теоремата за идентичност на аналитични функции следва $T_n(z) = \cos(n\arccos z)$ за всяко z.

Важна забележка. Всъщност равенството $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ следва от $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in (-1, 1)$, само за $z \in \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$, където е дефиниран главният клон на функцията $\arccos z$ (вж. зад. 6.47). Тъй като $\arccos z$ е продължима неограничено в $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, а в ± 1 има граница, то всички продължения на $\cos(n \arccos z)$ ще съвпадат с еднозначната функция $T_n(z)$ включително и в ± 1.

Тук се натъкваме на едно много важно явление в комплексния анализ — за всяко z многозначната функция $u = n \arccos z$ взема безбройно много стойности. Всички те обаче чрез функцията $\cos u$ отиват в една и съща стойност, така че сложната функция $\cos(n \arccos z)$ е еднозначна и холоморфна в $\mathbb{C}$.

в) От равенството $4 - t^2 = (t^2 - 4zt + 4) \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(z) t^n$ след разкриване на скобите и сравняване на коефициентите пред равните степени на t получаваме: $T_0 \equiv 1$, $4T_1 - 4zT_0 = 0 \Rightarrow T_1 = z$ и $4T_{n+1} - 4zT_n + T_{n-1} \equiv 0$ при $n \geq 1$, откъдето последователно можем да намерим всички T_n.

Полиномите $T_n(z)$ се наричат *полиноми на Чебишов* и играят изключително важна роля в анализа.

8.10. Да се намерят границите:

а) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{z^4} \left[3e^{\frac{1+z}{1-z}} - e(3 + 6z + 12z^2 + 22z^3) \right]$;

б) $\lim\limits_{z \to 0} \left(\log_0^2(1 - z) - z^2 - z^3 \right)$.

Решение. а) $\dfrac{1+z}{1-z} = (1+z)(1+z+\cdots+z^n+\cdots) = 1+2(z+z^2+z^3+\cdots)$. Следователно

$$\begin{aligned} e^{\frac{1+z}{1-z}} &= e.e^{2(z+z^2+z^3+\cdots)} \\ &= e\left(1 + 2\frac{z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots}{1!} + 2(z + z^2 + \cdots)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{4}{3}(z + z^2 + z^3 + \cdots)^3 + \frac{2}{3}(z + z^2 + \cdots)^4 + \cdots \right) \\ &= e\left(1 + 2z + 4z^2 + \frac{22}{3}z^3 + \frac{38}{3}z^4 + z^5\varphi(z)\right), \end{aligned}$$

където $\varphi(z)$ е холоморфна в $z = 0$ функция. Следователно

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z^4} \left[3e^{\frac{1+z}{1-z}} - e(3 + 6z + 12z^2 + 22z^3) \right] = \lim_{z \to 0} e(38 + 3z\varphi(z)) = 38e.$$

б) $\log_0^2(1-z) = \left[-\left(z + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} + \cdots\right)\right]^2 = z^2 + z^3 + \dfrac{11}{12}z^4 + z^5\varphi(z)$, където $\varphi(z)$ е холоморфна в $z=0$ функция. Оттук получаваме

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z^4}\left(\log_0^2(1-z) - z^2 - z^3\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{11}{12} + z\varphi(z)\right) = \frac{11}{12}.$$

8.11. Да се намери лорановото развитие на функцията:

а) $\dfrac{1}{z-2}$ около $z=0$ и $z=\infty$;

б) $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$, $0<|a|<|b|$, в околност на $z=0$, $z=a$, $z=\infty$ и във венеца $|a|<|z|<|b|$;

в) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ в околност на $z=2$ и във венеца $1<|z|<2$;

г) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ в околност на $z=i$ и $z=\infty$;

д) $e^{\frac{1}{1-z}}$ в околност на $z=1$ и $z=\infty$;

е) $z\sin\dfrac{1}{z-1}$ в околност на $z=1$;

ж) $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$ около $z=2$;

з) $e^{z+\frac{1}{z}}$ в областта $0<|z|<\infty$;

и) $\sin\dfrac{z}{1-z}$ около $z=1$ и $z=\infty$;

к) $\log_0\dfrac{z-a}{z-b}$ около $z=\infty$;

л) $\dfrac{1}{z^3(z^6+1)^2(z-1)}$ във венеца $\sqrt{3}<|z+i|<2$.

Решение. а) Като използваме формулата за геометричната прогресия $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, получаваме:

а$_1$) Развитие около $z=0$:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2\,(1-z/2)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}, \quad \text{сходящ при } |z|<2.$$

а$_2$) Развитие около $z=\infty$:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\,(1-2/z)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad \text{сходящ при } |z|>2.$$

б) Получаваме съответно:

б$_1$) Развитие около $z = 0$:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b-z} - \frac{1}{a-z}\right)$$
$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b\left(1-\dfrac{z}{b}\right)} - \frac{1}{a\left(1-\dfrac{z}{a}\right)}\right)$$
$$= \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}\right) = \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}}\right)z^n.$$

б$_2$) Развитие около $z = a$:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{z-a+a-b} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{a-b}\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$
$$= \frac{1}{a-b}\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^n} = \frac{1}{a-b}\frac{1}{z-a} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+2}}.$$

б$_3$) Развитие около $z = \infty$:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$
$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z\left(1-\dfrac{a}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\dfrac{b}{z}\right)}\right)$$
$$= \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{z^{n+1}}\right) = \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{z^{n+1}}.$$

б$_4$) Развитие в $|a| < |z| < |b|$:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{b-z}\right)$$
$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z\left(1-\dfrac{a}{z}\right)} + \frac{1}{b\left(1-\dfrac{z}{b}\right)}\right)$$
$$= \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{z^{n+1}} + \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^{n+1}}.$$

в) Разлагаме в елементарни дроби:

$$\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} + \frac{i}{z-i} - \frac{i}{z+i}.$$

Тогава:

в$_1$) Развитие около $z=2$:

$$\begin{aligned}
\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} &= \frac{1}{z-2} + \frac{i}{z-2-i+2} - \frac{i}{z-2+i+2} \\
&= \frac{1}{z-2} + \frac{i}{(2-i)\left(1-\dfrac{z-2}{i-2}\right)} - \frac{i}{(2+i)\left(1+\dfrac{z-2}{2+i}\right)} \\
&= \frac{1}{z-2} - i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{(i-2)^{n+1}} - i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{(i+2)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{z-2} - i\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n\left(\frac{1}{(i-2)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(i+2)^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Редът е сходящ при $|z-2|<\sqrt{5}$ — разстоянието от 2 до $\pm i$.

в$_2$) Развитие във венеца $1<|z|<2$. Функцията $\dfrac{1}{z-2}$ е холоморфна в $|z|<2$ и се развива по степените на z, а $\dfrac{1}{z-i}$ и $\dfrac{1}{z+i}$ са холоморфни при $|z|>1$ и се развиват по степените на $\dfrac{1}{z}$. Така получаваме

$$\begin{aligned}
\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)} &= \frac{1}{-2\left(1-\dfrac{z}{2}\right)} + \frac{i}{z\left(1-\dfrac{i}{z}\right)} - \frac{i}{z\left(1+\dfrac{i}{z}\right)} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n-(-i)^n}{z^{n+1}} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+2}}.
\end{aligned}$$

г) Последователно получаваме:

г$_1$) Развитие около $z=i$. Имаме

$$\frac{1}{(z+i)^2} = -\left(\frac{1}{z+i}\right)' = -\left(\frac{1}{z-i+2i}\right)' = -\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-i\frac{z-i}{2}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n(z-i)^n}{2^n}\right)' = -\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ni^n(z-i)^{n-1}}{2^n}$$
$$= -\frac{1}{4} - \frac{i(z-i)}{4} - \frac{1}{2i}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{ni^n(z-i)^{n-1}}{2^n}.$$

Следователно

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$$
$$= -\frac{1}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z-i)} - \frac{1}{2i}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{ni^n(z-i)^{n-3}}{2^n}$$
$$= -\frac{1}{4(z-i)^2} - \frac{i}{4(z-i)} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)i^n(z-i)^n}{2^{n+4}}.$$

г$_2$) Развитие около $z=\infty$. Имаме

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+2}},$$

откъдето

$$\left(\frac{1}{z^2+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2n-2)}{z^{2n+3}}.$$

Окончателно получаваме

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{-1}{2z}\left(\frac{1}{z^2+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{z^{2n+2}}.$$

д) Имаме:

д$_1$) Развитие около $z=1$:

$$e^{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n}.$$

д$_2$) Развитие около $z=\infty$:

$$e^{\frac{1}{1-z}} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots$$

Тук $a_0 = \lim\limits_{z\to\infty} e^{\frac{1}{1-z}} = 1$ и

$$a_1 = \lim_{z\to\infty} z\left(e^{\frac{1}{1-z}} - 1\right)$$

$$= \lim_{z\to\infty} z\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2!(1-z)^2} + \cdots + \frac{1}{n!(1-z)^n} + \cdots\right) = -1.$$

Нека сега $n \geq 2$. По формулата на Коши за тейлъровите коефициенти имаме

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R>1} e^{\frac{1}{1-z}} z^{n-1}\, dz.$$

Нека $t = \dfrac{1}{1-z}$. Тогава $z = \dfrac{t-1}{t}$, $dz = \dfrac{dt}{t^2}$ и $|z| = R$ се изобразява в окръжността $C : \left|t - \dfrac{1}{1-R^2}\right| = \dfrac{R}{R^2-1}$, описана в посоката на движение на часовниковата стрелка. Следователно

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} e^t \frac{(t-1)^{n-1}}{t^{n+1}}\, dt = -\frac{1}{2\pi i}\int_C e^t \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^k t^{n-1-k}}{t^{n+1}}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^t}{t^{k+2}}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{(k+1)!}.$$

е) От формулата $\sin u = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$ получаваме

$$z\sin\frac{1}{z-1} = (z-1+1)\sin\frac{1}{z-1}$$

$$= (z-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2n+1}}.$$

ж) Имаме

$$\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2} = \cos\frac{(z-2)^2-4}{(z-2)^2} = \cos\left(1 - \frac{4}{(z-2)^2}\right)$$

$$= \cos 1\cos\frac{4}{(z-2)^2} + \sin 1\sin\frac{4}{(z-2)^2}$$

$$= \cos 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{2}{z-2}\right)^{4n} + \sin 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{2}{z-2}\right)^{4n+2}.$$

з) Имаме

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{1}{(n-k)! z^{n-k}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^{2k-n}}{k!(n-k)!} \right).$$

Редът е абсолютно и равномерно сходящ. Тогава можем да подредим членовете му по положителни и отрицателни степени на z. Ако $s = 2k-n \geq 0$, то коефициентът пред z^s е $\sum \dfrac{1}{k!(n-k)!}$, където сумирането е извършено по всички $n \geq 0$ и $0 \leq k \leq n$, такива че $2k - n = s$, т. е. $n - k = k - s \geq 0$. Следователно този коефициент е

$$c_s = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{k!(k-s)!} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+s)!} \frac{1}{\nu!},$$

където сме положили $\nu = k - s \geq 0$.

Аналогично, ако $2k - n = -s \leq 0$, за коефициента c_{-s} получаваме $c_{-s} = \sum \dfrac{1}{k!(n-k)!}$, където сумирането е извършено по всички k и n, такива че $0 \leq n$, $0 \leq k \leq n$, $2k - n = -s$, т. е. $k + s = n - k \geq 0$. Така получаваме

$$c_{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+s)!}.$$

Окончателно

$$e^{z+\frac{1}{z}} = \sum_{s=0}^{\infty} c_s z^s + \sum_{s=0}^{\infty} c_{-s} z^{-s}, \text{ където } c_s = c_{-s} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+s)!\nu!}.$$

и) Последователно получаваме:

$и_1$) Развитие около $z = 1$. Имаме:

$$\sin \frac{z}{1-z} = -\sin\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = -\sin 1 \cos \frac{1}{z-1} - \cos 1 \sin \frac{1}{z-1}$$

$$= -\sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-1)^{2n}} - \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}.$$

$и_2$) Развитие около $z = \infty$:

1) Нека $u = 1/z$. Имаме

$$\sin\frac{z}{1-z} = -\sin\frac{z}{z-1} = -\sin\frac{1}{1-u} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(1-u)^{2n+1}}.$$

2) По-нататък

$$\frac{1}{(1-u)^k} = \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{1}{1-u}\right)^{(k-1)} = \frac{1}{(k-1)!}\left(\sum_{l=0}^{\infty}u^l\right)^{(k-1)}$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{l=0}^{\infty}(l+k-1)(l+k-2)\dots(l+1)u^l = \sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+k-1}{k-1}u^l.$$

3) Като заместим резултата от 2) в 1), получаваме

$$-\sin\frac{1}{1-u} = -\left(\sum_{l=0}^{\infty}u^l + \sum_{l=0}^{\infty}-\frac{1}{3!}\binom{l+2}{2}u^l + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{5!}\binom{l+4}{4}u^l + \cdots\right.$$
$$\left. + \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\binom{l+2n}{2n}u^l + \cdots\right)$$
$$= -\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\binom{l+2n}{2n}\right]u^l.$$

Следователно

$$\sin\frac{z}{1-z} = -\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a_l}{z^l},\ \text{където } a_l = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\binom{l+2n}{2n}.$$

к) Тъй като

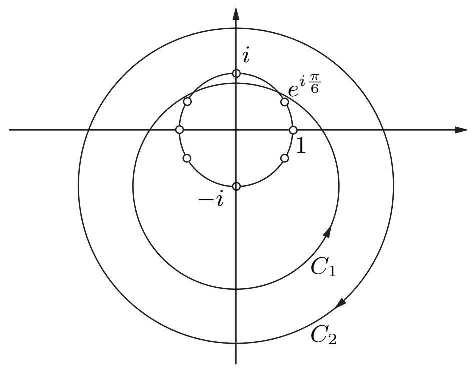
$$\left(\log_0\frac{z-a}{z-b}\right)' = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} = \frac{1}{z\left(1-\dfrac{a}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\dfrac{b}{z}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n-b^n}{z^{n+1}},$$

то

$$\log_0\frac{z-a}{z-b} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{nz^n} + \mathrm{const}\,.$$

Ако положим $z = \infty$, получаваме, че константата е нула.

л) Решението ще изложим на няколко стъпки:



Фиг. 8.2

1) Тъй като $z = -i$ е двукратен полюс, то

$$f(z) = \frac{b_2}{(z+i)^2} + \frac{b_1}{z+i} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+i)^n,$$

където, съгласно формулите за коефициентите на лорановия ред (вж. фиг. 8.2),

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{dz}{z^3(z^6+1)^2(z-1)(z+i)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(z+i)^{n-1}\, dz}{z^3(z^6+1)^2(z-1)}, \quad n = 1, 2.$$

Тук C_1 е окръжност $|z+i| = r$, $\sqrt{3} < r < 2$, така че вън от нея остава само полюсът $z = i$.

Нека $C_2 : |z+i| = R$ е произволна окръжност, ориентирана по посоката на движение на часовниковата стрелка, и $R > 2$. Тогава интегралите

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{dz}{z^3(z^6+1)^2(z-1)(z+i)^{n+1}} \text{ и } \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{(z+i)^{n-1}\, dz}{z^3(z^6+1)^2(z-1)},$$

$n = 1, 2$, не зависят от R и елементарна оценка показва, че те клонят към нула при $R \to \infty$. Следователно са равни на нула. Така получаваме

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} \right), \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} \right)$$

със същите подинтегрални функции.

2) Точката $z = i$ е двукратна нула на $(z^6 + 1)^2$. Следователно $(z^6 + 1)^2 = (z - i)^2\varphi(z)$, където $\varphi(z) = c_0 + c_1(z - i) + \cdots$ е полином от десета степен, като $c_0 = \varphi(i)$, $c_1 = \varphi'(i)$. От основната формула на Коши за производните, отчитайки ориентировката, намираме

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1\cup C_2}\frac{dz}{(z-i)^2\varphi(z)(z^4-z^3)(z+i)^{n+1}} \\ &= -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\varphi(z)(z^4-z^3)(z+i)^{n+1}}\right)\Bigg|_{z=i}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1\cup C_2}\frac{(z+i)^{n-1}\,dz}{(z-i)^2\varphi(z)(z^4-z^3)} \\ &= -\frac{d}{dz}\left(\frac{(z+i)^{n-1}}{\varphi(z)(z^4-z^3)}\right)\Bigg|_{z=i}, \quad n = 1, 2. \end{aligned}$$

3) Като диференцираме двете страни на $(z^6 + 1)^2 = c_0(z - i)^2 + c_1(z - i)^3 + \cdots$ съответно два и три пъти, получаваме

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2!}\,\frac{d^2}{dz^2}(z^6+1)^2\Bigg|_{z=i} = -36 = \varphi(i), \\ c_1 &= \frac{1}{3!}\,\frac{d^3}{dz^3}(z^6+1)^2\Bigg|_{z=i} = 180i = \varphi'(i). \end{aligned}$$

Като извършим пресмятанията във формулите за a_n и b_n от 2) и заместим получените стойности на $\varphi(i)$ и $\varphi'(i)$, след известни преобразования стигаме до

$$a_n = -\frac{n+19+i(n+17)}{36(2i)^{n+3}}, \quad b_1 = \frac{9+8i}{72}, \quad b_2 = \frac{-15+17i}{72},$$

$$f(z) = \frac{-15+17i}{72}\frac{1}{(z+i)^2} + \frac{9+8i}{72}\frac{1}{z+i} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+19+i(n+17)}{36(2i)^{n+3}}(z+i)^n.$$

8.12. Да се намерят особените точки на функцията $f(z)$ и да се определи техният вид:

а) $f(z) = \dfrac{z^4}{1+z^4}$; **б)** $f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, където $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ са взаимно прости полиноми от точни степени n и m съответно;

в) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$; **г)** $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$; **д)** $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z-2\pi i}$;

е) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$; **ж)** $f(z) = \dfrac{z^2-1}{\sin^3 \pi z}$; **з)** $f(z) = \dfrac{1}{z \sin z}$.

Решение. а) Нулите на знаменателя $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$, са прости и не са нули на числителя. Следователно те са прости полюси за $f(z)$. Други особени точки в $\mathbb{C}$ няма. Границата $\lim\limits_{z\to\infty} z^4/(z^4+1) = 1$ съществува, следователно ∞ е отстранима особеност.

б) Всяка k-кратна нула на $Q_m(z)$ не е нула на $P_n(z)$, следователно е k-кратен полюс на $f(z)$.

Ако $n \leq m$, границата $\lim\limits_{z\to\infty} P_n(z)/Q_m(z)$ съществува, следователно $z = \infty$ е отстранима особена точка. При това, ако $n < m$, тази граница е нула и в околност на ∞ функцията $f(z)$ може да се представи във вида $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{z^{n-m}}$, където $\varphi(z)$ е рационална функция с $\varphi(\infty) \neq 0$. В този случай казваме, че ∞ е $(m-n)$-*кратна нула* на $f(z)$.

Ако $n > m$, функцията $f(z)$ се представя във вида $f(z) = S_{n-m}(z) + R(z)/Q_m(z)$, където S_{n-m} е полином от степен точно $n-m$, а степента на полинома R е строго по-малка от степента на Q_m. Следователно $z = \infty$ е отстранима особеност за $R(z)/Q_m(z)$, а това означава, че е полюс от кратност $n - m$ за f. Други особености няма.

в) Нулите на знаменателя $\pm i$ са прости полюси, а $z = \infty$ е изолирана особеност. Тъй като $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{y\to\infty} f(iy) = 0$, то $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ не съществува, следователно $z = \infty$ е съществена особена точка.

г) Нулите $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, на знаменателя са прости. При $k \neq 0$ z_k не е особеност за $1/z$, следователно е прост полюс за $f(z)$. Ако $k = 0$, то $\dfrac{1}{e^z-1} = \dfrac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots$, следователно $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$, което означава, че $z = 0$ е отстранима особеност на f.

Точката $z = \infty$ е точка на сгъстяване на полюси и е особеност, но неизолирана. За нея е в сила теоремата на Сохоцки — Казорати — Вайерщрас (вж. зад. 8.16).

д) *Отг.* $z_k = 2k\pi i$, $k \neq 1$, $k \in \mathbb{Z}$, са прости полюси, $z_1 = 2\pi i$ е отстранима особеност, $z = \infty$ е неизолирана особеност.

е) Особените точки трябва да се търсят сред $z = \infty$ и особените точки на $\dfrac{z}{1-z}$. Границата $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = e^{-1}$ съществува, значи $z = \infty$ е отстранима особеност.

В $z = 1$ имаме

$$e^{\frac{z}{1-z}} = e^{-1}e^{\frac{1}{1-z}} = e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(1-z)^n},$$

откъдето получаваме, че $z = 1$ е съществена особена точка. Други особености $z/(1-z)$ няма, следователно няма и f.

ж) Нулите $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, на знаменателя са трикратни. При $k \neq \pm 1$ те са трикратни полюси на f, тъй като не са нули на числителя. Точките $z = \pm 1$ са прости нули на числителя, следователно са $3 - 1 = 2$-кратни полюси за f.

Точката $z = \infty$ не е изолирана особеност.

з) *Отг.* $z = 0$ е двукратен полюс, $z_k = k\pi$, $k \neq 0$, са еднократни полюси, $z = \infty$ е точка на сгъстяване на полюси (неизолирана особеност).

8.13. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в пробита околност на точката z_0. Да се докаже, че ако:

а) $\lim\limits_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$, то z_0 е отстранима особена точка на f;

б) съществува естествено число $m \geq 1$, такова че $\lim\limits_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z) \neq 0$, но $\lim\limits_{z\to z_0}(z - z_0)^{m+1}f(z) = 0$, то z_0 е m-кратен полюс на f.

Решение. а) Функцията $g(z) = (z - z_0)f(z)$ има отстранима особеност в точката z_0 и $g(z_0) = 0$. Тогава $g(z) = (z - z_0)g_1(z)$, където $g_1(z)$ е холоморфна в z_0. Тъй като $g_1(z) = f(z)$ за $z \neq z_0$, то z_0 е отстранима особена точка на f.

б) *Упътване.* Приложете а) към функцията $(z - z_0)^m f(z)$.

8.14. Нека $f(z)$ е холоморфна във венеца $V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. Да се определи видът на особеността на $f(z)$ в точката $z = 0$, ако:

а) $|f(z)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{|z|}}$, $z \in V$; **б)** $|f(z)| \leq \dfrac{1}{|z|^{5/2}}$, $z \in V$;

в) $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ и $f \not\equiv 0$.

Решение. а) Тъй като $\lim\limits_{z\to 0}|zf(z)| \leq \lim\limits_{z\to 0}\sqrt{|z|} = 0$, от зад. 8.13 а) следва, че $z = 0$ е отстранима особена точка.

б) Тъй като $\lim\limits_{z\to 0} z^3 f(z) = 0$, то $z = 0$ е или отстранима особена точка, или е полюс от ред най-много 2.

в) Тъй като $f \not\equiv 0$, от теоремата за единственост (вж. § 10) следва, че $z = 0$ не е отстранима. Тя не може да бъде полюс, защото $1/n \to 0$ и $f(1/n) = 0$. Следователно е съществена особена точка.

8.15. Да се докаже, че ако z_0 е полюс на f, то z_0 е съществена особена точка на функцията e^f.

Решение. Нека z_0 е полюс от ред m. Тогава $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, където $\varphi(z)$ е холоморфна и различна от нула в околност на z_0. Без ограничение можем да считаме, че $\operatorname{Re}\varphi(z_0) > 0$. Нека $l_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + re^{i\frac{2\pi}{m}}\}$ и $l_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + re^{i\frac{\pi}{m}}\}$, $r > 0$. Тогава

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in l_1}} \operatorname{Re} f(z) = \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{Re}\varphi(z_0 + re^{i\frac{2\pi}{m}})}{r^m} = +\infty, \text{ докато } \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in l_2}} \operatorname{Re} f(z) = -\infty.$$

Следователно не съществува $\lim\limits_{z\to z_0} \left|e^{f(z)}\right| = \lim\limits_{z\to z_0} e^{\operatorname{Re} f(z)}$ и значи z_0 е съществена особена точка на e^f.

8.16. Да се докаже, че теоремата на Сохоцки — Казорати — Вайерщрас остава в сила, ако особената точка е точка на сгъстяване на полюси и функцията няма други особености в околност на тази точка.

Решение. Нека $f(z)$ е холоморфна в областта $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} \setminus \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, като z_n са полюси на f и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Ще докажем, че множеството $\{w : w = f(z),\ z \in D\}$ е навсякъде гъсто в $\mathbb{C}$. Да допуснем противното, т. е. съществуват $\delta > 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, такива че за всяко $z \in D$ е изпълнено $|f(z) - \alpha| > \delta$. Нека $g(z) = \dfrac{1}{f(z)-\alpha}$, $z \in D$. Тъй като z_n, $n = 1, 2, \ldots$, са полюси на $f(z) - \alpha$, то те са нули на $g(z)$, а от $|g(z)| < 1/\delta$, $z \in D$, и теоремата на Риман следва, че z_0 е отстранима особена точка на g. Следователно $g(z)$ е холоморфна в околност на z_0. При това, тъй като z_0 е точка на сгъстяване на нули на $g(z)$, от теоремата за единственост следва, че $g(z) \equiv 0$, т. е. $f(z) \equiv \infty$, $z \in D$. Това доказва всичко.

8.17. Нека $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ е област и $f(z)$ е функция, холоморфна и еднолистна в $D \setminus M$, където $M \subset D$ е множество, всички точки на което са изолирани. Да се докаже, че:

а) никое $z \in M$ не е съществена особена точка на f;

б) ако $z_0 \in M$ е полюс на f, то той е единствен и е от ред 1;

в) ако всяко $z \in M$ е отстранима особена точка на f, то f е еднолистна в D.

Решение. а) Нека $z \in M$. Съществува пробита околност U на z, такава че $U \cap M = \emptyset$, и нека $D^* = D \setminus (M \cup U)$. От принципа за запазване на областите[1] следва, че $f(U)$ и $f(D^*)$ са области. Освен това, тъй като f е еднолистна, то $f(U) \cap f(D^*) = \emptyset$. Следователно $f(U)$ не е навсякъде гъсто в $\overline{\mathbb{C}}$. Сега от теоремата на Сохоцки — Казорати — Вайерщрас получаваме, че z не е съществена особена точка на f.

б) Нека z_0 е полюс от ред $n \geq 2$. Функцията $g(z) = 1/f(z)$ също е еднолистна в $D \setminus M$ и в z_0 има нула от ред $n \geq 2$. Това означава, че $g'(z_0) = 0$, което противоречи на еднолистността на $g(z)$. Следователно $n = 1$. Пак от еднолистността на f следва, че тя има най-много един полюс.

в) Да допуснем, че съществуват точки $a, b \in M$, такива че $f(a) = f(b) = c$. Нека A и B са непресичащи се околности съответно на a и b и $A \setminus a \subset D \setminus M$, $B \setminus b \subset D \setminus M$. Тогава $f(A) \cap f(B)$ е околност на c и съществуват $d \in f(A) \cap f(B)$, $d \neq c$, $a_1 \in A \setminus a$, $b_1 \in B \setminus b$, за които $f(a_1) = d = f(b_1)$. Това противоречи на еднолистността на f в $D \setminus M$. Аналогично се показва, че не е възможно $f(a) = f(b)$ за някои $a \in M$ и $b \in D \setminus M$.

8.18. Да се докаже, че ако $f(z)$ е еднолистна цяла функция, то $f(z)$ е цяла линейна функция.

Упътване. Приложете зад. 8.17 за $D = \mathbb{C}$, $M = \{0\}$ и функцията $f(1/z)$. След това се позовете на теоремата на Лиувил (вж. зад. 7.23 в)).

8.19. Да се докаже, че ако $f(z)$ е еднолистна в $\mathbb{C}$ и няма други особености освен полюси, то $f(z)$ е дробно-линейна функция.

Решение. От зад. 8.17 следва, че $f(z)$ има единствен и то прост полюс $z_0 \in \mathbb{C}$. Нека $g(z)$ е характеристичната ѝ функция в лорановото развитие около z_0. Тогава $g(z) = \dfrac{a}{z - z_0}$, $a \in \mathbb{C}$, ако $z_0 \neq \infty$, и $g(z) = az$, ако $z_0 = \infty$. Сега приложете теоремата на Лиувил към функцията $f(z) - g(z)$.

8.20. Да се докаже, че ако функцията $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ е еднолистна и холоморфна, то или $f(z) = az$, или $f(z) = a/z$, $a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$.

Решение. Съгласно зад. 8.17 има две възможности:

1) Точката $z = 0$ е отстранима особеност. Тогава f е еднолистна цяла функция и имаме (зад. 8.18) $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{C}$. Тъй като $f(z) \neq 0$ за $z \neq 0$, то $b = 0$.

[1]**Принцип за запазване на областите:** Ако $D \subset \mathbb{C}$ е област и $f \not\equiv \text{const}$ е холоморфна в D функция, то $f(D)$ е също област.

2) Точката $z = 0$ е прост полюс. Тогава тя е отстранима за функцията $1/f(z)$ и от 1) следва $f(z) = a/z$, $a \neq 0$.

8.21. Нека $f(z)$ няма други особености в $\mathbb{C}$ освен полюси, $\gamma \subset \mathbb{C}$ е крива и $f(z) = \overline{z}$, $z \in \gamma$. Да се докаже, че γ е част от окръжност или права.

Решение. Тъй като $f\left(\overline{f(\overline{z})}\right) = z$ за $z \in \overline{\gamma}$, то от теоремата за единственост следва, че $f\left(\overline{f(\overline{z})}\right) = z$, $z \in \mathbb{C}$. Следователно $f(z)$ е еднолистна и значи (зад. 8.19) е дробно-линейна функция. Нека z, z_1, z_2, z_3 са различни точки от γ. Тъй като дробно-линейната функция запазва двойното отношение на всеки четири точки (зад. 3.17), то $(z, z_1, z_2, z_3) = (f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}$, т. е. $(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$. Следователно (зад. 3.18) z принадлежи на окръжността (правата), определена от точките z_1, z_2, z_3. С това задачата е решена.

§ 9. Теорема за резидуумите. Приложения

Нека $a \in \mathbb{C}$ е изолирана особеност на f и $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ е лорановото ѝ развитие в пробитата околност $0 < |z-a| < R$, където $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C(a,r)} \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$, $n \in \mathbb{Z}$, $r < R$. *Резидуум* на f в точката a наричаме коефициента $a_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C(a,r)} f(z)\,dz$ и бележим $\operatorname{Res}(f,a) := a_{-1}$. Ясно е, че ако $f(z)$ е холоморфна в a, т. е. a е отстранима особеност, то $\operatorname{Res}(f,a) = 0$. За пресмятане на резидуумите най-често се използват следните правила:

1. Ако a е прост полюс, то $\operatorname{Res}(f,a) = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$.
2. Ако $f = \varphi/\psi$, където φ и ψ са функции, холоморфни в околност на a, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, то a е прост полюс на f и $\operatorname{Res}(f,a) = \varphi(a)/\psi'(a)$.
3. Ако a е m-кратен полюс на f, то
$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)}.$$
4. Ако $f = \varphi/\psi$, където φ и ψ са функции, холоморфни в околност на a, $\varphi(a) \neq 0$ и a е m-кратна нула на ψ, т. е. $\psi(z) = (z-a)^m\psi_1(z)$, $\psi_1(a) \neq 0$, то a е m-кратен полюс на f и $\operatorname{Res}(f,a) = c_{m-1}$, където c_{m-1} е коефициентът пред $(z-a)^{m-1}$ в тейлъровото развитие около a на функцията $\varphi(z)/\psi_1(z)$. За пресмятането на този коефициент използваме тейлъровите развития на функциите φ и ψ.

Ако $f(z)$ е холоморфна в околност $|z| > R$ на ∞, която може да бъде изолирана особеност на f, и $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ е лорановото ѝ развитие около ∞, то дефинираме $\operatorname{Res}(f,\infty) = -a_{-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^-(0,r)} f(z)\,dz$, $r > R$. Ясно е, че ако f е холоморфна в ∞, то може $\operatorname{Res}(f,\infty) \neq 0$ (например $f(z) = 1/z$). В този случай $\operatorname{Res}(f,\infty) = -\lim\limits_{z\to\infty} z(f(z) - f(\infty))$.

Естествено обобщение на теоремата на Коши е следната

Теорема за резидуумите. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена крайно свързана област и f е холоморфна в околност на $\overline{D}$ с изключение на краен брой особени точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в D. Тогава
$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k).$$

Тази теорема е важна с това, че свежда пресмятането на един интеграл до пресмятане на резидууми, което често става чрез елементарни методи като диференциране и намиране на граница. От нея в частност следва, че ако f е холоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ с изключение на изолирани особени точки (те очевидно са краен брой) $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$, то

$$\operatorname{Res}(f,\infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k) = 0.$$

Пресмятане на контурни интеграли

Да се пресметнат интегралите:

9.1. $I = \displaystyle\int_C \frac{dz}{z^4+1}$, където $C = C(1,1)$.

Решение. Особените точки на подинтегралната функция са корените на уравнението $z^4 = -1$, т.е. $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$, $k = 0,1,2,3$, като всичките са прости полюси. От тях вътре в кръга, ограден от C, са $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ и $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Тогава

$$\operatorname{Res}(z_k) = \left.\frac{1}{(z^4+1)'}\right|_{z=z_k} = \frac{1}{4z_k^3} = -\frac{z_k}{4}$$

и

$$I = 2\pi i(\operatorname{Res}(z_0) + \operatorname{Res}(z_3)) = -\frac{2\pi i}{4}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{7\pi}{4}}\right) = -\frac{2\pi i}{4}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$= -\frac{2\pi i}{4} 2\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}.$$

9.2. $I = \displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, където $C = C(1+i, \sqrt{2})$.

Решение. Особените точки на подинтегралната функция са $z = 1$ и $z = \pm i$, като 1 е двукратен полюс, а $\pm i$ са прости полюси. Вътре в кръга, заграден от C, са 1 и i. Имаме

$$\operatorname{Res}(i) = \left.\frac{1/(z-1)^2}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \operatorname{Res}(1) = \left.\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'\right|_{z=1} = -\frac{1}{2}.$$

Тогава $I = 2\pi i(\operatorname{Res}(i) + \operatorname{Res}(1)) = -\pi i/2$.

9.3. $I = \displaystyle\int_C \frac{z}{(z^2-1)^2(z^2+1)}\,dz$, където $C = C(1,\sqrt{3})$.

Отг. $I = \pi i/4$.

9.4. $I = \displaystyle\int_C \frac{5z^6+4}{2z^7+1}\,dz$, където $C = C(0,1)$.

Решение. Функцията $f(z) = \dfrac{5z^6+4}{2z^7+1}$ има краен брой особени точки в $\mathbb{C}$, а именно корените на уравнението $z^7 = -1/2$, и всичките са в единичния кръг. Освен това f е холоморфна в ∞, като $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Тогава $I = -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty) = 2\pi i \lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 5\pi i$.

9.5. $I = \displaystyle\int_C \frac{dz}{z^3(z^6+1)^2(z-1)}$, където:

а) $C = C(0,1/2)$; **б)** $C = C(e^{i\frac{\pi}{3}}, R)$, $1 < R < \sqrt{2}$; **в)** $C = C(0,2)$.

Решение. Особените точки на функцията $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z^6+1)^2(z-1)}$ са: трикратен полюс в $z=0$, двукратни полюси в $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}}$, $k = 0,1,\ldots,5$, и прост полюс в $z=1$.

а) $I = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = 2\pi i \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(z^3 f(z))'' = \pi i \left(\frac{1}{(z^6+1)^2(z-1)}\right)''\Big|_{z=0} = -2\pi i$.

б) $I = 2\pi i(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,e^{i\frac{\pi}{6}}) + \operatorname{Res}(f,i))$. От а) имаме $\operatorname{Res}(f,0) = -1$, а $\operatorname{Res}(f,1) = \lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z) = 1/4$. За пресмятането на останалите резидууми ще използваме тейлъровото развитие на функцията $\varphi(z) = z^3(z^6+1)^2(z-1)$ около точките z_k ($k = 0,\ldots,5$). Тъй като z_k е двукратна нула на φ, то $\varphi(z) = (z-z_k)^2(a_2 + a_3(z-z_k) + \cdots)$. Имаме

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-z_k)^2}g(z), \quad \text{където} \quad g(z) = \frac{1}{a_2 + a_3(z-z_k) + \cdots}$$

е холоморфна в z_k. Тогава, ако $g(z) = c_0 + c_1(z-z_k) + \cdots$ е тейлъровото ѝ развитие около z_k, то

$$\operatorname{Res}(f,z_k) = c_1 = g'(z_k) = \left(\frac{1}{a_2 + a_3(z-z_k) + \cdots}\right)'\Big|_{z=z_k} = -\frac{a_3}{a_2^2},$$

където $a_2 = \dfrac{1}{2}\varphi''(z_k)$, $a_3 = \dfrac{1}{3!}\varphi'''(z_k)$. Като вземем предвид, че $z_k^6 = -1$, лесно пресмятаме $a_2 = 36(z_k^2 - z_k)$ и $a_3 = 324z_k - 288$. Тогава $\operatorname{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{6}}) = \dfrac{2\sqrt{3} - 5 + 9i(2+\sqrt{3})}{72i}$ и $\operatorname{Res}(f,i) = \dfrac{8-9i}{72i}$. Следователно

$$I = 2\pi i\left(-1 + \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{3} - 5 + 9i(2+\sqrt{3})}{72i} + \frac{8-9i}{72i}\right)$$

$$= \frac{\pi(3+2\sqrt{3})}{36} + i\frac{\pi(\sqrt{3}-5)}{4}.$$

в) $I = -2\pi i \operatorname{Res}(f,\infty) = 2\pi i \lim_{z\to\infty} zf(z) = 0.$

9.6. $I = \displaystyle\int_C \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}\,dz$, където $C = C(0,R)$, $\sqrt[3]{n} < R < \sqrt[3]{n+1}$.

Решение. Подинтегралната функция има прости полюси в точките z, за които $z^3 = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Вътре в кръга $K(0,R)$, $\sqrt[3]{n} < R < \sqrt[3]{n+1}$, са 0, $\pm\sqrt[3]{k}$, $\pm e^{i\frac{2\pi}{3}}\sqrt[3]{k}$, $\pm e^{i\frac{4\pi}{3}}\sqrt[3]{k}$, $k = 1,2,\ldots,n$. Нека $a \neq 0$ и $e^{2\pi i a^3} = 1$. Тогава

$$\operatorname{Res}(a) = \left.\frac{z^2}{(e^{2\pi i z^3}-1)'}\right|_{z=a} = \frac{1}{6\pi i}.$$

Също така

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^3}{z^3\left(2\pi i + \dfrac{(2\pi i)^2 z^3}{2!} + \cdots\right)} = \frac{1}{2\pi i}.$$

Следователно $I = 2\pi i\left(\dfrac{1}{2\pi i} + 6n\dfrac{1}{6\pi i}\right) = 2n+1.$

9.7. $I = \displaystyle\int_C \frac{z}{e^{2\pi i z^3}-1}\,dz$, където $C = C(0,R)$, $\sqrt[3]{n} < R < \sqrt[3]{n+1}$.

Упътване. Пресметнете $\operatorname{Res}(0) = 0$, $\operatorname{Res}(a) = \dfrac{1}{6\pi i a}$, $a^3 = k$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Като използвате формулите на Виет, получете, че $\sum\limits_{a^3=k}\operatorname{Res}(a) = 0$ за всяко $k \in \mathbb{Z}$.

Отг. 0.

9.8. $I = \displaystyle\int_C z^n \sin\frac{1}{z}\,dz$, където $C = C(0,R)$ и $n = 0,1,2,\ldots$

Отг. $I = \begin{cases} (-1)^k 2\pi i/(2k+1)!, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$, $k = 0,1,2,\ldots$

9.9. Да се докаже, че ако ∞ е изолирана особена точка на $f(z)$, то $\operatorname{Res}(f,\infty) = -\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z^2}f\left(\dfrac{1}{z}\right),0\right)$.

Решение. Нека $f(z)$ е холоморфна за $|z| > R$ и $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ е лорановото ѝ развитие около ∞. Имаме $\operatorname{Res}(f,\infty) = -a_{-1}$. От друга страна, функцията $\dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ е холоморфна в $0 < |z| < \dfrac{1}{R}$ и лорановото ѝ развитие около 0 е $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{a_n}{z^{n+2}}$, като $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right), 0\right) = a_{-1}$.

9.10. $I = \displaystyle\int_C \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}\, dz$, където $C = C(0,2)$.

Решение. $I = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$, където $f(z) = \dfrac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}$. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{z^4}\frac{e^z}{1+z} = \frac{1}{z^4}\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots) \\ &= \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.\end{aligned}$$

Тогава $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right), 0\right) = a_3$. По метода на неопределените коефициенти пресмятаме $a_3 = -1/3$ и получаваме (зад. 9.9) $I = -\dfrac{2\pi i}{3}$.

9.11. $I = \displaystyle\int_C z \sin\frac{z}{z-1}\, dz$, където $C = C(0,2)$.

Решение. $I = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$, където $f(z) = z \sin\dfrac{z}{z-1}$. Тогава

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^3}\sin\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{и} \quad \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = a_2.$$

От друга страна,

$$\sin\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(1-z)^{2n+1}}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^k} &= \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(k-1)} \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=k-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+2) z^{n-k+1},\ k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Коефициентът пред z^2 в развитието на $\dfrac{1}{(1-z)^k}$ е $a_2^{(k)} = \dfrac{(k+1)!}{2(k-1)!}$. Така получаваме

$$a_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_2^{(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{(2n)!} = \cos 1 - \frac{1}{2}\sin 1.$$

9.12. $I = \displaystyle\int_C z^n \log\frac{z-1}{z-2}\,dz$, $n \in \mathbb{N}$, където $\log\dfrac{z-1}{z-2}$ е еднозначен клон на log в областта $\mathbb{C} \setminus [1,2]$ и

а) $C = C(0, 1/2)$; **б)** $C = C(0,3)$.

Решение. а) Тъй като функцията $f(z) = z^n \log\dfrac{z-1}{z-2}$ е холоморфна в $|z| < 1$, то от теоремата на Коши следва $I = 0$.

б) $I = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right), 0\right)$. Имаме $\dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{z^{n+2}} \log\dfrac{1-z}{1-2z}$, където $\log\dfrac{1-z}{1-2z}$ е еднозначен клон на log в областта $\mathbb{C} \setminus [1/2, 1]$ и значи е холоморфна функция за $|z| < 1/2$. За да намерим коефициента a_{n+1} в тейлъровото ѝ развитие пред z^{n+1}, ще използваме, че за $|z| < 1/2$ е в сила равенството

$$\log\frac{1-z}{1-2z} = \log_0(1-z) - \log_0(1-2z) + i2k\pi$$

за някое $k \in \mathbb{Z}$. Сега от

$$\log_0(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{и} \quad \log_0(1-2z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^n}{n}$$

следва $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$, независимо от стойността на k.

Така получаваме $I = \dfrac{2\pi i(2^{n+1}-1)}{n+1}$.

9.13. $I = \displaystyle\int_C \frac{dz}{\sqrt{z^2+z+1}}$, където $\sqrt{z^2+z+1} > 0$ за $z > 0$ и $C = C(0,2)$.

Решение. $I = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$, където $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z^2+z+1}}$. Функцията $f(z)$ е холоморфна в ∞ и $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Тогава

$$\operatorname{Res}(f,\infty) = -\lim_{z\to\infty} z f(z) = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} = -1.$$

Следователно $I = 2\pi i$.

9.14. $I = \int_C \sqrt{\dfrac{z}{z+1}}\, dz$, където $\sqrt{\dfrac{z}{z+1}} > 0$ за $z \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ и $C = C(0, 2)$.

Решение. $I = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right), 0\right)$, където $f(z) = \sqrt{\dfrac{z}{z+1}}$. Тогава $\dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{z^2\sqrt{z+1}}$, където $\sqrt{z+1}$ е еднозначен клон в областта $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$, като $\sqrt{x+1} > 0$ за $x > -1$. Тъй като $z = 0$ е двукратен полюс на тази функция, то

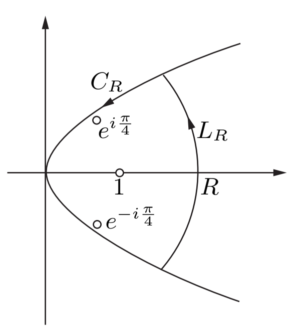
$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{z+1}}\right)'\Bigg|_{z=0} = -\frac{1}{2}.$$

Така $I = -\pi i$.

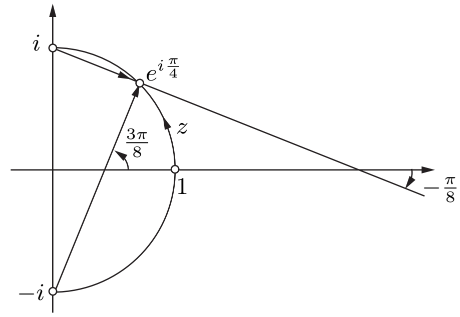
До същия резултат се достига и ако развием $\sqrt{\dfrac{z}{z+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{z}\right)^{-1/2}$ около $z = \infty$.

9.15. $I = \int_C \dfrac{dz}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$, където $\sqrt{z^2+1}\Big|_{z=1} = \sqrt{2} > 0$ и C е параболата $x = y^2$, описвана в посока на намаляване на y.

Решение. Тъй като $-i$ и i са точките на разклоняване на $\sqrt{z^2+1}$, то в областта $\mathbb{C} \setminus \{(-i\infty, -i] \cup [i, i\infty)\}$ може да се отдели еднозначен клон на тази функция. Условието $\sqrt{z^2+1}\Big|_{z=1} > 0$ определя един еднозначен клон. Нека Γ_R е контурът, състоящ се от дъгата L_R от окръжността $C(0, R)$, $R > 1$, отсечена от параболата C, и частта C_R от C, съдържаща се в $K(0, R)$ (фиг. 9.1). Нека $f(z) = \dfrac{1}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}$. Тъй като вътре в областта, заградена от Γ_R, функцията f има два прости полюса $e^{i\frac{\pi}{4}}$ и



Фиг. 9.1



Фиг. 9.2

$e^{-i\frac{\pi}{4}}$, то

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}(e^{i\frac{\pi}{4}}) + \operatorname{Res}(e^{-i\frac{\pi}{4}})\right)\\ &= 2\pi i\left(\left.\frac{1}{4z^3\sqrt{z^2+1}}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \left.\frac{1}{4z^3\sqrt{z^2+1}}\right|_{z=e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right).\end{aligned}$$

По условие $\sqrt{z^2+1} = \sqrt{|z^2+1|}e^{i\frac{\arg(z-i)+\arg(z+i)}{2}}$ е този еднозначен клон, за който $\arg(1-i) = -\pi/4$ и $\arg(1+i) = \pi/4$. За да пресметнем стойността на $\sqrt{z^2+1}$ при $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$, трябва да проследим как се изменят $\arg(z-i)$ и $\arg(z+i)$, когато z се движи по окръжността $C(0,1)$ от точката $z=1$ до точката $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ (фиг. 9.2). Тогава $\arg(z-i)$ се мени от $-\pi/4$ до $-\pi/8$, а $\arg(z+i)$ — от $\pi/4$ до $3\pi/8$. Получаваме $\arg(e^{i\frac{\pi}{4}} - i) = -\pi/8$, $\arg(e^{i\frac{\pi}{4}} + i) = 3\pi/8$ и $\left.\sqrt{z^2+1}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$. Аналогично пресмятаме $\left.\sqrt{z^2+1}\right|_{z=e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$. Следователно

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\frac{1}{4\sqrt[4]{2}}\left(e^{-i\frac{7\pi}{8}} + e^{i\frac{7\pi}{8}}\right) = \frac{\pi i}{\sqrt[4]{2}}\cos\frac{7\pi}{8} = -\frac{\pi i}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

От друга страна,

$$\begin{aligned}\left|\int_{L_R} f(z)\,dz\right| &\le \int_{L_R} |f(z)|\,|dz| = \int_{L_R}\frac{1}{|z^4+1|\sqrt{|z^2+1|}}\,|dz|\\ &\le \int_{L_R}\frac{|dz|}{(|z|^4-1)\sqrt{|z|^2-1}} < \frac{\pi R}{(R^4-1)\sqrt{R^2-1}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Така $\displaystyle\int_C f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = -\frac{\pi i}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Пресмятане на реални интеграли от вида $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$, където $R(x,y)$ е рационална функция на x и y

Тези интеграли пресмятаме по следния начин. Полагаме $z = e^{i\theta}$. Тогава $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, $dz = e^{i\theta} i\,d\theta = iz\,d\theta$, $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ и след заместване получаваме контурен интеграл (върху единичната окръжност) от рационална функция на z.

Да се пресметнат интегралите:

9.16. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + k\cos\theta}$, $-1 < k < 1$.

Решение. Имаме

$$I = \frac{1}{i}\int_{C(0,1)} \frac{dz}{\left(1 + k\dfrac{z^2+1}{2z}\right)z} = \frac{2}{i}\int_{C(0,1)} \frac{dz}{kz^2 + 2z + k} = 4\pi\,\mathrm{Res}(z_1),$$

където $z_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{1-k^2}}{k}$ е простият полюс на подинтегралната функция, който лежи в $K(0,1)$. Тогава

$$\mathrm{Res}(z_1) = \left.\frac{1}{(kz^2 + 2z + k)'}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{2(kz_1 + 1)} = \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}} \text{ и } I = \frac{2\pi}{\sqrt{1-k^2}}.$$

9.17. $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta\, d\theta}{5 + 4\cos\theta}$.

Отг. $I = -\pi/3$.

9.18. $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2\theta}$.

Отг. $I = \pi\sqrt{2}$.

9.19. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(p + q\cos\theta)^2}$, $0 < q < p$.

Решение. Имаме $I = \dfrac{4}{i}\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{z}{(qz^2 + 2pz + q)^2}\, dz$. Подинтегралната функция има двукратни полюси в точките $z_1 = (-p + \sqrt{p^2 - q^2})/q$ и $z_2 = (-p - \sqrt{p^2-q^2})/q$, като $z_2 < -1 < z_1 < 0$. Тогава

$$I = \frac{4}{i}2\pi i\,\mathrm{Res}(z_1) = 8\pi\left.\left(\frac{z}{q^2(z-z_2)^2}\right)'\right|_{z=z_1} = -8\pi\frac{1}{q^2}\frac{z_1+z_2}{(z_1-z_2)^3}$$
$$= \frac{2\pi p}{(p^2-q^2)^{3/2}}.$$

9.20. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\, d\theta$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$.

Решение. Тъй като подинтегралната функция е четна, то

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\, d\theta.$$

Освен това $\cos 2\theta = (e^{i2\theta} + e^{-i2\theta})/2 = (z^2 + z^{-2})/2$. Тогава

$$I = -\frac{1}{4i} \int_{C(0,1)} \frac{z^4+1}{z^2(az^2 - (1+a^2)z + a)}\, dz.$$

При $a \neq 0$ подинтегралната функция има прости полюси в точките $z = a$ и $z = 1/a$ и двукратен полюс при $z = 0$, като $\operatorname{Res}(a) = \dfrac{a^4+1}{a^2(a^2-1)}$, $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{a^4+1}{a^2(1-a^2)}$ и $\operatorname{Res}(0) = \dfrac{a^2+1}{a^2}$. Така при $|a| < 1$ получаваме

$$I = -\frac{1}{4i} 2\pi i \left(\operatorname{Res}(0) + \operatorname{Res}(a)\right) = \frac{\pi a^2}{1-a^2},$$

а при $|a| > 1$ —

$$I = -\frac{1}{4i} 2\pi i \left(\operatorname{Res}(0) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{a}\right)\right) = \frac{\pi}{a^2(a^2-1)}.$$

Ако $a = 0$,

$$I = \frac{1}{4i} \int_{C(0,1)} \frac{z^4+1}{z^3}\, dz = \frac{1}{4i} \int_{C(0,1)} \left(z + \frac{1}{z^3}\right) dz = \frac{\pi}{2} \operatorname{Res}(0) = 0.$$

9.21. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Нека $J = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(n\theta - \sin\theta)\, d\theta$. Тогава

$$\begin{aligned} J + iI &= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} (i\cos(n\theta - \sin\theta) + \sin(n\theta - \sin\theta))\, d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} e^{-i(n\theta - \sin\theta)}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta + i\sin\theta} e^{-in\theta}\, d\theta \\ &= \int_{C(0,1)} e^z z^{-n-1}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(0). \end{aligned}$$

Ако $n < 0$, то $\operatorname{Res}(0) = 0$, а ако $n \geq 0$, то $\operatorname{Res}(0) = 1/n!$. Следователно $J = 0$ за всяко $n \in \mathbb{Z}$, $I = 0$ при $n < 0$ и $I = 2\pi/n!$ при $n \geq 0$.

9.22. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}\theta\, d\theta$, $n \in \mathbb{N}$.

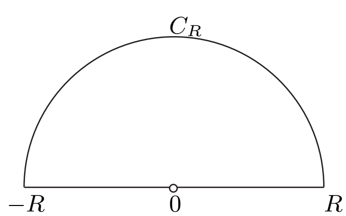
Отг. $I = \pi \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ при $n \geq 0$.

Пресмятане на реални несобствени интеграли от вида $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$, където $R(x) = P(x)/Q(x)$, $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми, такива че $\deg Q \geq \deg P + 2$

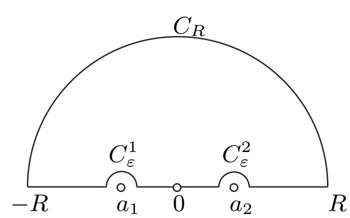
Ако $Q(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, то под $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$ разбираме $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} := \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}$. Ако $Q(a) = 0$, $a \in \mathbb{R}$ и $Q(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$, то $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} := \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left(\int_{-R}^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{R}\right)$. Този интеграл наричаме *главна стойност* и го бележим v.p.$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}$. Ако $Q(x)$ има повече от една реална нула, v.p.$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}$ се дефинира по аналогичен начин.

Тези интеграли пресмятаме по следния начин:

- Интегрираме функцията $R(z)$ по контура $\gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ (фиг. 9.3), където C_R е полуокръжност с център 0 и достатъчно голям радиус R, такъв че полюсите на Q се съдържат в $K(0, R)$, ако $Q(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, и по контура $\gamma_{R,\varepsilon}$ от фиг. 9.4, където C_ε^1, C_ε^2, $\ldots$ са полуокръжности с центрове a_1, a_2, $\ldots$ и радиуси ε, ако Q има реални нули a_1, a_2, $\ldots$



Фиг. 9.3



Фиг. 9.4

- Пресмятаме контурния интеграл с теоремата за резидуумите.

- Правим граничен преход при $R \to \infty$ ($R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$).

Да се пресметнат интегралите:

9.23. $\displaystyle I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx.$

Решение. Функцията $R(z) = \dfrac{2z^2 + z + 1}{z^4 + 5z^2 + 4}$ има прости полюси в точките $z = \pm i$ и $z = \pm 2i$ и те не са реални. Тогава (фиг. 9.3)

$$
\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} R(z)\,dz &= \int_{-R}^{R} R(x)\,dx + \int_{C_R} R(z)\,dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(i) + \operatorname{Res}(2i)) \\
&= 2\pi i\left(\frac{i-1}{6i} + \frac{7-2i}{12i}\right) = \frac{5\pi}{6}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Стандартната оценка за интегралите и неравенството на триъгълника ни дават

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} R(z)\,dz\right| &\le \int_{C_R} |R(z)|\,|dz| \le \int_{C_R} \frac{2|z|^2 + |z| + 1}{|z|^4 - 5|z|^2 - 4}\,|dz| \\
&= \frac{2R^2 + R + 1}{R^4 - 5R^2 - 4}\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

След граничен преход при $R \to \infty$ от (1) получаваме $I = 5\pi/6$.

9.24. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

Отг. $I = \pi/2$.

9.25. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)}$.

Отг. $I = 2\pi/5$.

9.26. $I = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)}$, $a > 0$, $b > 0$.

Упътване. Тъй като функцията е четна, то $\displaystyle\int_0^\infty = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}$. След това пресметнете $\operatorname{Res}(ib) = \dfrac{1}{2ib(a^2 - b^2)^2}$, $\operatorname{Res}(ia) = \dfrac{b^2 - 3a^2}{4ia^3(a^2 - b^2)^2}$.

Отг. $I = \dfrac{\pi(2a + b)}{4a^3 b(a + b)^2}$.

9.27. $I = \displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1}\,dx$.

Решение. Функцията $f(z) = \dfrac{z^2}{z^6 + 1}$ има прости полюси в точките $z_k = e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{6}}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, и $\operatorname{Res}(f, z_k) = -\dfrac{z_k^3}{6}$.

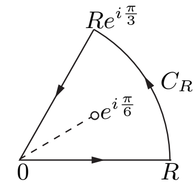
I *начин.* Като интегрираме по контура от фиг. 9.3, след граничен преход получаваме

$$
2I = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}(f, z_k) = -\frac{2\pi i}{6}\left((e^{i\frac{\pi}{6}})^3 + i^3 + (e^{i\frac{5\pi}{6}})^3\right) = -\frac{2\pi i}{6} i = \frac{2\pi}{6},
$$

откъдето намираме $I = \pi/6$.

II *начин.* Интегрираме функцията f по контура γ_R на сектора $\{z : |z| < R,\ 0 \le \arg z \le \pi/3\}$ (фиг. 9.5). Имаме

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_0^R f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_{[0,Re^{i\pi/3}]} f(z)\,dz.$$



Фиг. 9.5

Освен това

$$\int_{[0,Re^{i\pi/3}]} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{x^2 e^{i\frac{2\pi}{3}}}{x^6+1} e^{i\frac{\pi}{3}}\,dx = -\int_0^R f(x)\,dx.$$

Така

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\int_0^R f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

От друга страна,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(e^{i\frac{\pi}{6}}) = 2\pi i \left(\frac{-i}{6}\right) = \frac{\pi}{3},$$

защото вътре в сектора, заграден от γ_R, функцията f има само един полюс $e^{i\frac{\pi}{6}}$. Накрая след граничен преход отново получаваме $I = \pi/6$.

9.28. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{x^6+1}$.

Упътване. Интегрирайте по контура на фиг. 9.5.

Отг. $I = \pi\sqrt{3}/9$.

9.29. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

Решение. Интегрираме функцията $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$ върху контура γ_R на сектора $\{z : |z| < R,\ 0 \le \arg z \le 2\pi/n\}$ и следвайки решението на зад. 9.27 (II начин), достигаме до равенството

$$\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{n}}) = 2\pi i \left(\frac{-e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}\right),$$

т. е. $(e^{-i\frac{\pi}{n}} - e^{i\frac{\pi}{n}})I = -2\pi i/n$, откъдето получаваме $I = \dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$.

9.30. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \ge 0$.

Упътване. $\left[(z+i)^{-n-1}\right]^{(n)} = (-1)^n(n+1)(n+2)\dots 2n(z+i)^{-(2n+1)}$,

$$\operatorname{Res}(i) = \frac{1}{n!}\left[(z+i)^{-n-1}\right]^{(n)}_{z=i} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2 2i}.$$

Отг. $I = \dfrac{\pi}{2^{2n}}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

9.31. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$.

Решение. Функцията $f(z) = \dfrac{z^{m-1}}{1+z^n}$ има прости полюси в точките $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, с $\operatorname{Res}(f, z_k) = -\dfrac{z_k^m}{n}$. Интегрираме f по контура на сектора $\{z : |z| < R,\ 0 \le \arg z \le 2\pi/n\}$ и получаваме (ползвайки фиг. 9.5)

$$\int_0^R f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_0^{Rz_0^2} f(z)\,dz = -\frac{2\pi i}{n} z_0^m \quad (z_0 = e^{i\frac{\pi}{n}}).$$

Имаме $\displaystyle\int_0^{Rz_0^2} f(z)\,dz = z_0^{2m}\int_0^R f(x)\,dx$ и

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \int_{C_R} \frac{|z|^{m-1}}{|1+z^n|}\,|dz| \le \frac{R^m}{R^n-1}\frac{2\pi}{n} \to 0, \quad R \to \infty.$$

Така след граничен преход при $R \to \infty$ получаваме $(z_0^{2m}-1)I = \dfrac{2\pi i}{n} z_0^m$. Сега от $z_0^m(z_0^{2m}-1)^{-1} = (z_0^m - z_0^{-m})^{-1} = \left(2i\sin\frac{m\pi}{n}\right)^{-1}$ намираме $I = \dfrac{\pi}{n}\left(\sin\dfrac{m\pi}{n}\right)^{-1}$.

Забележка. В частност, ако $m-1$ и n са четни, т. е. $m-1 = 2p$ и $n = 2q$, по този начин пресмятаме и

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{x^{2p}}{1+x^{2q}}\,dx = \frac{\pi}{q}\left(\sin\frac{2p+1}{2q}\pi\right)^{-1}.$$

Разбира се, до същия резултат ще достигнем и ако интегрираме по контура на фиг. 9.3, но тогава ще трябва да извършим допълнителна работа — да сумираме резидуумите в точките $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2q}}$, $k = 0, 1, \dots, q-1$. (Направете го!)

9.32. $I = \text{v. p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + 2x}.$

Решение. Функцията $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 2z^2 + 2z} = \dfrac{1}{z(z^2 - 2z + 2)}$ има прости полюси в точките $z = 0$ и $z = 1 \pm i$, като $\operatorname{Res}(1+i) = \dfrac{1}{2i(1+i)}$. Интегрираме $f(z)$ по контура на фиг. 9.4 ($a_1 = 0$) и получаваме

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{1+i}.$$

За да пресметнем $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$, ще развием $f(z)$ в лоранов ред около $z = 0$. Имаме

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z^2 - 2z + 2} = \frac{1}{z}(a_0 + a_1 z + \cdots) = \frac{a_0}{z} + a_1 + a_2 z + \cdots = \frac{a_0}{z} + \varphi(z),$$

където $\varphi(z)$ е функция, холоморфна в околност на $z = 0$. Тогава

$$\begin{aligned}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz &= a_0 \int_{C_\varepsilon} \frac{dz}{z} + \int_{C_\varepsilon} \varphi(z)\,dz = a_0 \int_{\pi}^{0} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta + \int_{C_\varepsilon} \varphi(z)\,dz \\ &= -\pi i a_0 + \int_{C_\varepsilon} \varphi(z)\,dz.\end{aligned}$$

Тъй като $\varphi(z)$ е ограничена в околност на $z = 0$, т. е. $|\varphi(z)| \le M$, то за достатъчно малко ε: $\left|\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \varphi(z)\,dz\right| \le M\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$. Следователно $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz = -\pi i a_0 = -\pi i/2$. По стандартния начин доказваме, че $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$, $R \to \infty$, и след граничен преход при $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ получаваме $I = \pi/2$.

9.33. $I = \text{v. p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2+x-2)}\,dx.$

Решение. Функцията

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2+z-2)} = \frac{z}{(z^2+1)(z+2)(z-1)}$$

има прости полюси в точките $z = \pm i$, $z = -2$ и $z = 1$, като $\operatorname{Res}(f, i) = \dfrac{1}{2(i-3)}$. Интегрираме $f(z)$ по контура от фиг. 9.4 ($a_1 = -2$, $a_2 = 1$) и получаваме

$$\int_{-R}^{-2-\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon^1} + \int_{-2+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon^2} + \int_{1+\varepsilon}^{R} + \int_{C_R} = \frac{\pi i}{i-3}.$$

Както в зад. 9.32, развиваме $f(z)$ в лоранов ред около $z=-2$ и около $z=1$ и пресмятаме $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon^1} f(z)\,dz = -\dfrac{2\pi i}{15}$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon^2} f(z)\,dz = -\dfrac{\pi i}{6}$. По стандартния начин установяваме, че $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$ и след граничен преход получаваме равенството

$$I - \frac{2\pi i}{15} - \frac{\pi i}{6} = \frac{\pi i}{i-3} = \frac{\pi - 3\pi i}{10},$$

откъдето намираме $I = \pi/10$.

Пресмятане на реални несобствени интеграли от вида $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\left\{\begin{array}{c}\sin mx\\ \cos mx\end{array}\right\} dx$, където $R(x) = P(x)/Q(x)$, $P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми и $\deg Q \geq \deg P + 1$

Тези интеграли пресмятаме по следния начин:

- Интегрираме функцията $R(z)e^{imz}$ по контура от фиг. 9.3 или фиг. 9.4 в зависимост от това дали Q има или няма реални нули.
- Пресмятаме контурния интеграл с теоремата за резидуумите.
- Правим граничен преход при $R\to\infty$ ($R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$).

Да се пресметнат интегралите:

9.34. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$, $a > b > 0$.

Решение. Функцията $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$ има прости полюси в точките $z = \pm ia$ и $z = \pm ib$, като $\operatorname{Res}(f, ia) = \dfrac{e^{-a}}{2ia(b^2-a^2)}$ и $\operatorname{Res}(f, ib) = \dfrac{e^{-b}}{2ib(a^2-b^2)}$. Тогава (фиг. 9.3)

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$= \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right).$$

От стандартната оценка за интегралите и неравенството на триъгълника имаме

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} \frac{|e^{iz}|}{|z^2 + a^2|\,|z^2 + b^2|} |dz| \leq \int_{C_R} \frac{e^{-\operatorname{Im} z}}{\big||z|^2 - |a|^2\big|\,\big||z|^2 - |b|^2\big|} |dz|$$
$$< \frac{\pi R}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0,$$

защото $e^{-\operatorname{Im} z} < 1$ за $\operatorname{Im} z > 0$. Така след граничен преход по $R \to \infty$ получаваме

$$I + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right),$$

откъдето $I = \dfrac{\pi}{a^2 - b^2} \left(\dfrac{e^{-b}}{b} - \dfrac{e^{-a}}{a} \right)$ и $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx = 0.$

9.35. $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + a^2)^2}\, dx$, $a > 0$.

Отг. $I = \pi e^{-a}/4a$.

9.36. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5}\, dx.$

Решение. Функцията $f(z) = \dfrac{z e^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5}$ има прости полюси в точките $z = -1 \pm 2i$, като

$$\operatorname{Res}(f, -1 + 2i) = \left. \frac{z e^{i\pi z}}{2(z+1)} \right|_{z = -1 + 2i} = \frac{(1 - 2i) e^{-2\pi}}{4i}.$$

Тогава (фиг. 9.3)

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz = \frac{\pi}{2} (1 - 2i) e^{-2\pi}.$$

Ще докажем, че $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\, dz \to 0$ при $R \to \infty$. Тъй като сега степента на знаменателя на рационалната функция е само с единица по-голяма от тази на числителя, оценката, която направихме в зад. 9.34, е груба и не върши работа. Ще постъпим по следния начин. Имаме $\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}\,d\theta$. Тогава

$$\left|\int_0^\pi f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}\,d\theta\right| \le \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})|R\,d\theta \le \int_0^\pi \frac{Re^{-\pi R\sin\theta}}{R^2-2R-5}R\,d\theta$$
$$= \frac{R^2}{R^2-2R-5}\int_0^\pi e^{-\pi R\sin\theta}\,d\theta.$$

Тъй като $\int_0^\pi e^{-\pi R\sin\theta}\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi R\sin\theta}\,d\theta$, можем да използваме неравенството $\sin\theta \ge 2\theta/\pi$, $\theta\in[0,\pi/2]$, и както в зад. 7.19 да заключим, че $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ при $R\to\infty$. Сега ще достигнем до същия извод по друг начин. Последователно получаваме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi R\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-\pi R\sin\theta}\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi R\sin\theta}\,d\theta$$
$$\le 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-\pi R\sin\theta}\cos\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi R\sin\frac{\pi}{3}}\,d\theta$$
$$= \frac{2}{\pi R}\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-\pi R\sin\theta}\,d\pi R\sin\theta + \frac{\pi}{6}e^{-\frac{\pi\sqrt{3}R}{2}} = \frac{2}{\pi R}\left(1-e^{-\frac{\pi\sqrt{3}R}{2}}\right) + \frac{\pi}{6}e^{-\frac{\pi\sqrt{3}R}{2}},$$

откъдето следва $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi R\sin\theta}\,d\theta \to 0$ при $R\to\infty$, а оттук и $\int_{C_R} f(z)\,dz \to 0$ при $R\to\infty$. По-горе използвахме, че $2\cos\theta \ge 1$ за $\theta\in[0,\pi/3]$. За тези, които са запознати с теоремата на Лебег за граничен преход под знака на интеграла, ще отбележим, че от нея директно следва, че $\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}\,d\theta \to 0$ при $R\to\infty$. Сега след граничен преход и отделяне на реална и имагинерна част получаваме $I = -\pi e^{-2\pi}$ и $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos\pi x}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi}$.

9.37. $I = \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+4}\,dx$, $a>0$.

Отг. $I = \pi e^{-2a}/2$.

9.38. $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Решение. Тъй като функцията $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ има единствена особена точка $z = 0$, то (фиг. 9.4, $a_1 = 0$, $C_\varepsilon^1 = C_\varepsilon$)

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{\varepsilon}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

Като направим смяна на променливата x с $-x$ в първия интеграл и го обединим с третия, получаваме

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx + \int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0,$$

или

$$2i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz.$$

Както в зад. 9.36 заключаваме, че $\displaystyle\int_{C_R} \to 0$ при $R \to \infty$, а

$$-\int_{C_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta = i\int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} i\pi,$$

тъй като можем да направим граничен преход под знака на интеграла. Следователно $I = \pi/2$.

9.39. $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Упътване. Интегрирайте функцията $f(z) = (e^{i\alpha z} - e^{i\beta z})/z^2$ върху контура $\gamma_{R,\varepsilon}$ от зад. 9.38 и като следвате решението ѝ, покажете, че

$$2\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\,dx = -\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz.$$

След това развийте $f(z)$ в ред на Лоран около $z = 0$ и както в зад. 9.32 докажете, че $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \to \pi(\alpha - \beta)$. Не разделяйте дадения интеграл на два интеграла!

Отг. $I = \pi(\beta - \alpha)/2$.

9.40. $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

Упътване. Използвайте формулата $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$.

Отг. $I = \pi/2$.

9.41. $I = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx.$

Упътване. Използвайте формулата

$$4\sin^3 x = -\sin 3x + 3\sin x = \operatorname{Im}\left[(1-e^{i3x}) - 3(1-e^{ix})\right]$$

и интегрирайте функцията $f(z) = \left[\frac{1}{4}(1-e^{i3z}) - \frac{3}{4}(1-e^{iz})\right]/z^3$ по контура $\gamma_{R,\varepsilon}$ от зад. 9.38. Покажете, че $\int_{C_\varepsilon} \to -\frac{3}{4}\pi i$. Не разделяйте на два интеграла!

Отг. $I = 3\pi/8$.

9.42. $I = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}\, dx.$

Решение. От формулата $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$ следва, че

$$\begin{aligned} 4I &= 3\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_0^\infty \frac{\sin 3x}{x}\, dx = 3\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_0^\infty \frac{\sin 3x}{3x}\, d3x \\ &= 2\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi. \end{aligned}$$

Отг. $I = \pi/4$.

9.43. $I = \int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3(x^2+a^2)}\, dx,\ a > 0.$

Упътване. Интегрирайте функцията $f(z) = \frac{1 + iz - e^{iz}}{z^3(z^2+a^2)}$ по контура $\gamma_{R,\varepsilon}$ от зад. 9.38 и следвайте изложеното там решение.

Отг. $I = \frac{\pi}{2a^4}\left(1 - a + \frac{a^2}{2} - e^{-a}\right).$

9.44. $I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x}{x^2 - 5x + 6}\, dx.$

Упътване. Интегрирайте $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2-5z+6} = \frac{ze^{iz}}{(z-2)(z-3)}$ по контура $\gamma_{R,\varepsilon}$ от фиг. 9.4 ($a_1 = 2$, $a_2 = 3$). Чрез лорановото развитие на $f(z)$ около $z = 2$ и около $z = 3$ покажете, че $\int_{C_\varepsilon^1} \to 2\pi i e^{2i}$ и $\int_{C_\varepsilon^2} \to -3\pi i e^{3i}$.

Отг. $I = \pi(2\sin 2 - 3\sin 3)$.

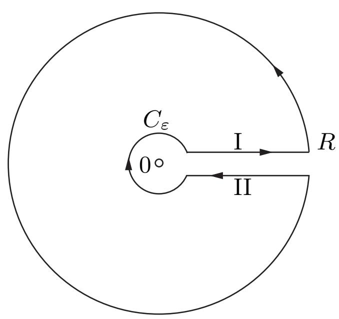
9.45. $I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{(x-1)(x^2+4)}\, dx.$

Отг. $I = \pi(\cos 1 - e^{-2})/5$.

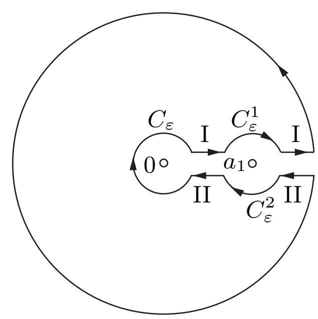
Пресмятане на реални интеграли от вида $\int_0^\infty x^\alpha R(x)\ln^m x\,dx$, където $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $R(x)$ е рационална функция

Тези интеграли пресмятаме по следния начин:

- Ако $\alpha \in \mathbb{Z}$, интегрираме функцията $f(z) = z^\alpha R(z)\log^{m+1} z$ по контура $\gamma_{R,\varepsilon}$ от фиг. 9.6, ако $R(z)$ няма положителни полюси, или от фиг. 9.7, ако $R(z)$ има положителни полюси $a_1, a_2, \dots$



Фиг. 9.6



Фиг. 9.7

- Ако $\alpha \notin \mathbb{Z}$, интегрираме функцията $f(z) = e^{\alpha \log z} R(z)\log^m z$ съответно по контура от фиг. 9.6 или фиг. 9.7.

- Пресмятаме контурния интеграл с теоремата за резидуумите.

- Правим граничен преход при $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$.

Тук $\log z = \ln|z| + i\arg z$, $0 \le \arg z \le 2\pi$, като $\arg z = 0$ за $z \in \mathrm{I}$, а $\arg z = 2\pi$ за $z \in \mathrm{II}$ (фиг. 9.6 и фиг. 9.7).

Да се пресметнат интегралите:

9.46. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

Решение. Полюсите на подинтегралната функция са $z_1 = -1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = -1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ и те не са реални и положителни. Следователно (фиг. 9.6)

$$
\begin{aligned}
&\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{z\log z}{(z^2+2z+2)^2}\,dz \\
&= \int_{\varepsilon}^{R} \frac{x\ln x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx + \int_{C_R} + \int_{R}^{\varepsilon} \frac{x(\ln x + i2\pi)}{(x^2+2x+2)^2}\,dx + \int_{C_\varepsilon} \qquad (2)\\
&= -2\pi i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{x\,dx}{(x^2+2x+2)^2} + \int_{C_R} + \int_{C_\varepsilon} = 2\pi i(\mathrm{Res}(z_1) + \mathrm{Res}(z_2)).
\end{aligned}
$$

Тъй като z_1, z_2 са двукратни полюси на подинтегралната функция, то

$$\mathrm{Res}(z_1) = \left(\frac{z\log z}{(z-z_2)^2}\right)'_{z=z_1} = \frac{-(z_1+z_2)\log z_1 + z_1 - z_2}{(z_1-z_2)^3}$$

и

$$\mathrm{Res}(z_2) = \left(\frac{z\log z}{(z-z_1)^2}\right)'_{z=z_2} = \frac{(z_1+z_2)\log z_2 + z_1 - z_2}{(z_1-z_2)^3}.$$

Като използваме стандартната оценка за интегралите и неравенството на триъгълника, получаваме

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} \frac{z\log z}{(z^2+2z+2)^2}\,dz\right| &\le \int_{C_R} \frac{|z|\,|\ln|z| + i\arg z|}{(|z|^2-2|z|-2)^2}\,|dz| \\
&\le \frac{R(\ln R + 2\pi)}{(R^2-2R-2)^2} 2\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,\\
\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{z\log z}{(z^2+2z+2)^2}\,dz\right| &\le \int_{C_\varepsilon} \frac{|z|\,|\ln|z| + i\arg z|}{(|z|^2-2|z|-2)^2}\,|dz| \\
&\le \frac{\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 2\pi)}{(2-2\varepsilon-\varepsilon^2)^2} 2\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.
\end{aligned}
$$

Накрая от (2) след граничен преход при $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$ намираме

$$
\begin{aligned}
I &= -(\mathrm{Res}(z_1) + \mathrm{Res}(z_2)) = -\frac{(z_1+z_2)(\log z_2 - \log z_1) + 2(z_1-z_2)}{(z_1-z_2)^3}\\
&= -\frac{-2(\ln\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4} - \ln\sqrt{2} - i\frac{3\pi}{4}) + 2.2i}{(2i)^3} = \frac{-\pi i + 4i}{8i} = \frac{4-\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

9.47. $I = \mathrm{v.\,p.}\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^3-3x-2}.$

Решение. Тъй като $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2$, подинтегралната функция има положителен полюс и трябва да интегрираме функцията $\dfrac{z \log z}{(z-2)(z+1)^2}$ по контура от фиг. 9.7 с $a_1 = 2$. Имаме

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{z \log z}{(z-2)(z+1)^2}\, dz \\
&\quad = \int_\varepsilon^{2-\varepsilon} \frac{x \ln x}{(x-2)(x+1)^2}\, dx + \int_{C_\varepsilon^1} + \int_{2+\varepsilon}^R \frac{x \ln x}{(x-2)(x+1)^2}\, dx + \int_{C_R} \\
&\quad - \int_{2+\varepsilon}^R \frac{x(\ln x + 2\pi i)}{(x-2)(x+1)^2}\, dx + \int_{C_\varepsilon^2} - \int_\varepsilon^{2-\varepsilon} \frac{x(\ln x + 2\pi i)}{(x-2)(x+1)^2}\, dx + \int_{C_\varepsilon} \\
&\quad = 2\pi i \operatorname{Res}(-1).
\end{aligned}$$

Като опростим, получаваме

$$\begin{aligned}
-2\pi i \left(\int_\varepsilon^{2-\varepsilon} + \int_{2+\varepsilon}^R \right) \frac{x\, dx}{(x-2)(x+1)^2} + \int_{C_\varepsilon^1} + \int_{C_\varepsilon^2} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{C_R}& \\
= 2\pi i \operatorname{Res}(-1).& \qquad (3)
\end{aligned}$$

Тъй като -1 е двукратен полюс, то $\operatorname{Res}(-1) = \left(\dfrac{z \log z}{z-2} \right)'_{z=-1} = \dfrac{-2\pi i - 3}{9}$. Функцията $\log_0 z = \ln |z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$, е холоморфна в околност на $z = 2$ и върху C_ε^1 съвпада с $\log z$. Следователно

$$\int_{C_\varepsilon^1} \frac{z \log z}{(z-2)(z+1)^2}\, dz = \int_{C_\varepsilon^1} \frac{z \log_0 z}{(z-2)(z+1)^2}\, dz.$$

В околност на $z = 2$ имаме

$$\frac{z \log_0 z}{(z-2)(z+1)^2} = \frac{a_0 + a_1(z-2) + \cdots}{z-2} = \frac{a_0}{z-2} + \varphi(z),$$

където $a_0 = \left.\dfrac{z \log_0 z}{(z+1)^2}\right|_{z=2} = \dfrac{2 \ln 2}{9}$, а $\varphi(z)$ е холоморфна и значи ограничена от константа M в околност на $z = 2$. Тогава

$$\left| \int_{C_\varepsilon^1} \varphi(z)\, dz \right| \le M\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

и следователно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C^1_\varepsilon}\frac{z\log_0 z}{(z-2)(z+1)^2}\,dz = a_0\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C^1_\varepsilon}\frac{dz}{z-2} = a_0\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\pi^0\frac{\varepsilon i e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}}\,d\theta$$
$$= -\frac{2\ln 2}{9}\pi i.$$

Аналогично, функцията $\log_1 z = \ln|z| + i\arg z$, $\pi < \arg z < 3\pi$, е холоморфна в точката $z = 2$ и върху C^2_ε съвпада с $\log z$. Тогава, както по-горе,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C^2_\varepsilon}\frac{z\log z}{(z-2)(z+1)^2}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C^2_\varepsilon}\frac{z\log_1 z}{(z-2)(z+1)^2}\,dz = -\pi i b_0,$$

където $b_0 = \left.\dfrac{z\log_1 z}{(z+1)^2}\right|_{z=2} = \dfrac{2(\ln 2 + 2\pi i)}{9}$.

Точно както в решението на зад. 9.46 се убеждаваме, че $\displaystyle\int_{C_\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ и $\displaystyle\int_{C_R}\xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. След граничен преход от (3) получаваме $I = (3-2\ln 2)/9$.

9.48. $I = \displaystyle\int_0^\infty\frac{\ln x}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx.$

Решение. Интегрираме функцията $\dfrac{\log^2 z}{(z+1)(z^2+z+1)}$ по контура от фиг. 9.6. Имаме

(4)
$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}}\frac{\log^2 z}{(z+1)(z^2+z+1)}\,dz$$
$$= \int_\varepsilon^R\frac{\ln^2 x}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx + \int_{C_R} - \int_\varepsilon^R\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx + \int_{C_\varepsilon}$$
$$= 2\pi i\left(\operatorname{Res}(-1) + \operatorname{Res}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) + \operatorname{Res}\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\right).$$

Както в зад. 9.46 заключаваме, че

$$\left|\int_{C_\varepsilon}\right| \le \frac{(|\ln\varepsilon|+2\pi)^2}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon-\varepsilon^2)}2\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$
$$\left|\int_{C_R}\right| \le \frac{(\ln R+2\pi)^2}{(R-1)(R^2-R-1)}2\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Тогава, като направим приведение и извършим граничен преход при $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$ в (4), получаваме

$$\begin{aligned} &-4\pi i I + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)} \\ &= 2\pi i \left[\operatorname{Res}(-1) + \operatorname{Res}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) + \operatorname{Res}\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Пресмятаме

$$\operatorname{Res}(-1) = \left.\frac{\log^2 z}{z^2+z+1}\right|_{z=-1} = \frac{(\pi i)^2}{1} = -\pi^2.$$

Нека a е кое да е от числата $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ (т. е. a е корен на уравнението $z^2+z+1=0$). Тогава

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(a) &= \left.\frac{\log^2 z}{(z+1)(z^2+z+1)'}\right|_{z=a} = \frac{\log^2 a}{(a+1)(2a+1)} = \frac{\log^2 a}{2a^2+3a+1} \\ &= \frac{\log^2 a}{a-1}, \end{aligned}$$

защото $a^2 = -a-1$. Сега като вземем предвид, че

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}}(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}) = 2i\sin\frac{\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = i\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}},$$

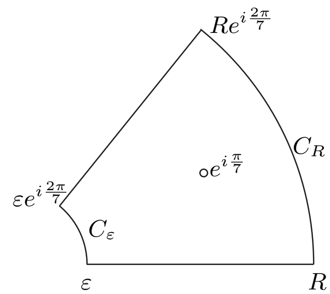
$$e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{2\pi}{3}}) = i\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

$$\log e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi i}{3} \quad \text{и} \quad \log e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{4\pi i}{3},$$

получаваме $\operatorname{Res}(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = -\dfrac{4\pi^2}{9i\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $\operatorname{Res}(e^{i\frac{4\pi}{3}}) = -\dfrac{16\pi^2}{9i\sqrt{3}}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ и $\sum \operatorname{Res} = \dfrac{2\pi^2\sqrt{3}}{9i} + \dfrac{\pi^2}{9}$. Накрая от (5), като отделим реална и имагинерна част, намираме $I = -\dfrac{\pi^2}{18}$ и $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

9.49. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^7+1}\,dx$.

Решение. Знаменателят на подинтегралната функция x^7+1 е бином, който върху лъча $\arg z = 2\pi/7$ взема същите стойности както върху положителната абсциса. Следователно вместо по контура от фиг. 9.6



Фиг. 9.8

можем да интегрираме по контура на сектора от фиг. 9.8 (сравни със зад. 9.27). В този сектор лежи само полюсът $e^{i\frac{\pi}{7}}$ и вместо със седем, ще работим само с един полюс. Освен това вместо функцията $\log^2 z/(z^7+1)$ можем да интегрираме по-простата функция $\log z/(z^7+1)$. Като вземем предвид, че върху лъча $\arg z = 2\pi/7$ имаме $z = xe^{i\frac{2\pi}{7}}$, $x > 0$, получаваме

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{\log z}{z^7+1}\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{x^7+1}\,dx + \int_{C_R} - \int_\varepsilon^R \frac{\left(\ln x + i\frac{2\pi}{7}\right)e^{i\frac{2\pi}{7}}}{x^7+1}\,dx + \int_{C_\varepsilon}\\ = 2\pi i\,\mathrm{Res}(e^{i\frac{\pi}{7}}).\end{aligned}$$

Очевидно, $\displaystyle\int_{C_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ и като направим граничен преход, стигаме до

$$(6) \qquad (1-e^{i\frac{2\pi}{7}})I - \frac{2\pi i}{7}e^{i\frac{2\pi}{7}}\int_0^\infty \frac{dx}{x^7+1} = 2\pi i\,\mathrm{Res}(e^{i\frac{\pi}{7}}).$$

Сега пресмятаме

$$\mathrm{Res}(e^{i\frac{\pi}{7}}) = \left.\frac{\log z}{(z^7+1)'}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{7}}} = \left.\frac{z\log z}{7z^7}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{7}}} = -\frac{i\pi e^{i\frac{\pi}{7}}}{49}$$

и (6) става

$$(1-e^{i\frac{2\pi}{7}})I - \frac{2\pi i}{7}e^{i\frac{2\pi}{7}}\int_0^\infty \frac{dx}{x^7+1} = \frac{2\pi^2}{49}e^{i\frac{\pi}{7}},$$

или, след делене на $e^{i\frac{\pi}{7}}$,

$$-2i\sin\frac{\pi}{7}I - \frac{2\pi i}{7}e^{i\frac{\pi}{7}}\int_0^\infty \frac{dx}{x^7+1} = \frac{2\pi^2}{49}.$$

Отделяме реална и имагинерна част, решаваме получената система и намираме

$$I = -\frac{\pi^2\cos\frac{\pi}{7}}{49\sin^2\frac{\pi}{7}}, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{x^7+1} = \frac{\pi}{7\sin\frac{\pi}{7}}.$$

9.50. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3\ln x}{x^6+1}\,dx.$

Отг. $I = \pi^2/54$.

9.51. $I = \text{v. p.}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-x-2}\,dx.$

Решение. Ще следваме стриктно схемата от решението на зад. 9.47. Имаме

$$(7)\qquad \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{\log^2 z}{z^2-z-2}\,dz = \left(\int_\varepsilon^{2-\varepsilon} + \int_{2+\varepsilon}^R\right)\frac{\ln^2 x}{x^2-x-2}\,dx$$

$$-\left(\int_\varepsilon^{2-\varepsilon} + \int_{2+\varepsilon}^R\right)\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{x^2-x-2}\,dx + \int_{C_\varepsilon^1} + \int_{C_\varepsilon^2} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{C_R} = 2\pi i\operatorname{Res}(-1).$$

Ясно е, че $\displaystyle\int_{C_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ и $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$. Освен това

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon^1} = -\pi i\,\frac{\log_0^2 z}{z+1}\Big|_{z=2} = -\frac{\ln^2 2}{3}\pi i \qquad (\text{вж. зад. } 9.47),$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon^2} = -\pi i\,\frac{\log_1^2 z}{z+1}\Big|_{z=2} = -\frac{(\ln 2+2\pi i)^2}{3}\pi i \qquad \text{и}$$

$$\operatorname{Res}(-1) = \frac{\log^2 z}{(z^2-z-2)'}\Big|_{z=-1} = \frac{(\pi i)^2}{-3} = \frac{\pi^2}{3}.$$

След граничен преход от (7) получаваме

$$-4\pi i I + 4\pi^2\,\text{v. p.}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-x-2} = 2\pi i\frac{\pi^2}{3} + \frac{2\ln^2 2 + 4\pi i\ln 2 - 4\pi^2}{3}\pi i.$$

Като отделим реална и имагинерна част, намираме

$$I = \frac{\pi^2-\ln^2 2}{6} \quad \text{и} \quad \text{v. p.}\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-x-2} = -\frac{\ln 2}{3}.$$

9.52. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2(x^2+1)}.$

Решение. Интегрираме функцията $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}\log z}(z+1)^2(z^2+1)}$ по контура от фиг. 9.6 и намираме

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{dz}{e^{\frac{1}{2}\log z}(z+1)^2(z^2+1)} &= \int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2(x^2+1)} + \int_{C_R} \\ &\quad - \int_\varepsilon^R \frac{dx}{e^{\frac{1}{2}(\ln x+2\pi i)}(x+1)^2(x^2+1)} + \int_{C_\varepsilon} \\ &= 2\int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2(x^2+1)} + \int_{C_R} + \int_{C_\varepsilon} \\ &= 2\pi i(\operatorname{Res}(-1) + \operatorname{Res}(i) + \operatorname{Res}(-i)).\end{aligned}$$

Тъй като $\displaystyle\int_{C_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ (направете сами съответните оценки, като използвате стандартната оценка за интегралите и неравенството на триъгълника), оттук получаваме

$$I = \pi i\left(\operatorname{Res}(-1) + \operatorname{Res}(i) + \operatorname{Res}(-i)\right).$$

По-нататък имаме

$$\begin{aligned}&\operatorname{Res}(-1) = \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\log z}(z^2+1)}\right)'_{z=-1} = -\frac{3i}{4}, \\ &\operatorname{Res}(i) = \left.\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\log z}(z+1)^2(z^2+1)'}\right|_{z=i} = -\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4} \quad (\log i = \frac{\pi i}{2}!), \\ &\operatorname{Res}(-i) = \left.\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\log z}(z+1)^2(z^2+1)'}\right|_{z=-i} = -\frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{4} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4} \ (\log(-i) = \frac{3\pi i}{2}!)\end{aligned}$$

и след като сумираме, получаваме $I = \pi(3-\sqrt{2})/4$.

9.53. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx.$

Решение. Интегрираме функцията $\dfrac{e^{\frac{2}{3}\log z}}{(z+1)^2(z^2+2z+2)}$ по контура от фиг. 9.6. Имаме

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{e^{\frac{2}{3}\log z}}{(z+1)^2(z^2+2z+2)}\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{\sqrt[3]{x^2}}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx + \int_{C_R}$$
$$- \int_\varepsilon^R \frac{e^{\frac{2}{3}(\ln x + 2\pi i)}}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx + \int_{C_\varepsilon}$$
$$= 2\pi i\,(\mathrm{Res}(-1) + \mathrm{Res}(-1+i) + \mathrm{Res}(-1-i))\,.$$

Тъй като $\displaystyle\int_{C_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ (защо?), след граничен преход и прегрупиране получаваме

$$(8) \qquad (1 - e^{i\frac{4\pi}{3}})I = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(-1) + \mathrm{Res}(-1+i) + \mathrm{Res}(-1-i))\,.$$

Освен това

$$\mathrm{Res}(-1) = \left(\frac{e^{\frac{2}{3}\log z}}{z^2+2z+2}\right)'\Bigg|_{z=-1} = -\frac{2}{3}e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

и ако a е кое да е от числата $-1+i$, $-1-i$, то

$$\mathrm{Res}(a) = \left.\frac{e^{\frac{2}{3}\log z}}{(z+1)^2(z^2+2z+2)'}\right|_{z=a} = \frac{e^{\frac{2}{3}\log a}}{2(a+1)^3}.$$

Като вземем предвид, че $-1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ и $-1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$, оттук намираме

$$\mathrm{Res}(-1+i) = -\frac{\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{2i}\left(= -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right) \quad \text{и} \quad \mathrm{Res}(-1-i) = \frac{\sqrt[3]{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2i}.$$

Като заместим в (8) и разделим двете страни на $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, получаваме

$$\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)I = 2\pi i\left(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2i}(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}})\right),$$
$$-2i\sin\frac{2\pi}{3}I = 2\pi i\left(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2i}2i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

или

$$-\sqrt{3}I = 2\pi\left(-\frac{2}{3} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right),$$

откъдето намираме $I = \pi(4 - 3\sqrt[3]{2})/3\sqrt{3}$.

9.54. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^3+1}\,dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Да се определят стойностите на α, за които интегралът е сходящ.

Решение. Интегрираме функцията $e^{\alpha \log z}/(z^3+1)$ по контура от фиг. 9.6. Имаме

$$(9)\qquad \begin{aligned} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{e^{\alpha\log z}}{z^3+1}\,dz &= \int_\varepsilon^R \frac{x^\alpha}{x^3+1}\,dx + \int_{C_R} - \int_\varepsilon^R \frac{x^\alpha e^{i2\pi\alpha}}{x^3+1}\,dx + \int_{C_\varepsilon} \\ &= 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}(z_k), \qquad z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}. \end{aligned}$$

Интегралът е сходящ тогава и само тогава, когато $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ и $\displaystyle\int_{C_R} \xrightarrow[R\to\infty]{}$ 0. Така

$$\left|\int_{C_\varepsilon}\right| \le \frac{\varepsilon^\alpha}{1-\varepsilon^3} 2\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \text{ ако } \alpha+1>0, \text{ т.е. } \alpha>-1, \text{ и}$$

$$\left|\int_{C_R}\right| \le \frac{R^\alpha}{R^3-1} 2\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0, \text{ ако } \alpha+1<3, \text{ т.е. } \alpha<2.$$

Следователно интегралът е сходящ, ако $-1<\alpha<2$. За тези стойности на α след граничен преход от (9) получаваме

$$(10)\qquad (1-e^{i2\pi\alpha})I = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}(z_k).$$

По-нататък $\operatorname{Res}(z_k) = \left.\dfrac{e^{\alpha\log z}}{3z^2}\right|_{z=z_k} = -\dfrac{z_k e^{\alpha \log z_k}}{3}$ и тогава

$$\operatorname{Res}(e^{i\frac{\pi}{3}}) = -\frac{e^{i(\alpha+1)\frac{\pi}{3}}}{3}, \quad \operatorname{Res}(-1) = \frac{e^{i\alpha\pi}}{3}, \quad \operatorname{Res}(e^{i\frac{5\pi}{3}}) = -\frac{e^{i(\alpha+1)\frac{5\pi}{3}}}{3}.$$

Като заместим в (10) и разделим двете страни на $e^{i\alpha\pi}$, ще получим

$$\begin{aligned} -2i\sin\alpha\pi I &= \frac{2\pi i}{3}\left(1-(e^{i(2\alpha-1)\frac{\pi}{3}} + e^{-i(2\alpha-1)\frac{\pi}{3}})\right) \\ &= \frac{2\pi i}{3}\left(1-2\cos(2\alpha-1)\frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Оттук намираме $I = \pi \dfrac{2\cos(2\alpha-1)\dfrac{\pi}{3}-1}{3\sin\alpha\pi}$.

Пресметнете същия интеграл, като интегрирате по границата на $\{z : \varepsilon \le |z| \le R,\, 0 \le \arg z \le 2\pi/3\}$.

9.55. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x^2+1)^2}\,dx.$

Отг. $I = \dfrac{\pi(1-\alpha)}{4\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}$, $-1<\alpha<3$.

9.56. $I = \text{v. p.}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{(x-2)(x+1)^2}.$

Решение. Интегрираме функцията $\dfrac{e^{\frac{1}{3}\log z}}{(z-2)(z+1)^2}$ по контура от фиг. 9.7:

$$(11)\qquad \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{e^{\frac{1}{3}\log z}}{(z-2)(z+1)^2}\,dz = \left(\int_\varepsilon^{2-\varepsilon} + \int_{2+\varepsilon}^R\right)\frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{(x-2)(x+1)^2}$$
$$-\left(\int_\varepsilon^{2-\varepsilon} + \int_{2+\varepsilon}^R\right)\frac{\sqrt[3]{x}e^{i\frac{2\pi}{3}}\,dx}{(x-2)(x+1)^2} + \int_{C_R} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon^1} + \int_{C_\varepsilon^2} = 2\pi i\,\mathrm{Res}(-1).$$

Пресмятаме $\mathrm{Res}(-1) = \left(\dfrac{e^{\frac{1}{3}\log z}}{z-2}\right)'\Bigg|_{z=-1} = 0.$

Като следваме стриктно решението на зад. 9.47, получаваме

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon^1} = -\pi i\left.\frac{e^{\frac{1}{3}\log_0 z}}{(z+1)^2}\right|_{\substack{z=2\\ \arg 2=0}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{9}\pi i,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon^2} = -\pi i\left.\frac{e^{\frac{1}{3}\log_1 z}}{(z+1)^2}\right|_{\substack{z=2\\ \arg 2=2\pi}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{9}\pi i e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Очевидно, $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, $\displaystyle\int_{C_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$ и след граничен преход от (11) достигаме до

$$(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})I = \frac{\sqrt[3]{2}}{9}\pi i(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}).$$

Разделяме на $e^{i\frac{\pi}{3}}$ и намираме $I = -\pi\sqrt[3]{2}/9\sqrt{3}$.

9.57. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)^2}\,dx.$

Решение. Интегрираме функцията $\dfrac{\log z}{e^{\frac{1}{2}\log z}(z+1)^2}$ по контура от фиг. 9.6:

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{\log z}{e^{\frac{1}{2}\log z}(z+1)^2}\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)^2}\,dx + \int_{C_R}$$

$$- \int_\varepsilon^R \frac{\ln x + 2\pi i}{e^{\frac{1}{2}(\ln x+2\pi i)}(x+1)^2}\,dx + \int_{C_\varepsilon}$$

$$= 2\int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+1)^2}\,dx + 2\pi i\int_\varepsilon^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} + \int_{C_R} + \int_{C_\varepsilon} = 2\pi i\,\mathrm{Res}(-1).$$

Ясно е, че $\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, $\displaystyle\int_{C_R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$, откъдето

$$2I + 2\pi i\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} = 2\pi i\,\mathrm{Res}(-1). \tag{12}$$

Пресмятаме $\mathrm{Res}(-1) = \left(\dfrac{\log z}{e^{\frac{1}{2}\log z}}\right)'_{z=-1} = \dfrac{\pi}{2} + i$, заместваме в (12) и като отделим реална и имагинерна част, получаваме

$$I = -\pi, \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

9.58. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$, $1 < \alpha < 2$.

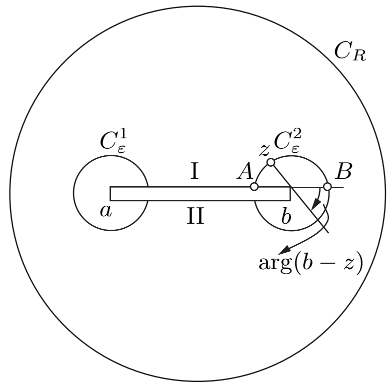
Упътване. Предварително интегрирайте по части.

Отг. $\dfrac{\pi}{2(\alpha-1)\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}}$.

Пресмятане на интеграли от вида $\int_a^b R(x)(x-a)^p(b-x)^{1-p}\,dx$, където $a, b, p \in \mathbb{R}$, а $R(x)$ е рационална функция

Тези интеграли пресмятаме по следния начин:

- Интегрираме функцията $R(z)e^{p\log(z-a)}e^{(1-p)\log(b-z)}$ по контура $\gamma_{R,\varepsilon}$ от фиг. 9.9, където $C_\varepsilon^1 = C(a,\varepsilon)$, $C_\varepsilon^2 = C(b,\varepsilon)$, $C_R = C(0,R)$, а R е достатъчно голямо, така че интервалът $[a,b]$ и всички полюси на $R(z)$ да бъдат в кръга $K(0,R)$, I и II са съответно горният и долният бряг на



Фиг. 9.9

$[a,b]$. Функциите $\log(z-a)$ и $\log(b-z)$ са онези еднозначни клонове, за които при $x \in \mathrm{I}$

$$e^{p\log(x-a)}e^{(1-p)\log(b-x)} = (x-a)^p(b-x)^{1-p} > 0.$$

За това е достатъчно при $x \in \mathrm{I}$ да вземем $\arg(x-a) = \arg(b-x) = 0$. Нека отбележим изрично, че при този избор на логаритмичните функции $e^{p\log(z-a)}$ и $e^{(1-p)\log(b-z)}$ не са еднозначни в $\mathbb{C} \setminus [a,b]$, но тяхното произведение е еднозначна и следователно холоморфна функция (Проверете това!).

- Пресмятаме контурния интеграл с теоремата за резидуумите.
- Правим граничен преход при $\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$.

Да се пресметнат интегралите:

9.59. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^{1-p}\,dx$, $-1 < p < 2$.

Решение. Първи начин. Интегрираме по контура $\gamma_{R,\varepsilon}$ от фиг. 9.9 с $a=-1$, $b=1$ функцията $f(z) = e^{p\log(1-z)}e^{(1-p)\log(1+z)}$, като логаритмите са избрани така, че при $x \in \mathrm{I}$ $\arg(1-x) = \arg(1+x) = \arg(x-(-1)) = 0$ и $f(x) = (1-x)^p(1+x)^{1-p}$. Когато z направи една пълна обиколка на C_ε^2 по посока на движението на часовниковата стрелка, изменението на $\arg(z+1) = \arg(z-(-1))$ е от 0 до 0, а това на $\arg(1-z)$ — от 0 до -2π. Следователно при $x \in \mathrm{II}$ $\arg(x+1) = 0$, $\arg(1-x) = -2\pi$ и

$$f(x) = e^{p(\ln(1-x)-2\pi i)}e^{(1-p)(\ln(1+x)+i.0)} = (1-x)^p(1+x)^{1-p}e^{-2p\pi i}.$$

Тогава от основната теорема на Коши имаме

$$
\begin{aligned}
0 = \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} (1-x)^p (1+x)^{1-p}\,dx + \int_{C_\varepsilon^2} \\
- \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} (1-x)^p (1+x)^{1-p} e^{-2p\pi i}\,dx + \int_{C_\varepsilon^1} + \int_{C_R},
\end{aligned}
$$

откъдето

$$
(13) \qquad (1-e^{-2p\pi i}) \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} (1-x)^p (1+x)^{p-1}\,dx + \int_{C_\varepsilon^1} + \int_{C_\varepsilon^2} + \int_{C_R} = 0.
$$

Ако $z \in C_\varepsilon^1$, то $|f(z)| = |1-z|^p |1+z|^{1-p} \le (2+\varepsilon)^p \varepsilon^{1-p}$. Следователно $\left|\int_{C_\varepsilon^1}\right| \le (2+\varepsilon)^p \varepsilon^{1-p} 2\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, тъй като $p < 2$. Ако $z \in C_\varepsilon^2$, то $|f(z)| = |1-z|^p |1+z|^{1-p} \le \varepsilon^p (2+\varepsilon)^{1-p} 2\pi\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ поради $p > -1$. Що се отнася до $\int_{C_R}$, очевидно той не клони към нула при $R \to \infty$, тъй като $f(z)$ е от порядъка на z при $z \to \infty$ и не е ограничена. Функцията $f(z)$ е холоморфна в $\mathbb{C} \setminus ([-1,1] \cup \{\infty\})$. При изменението на z по C_ε^2 от точка $A \in \mathrm{I}$ до точка $B \in (1,+\infty)$ (фиг. 9.9) $\arg(1+z)$ се изменя от 0 до 0, а $\arg(1-z)$ — от 0 до $-\pi$. Следователно $\arg(1+x) = 0$, $\arg(1-x) = -\pi$ за $x > 1$, откъдето

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{p(\ln|1-x| - i\pi)} e^{(1-p)(\ln|1+x| + i.0)} \\
&= |1-x|^p |1+x|^{1-p} e^{-p\pi i} = (x-1)^p (1+x)^{1-p} e^{-p\pi i} \\
&= x \left(1 - \frac{1}{x}\right)^p \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1-p} e^{-p\pi i}.
\end{aligned}
$$

Като развием $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^p$ и $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1-p}$ по бинома на Нютон, получаваме, че при $x > 1$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-p\pi i} x \left(1 - \frac{p}{x} + \frac{p(p-1)}{2} \cdot \frac{1}{x^2} - \cdots\right) \\
&\qquad \times \left(1 + \frac{1-p}{x} + \frac{(1-p)(-p)}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots\right) \\
&= e^{-p\pi i} x \left(1 + \frac{1-2p}{x} + \frac{2p(p-1)}{x^2} + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

Следователно в развитието

$$f(z) = bz + a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots$$

на функцията $f(z)$ около ∞ коефициентът пред z^{-1} е $a_1 = 2p(p-1)e^{-p\pi i}$. Тогава

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i a_1 = 2\pi i.2p(p-1)e^{-p\pi i}.$$

Като направим граничен преход в (13), умножим двете страни с $e^{p\pi i}$ и използваме формулата на Ойлер за $\sin z$, получаваме

$$2i\sin p\pi I = 2\pi i.2p(1-p),$$

откъдето $I = 2p(1-p)\pi/\sin p\pi$.

Втори начин. Имаме

$$I = \int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^{1-p}\,dx = \int_{-1}^{1}(1+x)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^p dx.$$

След смяната $t = (1-x)/(1+x)$ получаваме $I = 4\int_0^\infty \frac{t^p}{(1+t)^3}\,dt$. Понататък пресмятанията стават както в зад. 9.54. (Довършете ги!)

9.60. $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt[3]{(x-1)^2(2-x)}}$.

Решение. Като следваме решението на зад. 9.59, имаме

$$\begin{aligned}(14)\qquad &\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{dz}{z(z-1)^{2/3}(2-z)^{1/3}} = \int_{1+\varepsilon}^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x(x-1)^{2/3}(2-x)^{1/3}} + \int_{C_\varepsilon^2} \\ &- \int_{1+\varepsilon}^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x(x-1)^{2/3}(2-x)^{1/3}e^{-2\pi i/3}} + \int_{C_\varepsilon^1} + \int_{C_R} = 2\pi i\,\mathrm{Res}(0).\end{aligned}$$

И тук $\int_{C_\varepsilon^1} \to 0$, $\int_{C_\varepsilon^2} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, но сега

$$\left|\int_{C_R}\right| \le \frac{2\pi R}{R(R-1)^{2/3}(R-2)^{1/3}} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Пресмятаме $\mathrm{Res}(0) = \left.\frac{1}{(z-1)^{2/3}(2-z)^{1/3}}\right|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}}$ и след граничен преход от (14) получаваме

$$(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}})I = 2\pi i\frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt[3]{2}}.$$

Оттук (като умножим двете страни с $e^{-i\frac{\pi}{3}}$) намираме $I = \pi\sqrt[3]{4}/\sqrt{3}$.

9.61. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}{1+x^2}\,dx.$

Решение. Интегрираме функцията $f(z) = z^{3/4}(1-z)^{1/4}/(z^2+1)$ по контура от фиг. 9.9 ($a = 0$, $b = 1$), като $\arg z = \arg(1-z) = 0$ за $z \in \mathrm{I}$. Имаме (вж. подробното решение на зад. 9.59)

$$\text{(15)}\qquad \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{z^{3/4}(1-z)^{1/4}}{z^2+1}\,dz = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{x^{3/4}(1-x)^{1/4}}{x^2+1}\,dx + \int_{C_\varepsilon^2}$$

$$-\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{x^{3/4}(1-x)^{1/4}e^{-i\frac{2\pi}{4}}}{x^2+1}\,dx + \int_{C_\varepsilon^1} + \int_{C_R} = 2\pi i(\operatorname{Res}(i) + \operatorname{Res}(-i)).$$

Освен това $\operatorname{Res}(\pm i) = \left.\dfrac{z^{3/4}(1-z)^{1/4}}{2z}\right|_{z=\pm i}$. Като оставим точката z да се мени от точка $x \in \mathrm{I}$ до i, виждаме, че $\arg z$ се мени от 0 до $\pi/2$, а $\arg(1-z)$ — от 0 до $-\pi/4$. Следователно $\arg i = \pi/2$, $\arg(1-i) = -\pi/4$. Тогава

$$\operatorname{Res}(i) = \frac{|i|^{3/4}e^{i\frac{3}{4}\arg i}|1-i|^{1/4}e^{\frac{i}{4}\arg(1-i)}}{2i} = \frac{\sqrt[8]{2}e^{i\frac{5\pi}{16}}}{2i}.$$

Аналогично, $\operatorname{Res}(-i) = \dfrac{\sqrt[8]{2}e^{-i\frac{13\pi}{16}}}{-2i}$.

Ако оставим z да се мени от точка $x_0 \in \mathrm{I}$ до точка $x > 1$, виждаме, че $\arg z$ се мени от 0 до 0, а $\arg(1-z)$ — от 0 до $-\pi$. Тогава за $x > 1$ $\arg x = 0$, $\arg(1-x) = -\pi$ и

$$f(x) = \frac{x^{3/4}|1-x|^{1/4}e^{\frac{i}{4}(-\pi)}}{x^2+1} = \frac{x^{3/4}(x-1)^{1/4}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{x^2+1},$$

откъдето $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Следователно

$$f(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

в околност на $z = \infty$ и

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = a_1 \int_{C_R} \frac{dz}{z} = 2\pi i a_1.$$

Имаме $a_1 = \lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = \lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = e^{-i\frac{\pi}{4}}$, така че $\displaystyle\int_{C_R} f(z)\,dz =$

$2\pi i e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Както в зад. 9.59 установяваме, че $\displaystyle\int_{C_\varepsilon^1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, $\displaystyle\int_{C_\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, и след граничен преход в (15) получаваме

$$(1-e^{-i\frac{2\pi}{4}})I = 2\pi i\frac{\sqrt[8]{2}}{2i}\left(e^{i\frac{5\pi}{16}} - e^{-i\frac{13\pi}{16}}\right) - 2\pi i e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Като умножим двете страни на това равенство с $e^{i\frac{\pi}{4}}$ и използваме формулата на Ойлер, достигаме до $2i\sin\dfrac{\pi}{4}I = 2\pi i\left(\sqrt[8]{2}\sin\dfrac{9\pi}{16} - 1\right)$, откъдето $I = \pi\sqrt{2}\left(\sqrt[8]{2}\sin\dfrac{9\pi}{16} - 1\right)$.

9.62. $\displaystyle I = \int_0^2 \frac{x^4}{(x^2+1)\sqrt[4]{x(2-x)^3}}\,dx.$

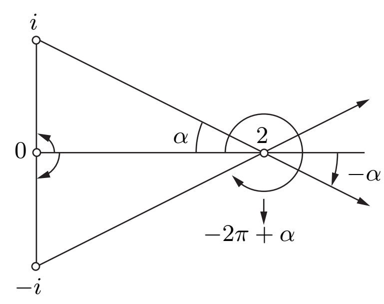
Решение. Интегрираме функцията $f(z) = \dfrac{z^4}{(z^2+1)z^{1/4}(2-z)^{3/4}}$ върху контура от фиг. 9.9 ($a=0$, $b=2$), като $\arg z = \arg(2-z) = 0$ за $z \in \mathrm{I}$. Получаваме

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{z^4\,dz}{(z^2+1)z^{1/4}(2-z)^{3/4}} = (1-e^{i\frac{3\pi}{2}})\int_\varepsilon^{2-\varepsilon} \frac{x^4\,dx}{(x^2+1)x^{1/4}(2-x)^{3/4}}$$

$$+\int_{C_\varepsilon^1} + \int_{C_\varepsilon^2} + \int_{C_R} = 2\pi i(\operatorname{Res}(i) + \operatorname{Res}(-i)). \tag{16}$$

Като тръгнем от точка $x \in \mathrm{I}$, от фиг. 9.10 намираме $\arg i = \pi/2$, $\arg(-i) = -\pi/2$, $\arg(2-i) = -\alpha$, $\arg(2-(-i)) = -2\pi+\alpha$, където $\alpha = \sphericalangle(0,2,i) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$. Така получаваме

$$\operatorname{Res}(i) = \left.\frac{z^4}{2z.z^{1/4}(2-z)^{3/4}}\right|_{z=i} = \frac{e^{i\frac{6\alpha-\pi}{8}}}{2i5^{3/8}} \quad \text{и} \quad \operatorname{Res}(-i) = \frac{e^{i\frac{13\pi-6\alpha}{8}}}{-2i5^{3/8}}.$$



Фиг. 9.10

Ако $x > 2$, то $\arg x = 0$, $\arg(2-x) = -\pi$ и

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^4}{(x^2+1)x^{1/4}(x-2)^{3/4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}} \\
&= e^{i\frac{3\pi}{4}}\frac{x^4}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3/4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}x\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-3/4}}{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= e^{i\frac{3\pi}{4}}x\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}-\cdots\right)\left(1-\binom{-3/4}{1}\frac{2}{x}+\binom{-3/4}{2}\frac{4}{x^2}-\cdots\right) \\
&= e^{i\frac{3\pi}{4}}x\left(1+\frac{3}{2}\frac{1}{x}+\frac{13}{8}\frac{1}{x^2}+\cdots\right).
\end{aligned}$$

Следователно развитието на $f(z)$ около $z=\infty$ е

$$f(z) = e^{i\frac{3\pi}{4}}\left(z+\frac{3}{2}+\frac{13}{8}\frac{1}{z}+\cdots\right).$$

Тогава

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = e^{i\frac{3\pi}{4}}\frac{13}{8}\int_{C_R}\frac{dz}{z} = 2\pi i\frac{13}{8}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Като направим граничен преход, от (16) получаваме

$$(1-e^{i\frac{3\pi}{2}})I = 2\pi i\frac{1}{2i5^{3/8}}\left(e^{i\frac{6\alpha-\pi}{8}}-e^{i\frac{13\pi-6\alpha}{8}}\right)-2\pi i\frac{13}{8}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Разделяме двете страни на това равенство на $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ и намираме

$$I = \pi\sqrt{2}\left(\frac{13}{8}-\frac{1}{5^{3/8}}\sin\frac{6\alpha-7\pi}{8}\right), \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

9.63. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{(x^2-4)\sqrt[3]{(x+1)(1-x)^2}}$.

Отг. $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.

9.64. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^3\,dx}{(x^2-4)\sqrt[3]{(x+1)(1-x)^2}}$.

Отг. $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)$.

Забележка. Решете задачи 9.60–9.64 и по втория начин, даден в решението на зад. 9.59.

Сумиране на числови редове

Теоремата за резидуумите дава възможност да се сумират някои числови редове. Тук ще се спрем на два вида редове. Нека $f(z)$ е мероморфна в $\mathbb{C}$ функция, т. е. холоморфна с изключение на полюси. Тогава:

1) редът (ако е сходящ)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} f(n)$$

може да се сумира по следния начин:

- Взема се редица от раздуващи се жорданови криви C_n (т. е. такива, че всеки кръг $K(0,R)$ от известно място нататък се съдържа във вътрешността на C_n), които не минават през полюс на f.
- С теоремата за резидуумите се пресмята

$$\int_{C_n} f(z)\operatorname{ctg}\pi z\,dz.$$

- Прави се граничен преход при $n\to\infty$.

Полученото равенство е уравнение за търсената сума.

2) редът $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n)e^{in\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, се сумира аналогично, като се пресмята

$$\int_{C_n} f(z)\frac{e^{i\alpha z}}{\sin\pi z}\,dz.$$

9.65. Да се сумират редовете:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$; **в)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$; **г)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$;

д) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(a+n)^2}$, $a\notin\mathbb{Z}$; **е)** $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(a+n)e^{i\alpha n}}{a^2+n^2}$, $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos\alpha n}{a^2+n^2}$,

$\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n\sin\alpha n}{a^2+n^2}$, $-\pi<\alpha<\pi$, $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$;

ж) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\dfrac{e^{i\alpha n}}{a+in}$, $\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{a\cos\alpha n+n\sin\alpha n}{a^2+n^2}$, $-\pi<\alpha<\pi$, $a>0$;

з) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{3n+1}$.

Решение. Навсякъде по-нататък ще използваме резултата от зад. 5.8, съгласно който съществува константа M, такава че за всяко $z \in G = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} K(n, 1/3)$ имаме $|\operatorname{ctg} \pi z| \leq M$, $1/|\sin \pi z| \leq M$.

а) Нека $C_n = C(0, n+1/2)$. Функцията $\dfrac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}$ има трикратен полюс в $z = 0$ и прости полюси в $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, като $z_k \in \operatorname{Int} C_n$ за $k \in [-n, n]$. Тогава

$$\int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}\, dz = 2\pi i \Big(\operatorname{Res}(0) + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{n} \operatorname{Res}(k) \Big). \tag{17}$$

Тъй като C_n лежи в областта G, то $|\operatorname{ctg} \pi z| \leq M$ за $z \in C_n$ и всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава

$$\left| \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}\, dz \right| \leq \frac{M}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Пресмятаме $\operatorname{Res}(k) = \left. \dfrac{\cos \pi z}{z^2 (\sin \pi z)'} \right|_{z=k} = \dfrac{1}{\pi k^2}$, $k \neq 0$. За да пресметнем $\operatorname{Res}(0)$, развиваме подинтегралната функция в ред около $z = 0$:

$$\frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z} = \frac{1 - \dfrac{\pi^2 z^2}{2!} + \dfrac{\pi^4 z^4}{4!} - \cdots}{z^3 \left(\pi - \dfrac{\pi^3 z^2}{3!} + \dfrac{\pi^5 z^4}{5!} - \cdots \right)} = \frac{a_0}{z^3} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \cdots,$$

където $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \dfrac{1 - \dfrac{\pi^2 z^2}{2!} + \dfrac{\pi^4 z^4}{4!} - \cdots}{\pi - \dfrac{\pi^3 z^2}{3!} + \dfrac{\pi^5 z^4}{5!} - \cdots}$ е функция, холоморфна в $z = 0$.

По метода на неопределените коефициенти намираме $a_0 = 1/\pi$, $a_1 = 0$ и $a_2 = -\pi/3 = \operatorname{Res}(0)$. След граничен преход в (17) получаваме

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} = \frac{\pi}{3}, \text{ откъдето } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

б) Съгласно теоремата за резидуумите

$$\int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^4}\, dz = 2\pi i \Big(\operatorname{Res}(0) + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{n} \operatorname{Res}(k) \Big).$$

Както в а) имаме $\int_{C_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Следователно

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \operatorname{Res}(k) = -\operatorname{Res}(0). \tag{18}$$

Пресмятаме $\operatorname{Res}(k) = 1/\pi k^4$, а за $\operatorname{Res}(0)$ следваме метода от а):

$$\frac{\cos \pi z}{z^4 \sin \pi z} = \frac{1}{z^5} \frac{1 - \dfrac{\pi^2 z^2}{2!} + \dfrac{\pi^4 z^4}{4!} - \cdots}{\pi - \dfrac{\pi^3 z^2}{3!} + \dfrac{\pi^5 z^4}{5!} - \cdots} = \frac{a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots}{z^5}.$$

Тук коефициентите a_n с нечетни индекси са нули, тъй като развитата в ред функция е четна. Тогава

$$1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \frac{\pi^4 z^4}{4!} - \cdots = \left(\pi - \frac{\pi^3 z^2}{3!} + \frac{\pi^5 z^4}{5!} - \cdots\right)(a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots)$$

и като сравним коефициентите, намираме $a_0 = 1/\pi$, $a_2 = -\pi/3$ и $a_4 = -\pi^3/45 = \operatorname{Res}(0)$. Заместваме в (18) и получаваме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

в)Последователно получаваме

$$\int_{C_n} \frac{dz}{z^2 \sin \pi z} = 2\pi i \Big(\operatorname{Res}(0) + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \operatorname{Res}(k)\Big),$$

$$\left|\int_{C_n} \frac{dz}{z^2 \sin \pi z}\right| \leq \frac{M}{\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2} 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \operatorname{Res}(k) = \frac{(-1)^k}{\pi k^2}.$$

По-нататък

$$\frac{1}{z^2 \sin \pi z} = \frac{z}{z^3 \sin \pi z} = \frac{1}{z^3 \left(\pi - \dfrac{\pi^3 z^2}{3!} + \dfrac{\pi^5 z^4}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \frac{a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots}{z^3}$$

и $\operatorname{Res}(0) = a_2$. Тук всички коефициенти a_n с нечетни индекси са нули, защото функцията $\dfrac{z}{\sin \pi z}$ е четна. Като приравним коефициентите в равенството

$$1 = \left(\pi - \frac{\pi^3 z^2}{3!} + \cdots\right)(a_0 + a_2 z^2 + \cdots),$$

намираме $a_0 = 1/\pi$, $a_2 = \pi/6$. Накрая след граничен преход получаваме

$$-\frac{\pi}{6} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{\pi n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n^2},$$

откъдето $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

г) Тук имаме

$$\int_{C_n} \frac{dz}{(2z+1)^3 \sin \pi z} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}(k)\right).$$

Очевидно, $\displaystyle\int_{C_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Освен това $\operatorname{Res}(k) = \dfrac{(-1)^k}{\pi(2k+1)^3}$ и след граничен преход получаваме

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = -\pi \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{2}\right). \tag{19}$$

За пресмятането на $\operatorname{Res}(-1/2)$ използваме развитието

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2z+1)^3 \sin \pi z} &= \frac{1}{8\left(z+\frac{1}{2}\right)^3 \sin \pi z} \\ &= \frac{a_0 + a_1\left(z+\frac{1}{2}\right) + a_2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^3},\end{aligned}$$

където

$$\frac{1}{8\sin \pi z} = a_0 + a_1\left(z+\frac{1}{2}\right) + a_2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

Полагаме $z + 1/2 = t$ в последното равенство и получаваме

$$\frac{1}{8\sin\pi z} = \frac{1}{-8\cos\pi t} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

Тъй като $\cos\pi t$ е четна функция, то $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Следователно

$$-\frac{1}{8} = \left(1 - \frac{\pi^2 t^2}{2!} + \frac{\pi^4 t^4}{4!} - \cdots\right)(a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \cdots)$$

и като сравним коефициентите, намираме $a_0 = -1/8$, $a_2 = -\pi^2/16 = \operatorname{Res}(-1/2)$. Така от (19) следва

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{16}.$$

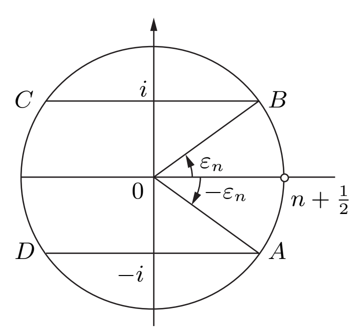
Оттук, като вземем предвид, че след полагането $n = -k-1$ първата сума в равенството става $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$, получаваме $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

д) *Отг.* $\pi^2 \operatorname{ctg}\pi a/\sin\pi a$.

е) Тук

$$\int_{C_n} \frac{(a+z)e^{i\alpha z}\,dz}{(z^2+a^2)\sin\pi z} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(ia) + \operatorname{Res}(-ia) + \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}(k)\right).$$

За намирането на $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}$ да представим C_n (фиг. 9.11) като обединение на четири дъги: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{DA}$. Ако $z = x + iy \in \overset{\frown}{AB}$, то $|y| \le 1$



Фиг. 9.11

и $z = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)e^{i\varphi}$, $-\varepsilon_n \le \varphi \le \varepsilon_n$, където $\sin\varepsilon_n = \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{2}}$ и очевидно $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогава

$$\left|\frac{(a+z)e^{i\alpha z}}{(z^2+a^2)\sin\pi z}\right| \le \frac{n+\dfrac{1}{2}+|a|}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2-|a|^2}\cdot\frac{e^{-\alpha y}}{|\sin\pi z|} \le M\frac{n+\dfrac{1}{2}+|a|}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2-|a|^2},$$

защото функцията $e^{-\alpha y}$ е ограничена за $|y|\le 1$, а $1/\sin\pi z$ е ограничена върху C_n от константа, независеща от n. Следователно

$$\left|\int_{\widehat{AB}}\right| \le M\frac{n+\dfrac{1}{2}+|a|}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2-a^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)2\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

За $z\in\widehat{BC}$, $z=(n+1/2)\,e^{i\varphi}$, $\varepsilon_n\le\varphi\le\pi-\varepsilon_n$, $y\ge 1$ имаме

$$\left|\frac{e^{i\alpha z}}{\sin\pi z}\right| \le \frac{2e^{-\alpha y}}{|e^{-\pi y}-e^{\pi y}|} = \frac{2e^{-(\pi+\alpha)y}}{1-e^{-2\pi y}} \le \frac{2e^{-(\pi+\alpha)y}}{1-e^{-2\pi}} = M_1 e^{-(\pi+\alpha)y}$$

и

$$\left|\int_{\widehat{BC}}\right| \le M_1\frac{n+\dfrac{1}{2}+|a|}{\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2-|a|^2}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{\varepsilon_n}^{\pi-\varepsilon_n} e^{-(\pi+\alpha)\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Тъй като $\pi+\alpha>0$, то $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-(\pi+\alpha)\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\varphi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (вж. зад. 9.36) и следователно $\displaystyle\int_{\widehat{BC}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Аналогично, $\displaystyle\int_{\widehat{CD}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\displaystyle\int_{\widehat{DA}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, откъдето и $\displaystyle\int_{C_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Сега пресмятаме

$$\operatorname{Res}(ia) = \left.\frac{(a+z)e^{i\alpha z}}{2z\sin\pi z}\right|_{z=ia} = \frac{(a+ia)e^{-\alpha a}}{-2a\operatorname{sh}\pi a},\quad \operatorname{Res}(-ia) = \frac{(a-ia)e^{\alpha a}}{-2a\operatorname{sh}\pi a},$$

$$\operatorname{Res}(ia)+\operatorname{Res}(-ia) = \frac{\operatorname{ch}\alpha a - i\operatorname{sh}\alpha a}{-\operatorname{sh}\pi a},\quad \operatorname{Res}(k) = \frac{(a+k)e^{i\alpha k}}{a^2+k^2}\cdot\frac{(-1)^k}{\pi}.$$

Тогава
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(a+n)e^{i\alpha n}}{a^2+n^2}=\pi\frac{\operatorname{ch}\alpha a-i\operatorname{sh}\alpha a}{\operatorname{sh}\pi a}.$$
Като отделим реалните части, получаваме
$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(a+n)\cos\alpha n}{a^2+n^2}\\
&\quad=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{(-1)^n(a+n)\cos\alpha n}{a^2+n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(a+n)\cos\alpha n}{a^2+n^2}\\
&\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(a-n)\cos\alpha n}{a^2+n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(a+n)\cos\alpha n}{a^2+n^2}\\
&\quad=\frac{1}{a}+2a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\alpha n}{a^2+n^2}=\pi\frac{\operatorname{ch}\alpha a}{\operatorname{sh}\pi a}.
\end{aligned}$$
Оттук намираме
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\alpha n}{a^2+n^2}=\frac{\pi a\operatorname{ch}\alpha a-\operatorname{sh}\pi a}{2a^2\operatorname{sh}\pi a}.$$
Аналогично, чрез имагинерните части стигаме до
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin\alpha n}{a^2+n^2}=-\frac{\pi\operatorname{sh}\alpha a}{2\operatorname{sh}\pi a}.$$

ж) Започваме със

$$\int_{C_n}\frac{e^{i\alpha z}dz}{(a+iz)\sin\pi z}=2\pi i\left(\operatorname{Res}(ia)+\sum_{k=-n}^{n}\operatorname{Res}(k)\right),\tag{20}$$
$$\operatorname{Res}(ia)=-\frac{e^{-\alpha a}}{\operatorname{sh}\pi a},\quad \operatorname{Res}(k)=\frac{(-1)^k e^{i\alpha k}}{\pi(a+ik)}.$$

Следвайки решението на е), получаваме, че $\displaystyle\int_{C_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Тогава от (20) следва
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{i\alpha n}}{a+in}=\pi\frac{e^{-\alpha a}}{\operatorname{sh}\pi a}.\tag{21}$$

По-нататък имаме

$$\sum_{k=-n}^{0}\frac{(-1)^k e^{i\alpha k}}{a+ik}=\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k e^{-i\alpha k}}{a-ik},$$

откъдето

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n}\frac{(-1)^k e^{i\alpha k}}{a+ik}&=\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[\frac{e^{-i\alpha k}}{a-ik}+\frac{e^{i\alpha k}}{a+ik}\right]\\&=\frac{1}{a}+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{a\cos\alpha k+k\sin\alpha k}{a^2+k^2}.\end{aligned}$$

Оттук и от (21) намираме

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos\alpha n+n\sin\alpha n}{a^2+n^2}=\frac{\pi e^{-\alpha a}}{2\operatorname{sh}\pi a}-\frac{1}{2a}.$$

з) Най-напред ще покажем, че $\displaystyle\int_{C_n}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z}\,dz=0$. Действително,

$$\int_{C_n}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z}\,dz=2\pi i\Big(\operatorname{Res}(0)+\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\operatorname{Res}(k)\Big),$$

като $\operatorname{Res}(k)=\dfrac{1}{k\pi}$ и значи $\displaystyle\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\operatorname{Res}(k)=0$. Освен това

$$\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z}=\frac{z\cos\pi z}{z^2\sin\pi z}=\frac{1}{z^2}\frac{\cos\pi z}{\pi-\frac{\pi^3z^2}{3!}+\cdots}=\frac{a_0+a_2z^2+a_4z^4+\cdots}{z^2},$$

защото функцията $\dfrac{z\cos\pi z}{\sin\pi z}$ е четна. Така $\operatorname{Res}(0)=a_1=0$, а оттам и $\displaystyle\int_{C_n}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z}\,dz=0$. Тогава

$$\int_{C_n}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{3z+1}\,dz=\int_{C_n}\left(\frac{1}{3z+1}-\frac{1}{3z}\right)\operatorname{ctg}\pi z\,dz=-\frac{1}{3}\int_{C_n}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z(3z+1)}\,dz.$$

Но $\displaystyle\left|\int_{C_n}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{z(3z+1)}\,dz\right|\leq\frac{M2\pi R_n}{R_n(3R_n-1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, където $R_n=n+1/2$.

Следователно $\displaystyle\int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{3z+1}\, dz \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. От друга страна,

$$\int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{3z+1}\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{3}\right) + \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}(k) \right).$$

Пресмятаме

$$\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}{3} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \quad \operatorname{Res}(k) = \frac{1}{\pi(3k+1)}$$

и след граничен преход получаваме

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{3n+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Разлагане на мероморфни функции в редове от елементарни рационални функции

Нека $f(z)$ е мероморфна функция и $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от раздуващи се жорданови криви. Нека освен това

$$\int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{22}$$

Тогава, пресмятайки интеграла чрез теоремата за резидуумите, след граничен преход получаваме представяне на f в ред от елементарни рационални функции.

Ако (22) не е изпълнено, но съществува естествено число p, такова че

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{C_n} |f(z)|}{\min\limits_{C_n} |z|^p} < +\infty,$$

то като представим ядрото на Коши във вида

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\frac{1}{1-\dfrac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z^p}{\zeta^{p+1}} + \frac{z^{p+1}}{\zeta^{p+1}} \cdot \frac{1}{\zeta - z},$$

после пресметнем интеграла от (22) и направим граничен преход, отново получаваме представяне на f в ред от елементарни рационални функции.

9.66. Да се докажат формулите:

а) $\pi \operatorname{ctg} \pi z = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$, $z \notin \mathbb{Z}$;

б) $\dfrac{\pi}{\sin \pi z} = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$, $z \notin \mathbb{Z}$;

в) $\dfrac{\pi}{\operatorname{sh} \pi z} = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 + n^2}$, $z \neq ik$, $k \in \mathbb{Z}$;

г) $\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$, $z \notin \mathbb{Z}$;

д) $\dfrac{z}{e^z - 1} = 1 - \dfrac{z}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 + 4n^2\pi^2}$, $z \neq 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Навсякъде по-нататък $C_n = C(0, R_n)$, $R_n = n + 1/2$ и M е константа, независеща от n.

а) Имаме $\dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{\zeta} + \dfrac{z}{\zeta} \dfrac{1}{\zeta - z}$. Тогава

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi\zeta}{\zeta}\, d\zeta + \frac{z}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi\zeta}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta. \tag{23}$$

Чрез теоремата за резидуумите пресмятаме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi\zeta}{\zeta - z}\, d\zeta = \operatorname{Res}(z) + \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}(k) = \operatorname{ctg} \pi z + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\pi(k - z)},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi\zeta}{\zeta}\, d\zeta = \operatorname{Res}(0) + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{n} \operatorname{Res}(k) = 0$$

(вж. решението на зад. 9.65 з)). Освен това

$$\left| \int_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi\zeta}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta \right| \leq \frac{M 2\pi R_n}{R_n(R_n - |z|)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Накрая след граничен преход в (23) получаваме

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z - k} = \frac{1}{z} + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{z + k} \right)$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

б) *Упътване.* Следвайте стриктно изложеното решение на а).

в) *Упътване.* Използвайте формулата $\sin iz = i \operatorname{sh} z$ и резултата от б).

г) *Упътване.* Използвайте формулата от а) и равенството $\dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = -(\pi \operatorname{ctg} \pi z)'$.

д) Съгласно зад. 5.8 имаме $\dfrac{1}{|e^z - 1|} \leq M$ за $z \in C_n$, $C_n = C(0, R_n)$, като сега $R_n = 2\pi\,(n + 1/2)$. Тогава $\left|\dfrac{z}{e^z - 1}\right| \leq M|z|$, $z \in C_n$. Представяме ядрото на Коши във вида

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^2}\frac{1}{\zeta - z} \quad (p = 1)$$

и получаваме

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\zeta}{(e^\zeta - 1)(\zeta - z)}\, d\zeta \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\zeta}{e^\zeta - 1}\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2}\right) d\zeta + \frac{z^2}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\zeta\, d\zeta}{(e^\zeta - 1)\zeta^2(\zeta - z)} \\
&\quad = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\zeta + z}{\zeta(e^\zeta - 1)}\, d\zeta + \frac{z^2}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{d\zeta}{(e^\zeta - 1)\zeta(\zeta - z)}.
\end{aligned} \tag{24}$$

По-нататък последователно пресмятаме

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\zeta}{(e^\zeta - 1)(\zeta - z)}\, d\zeta &= \operatorname{Res}(z) + \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}(2k\pi i) \\
&= \frac{z}{e^z - 1} + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{2k\pi i}{2k\pi i - z}, \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\zeta + z}{\zeta(e^\zeta - 1)}\, d\zeta &= \operatorname{Res}(0) + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \operatorname{Res}(2k\pi i) \\
&= 1 - \frac{z}{2} + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \left(1 + \frac{z}{2k\pi i}\right) = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} 1,
\end{aligned}$$

защото $\displaystyle\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\frac{1}{2k\pi i}=0$. Накрая, тъй като

$$\left|\int_{C_n}\frac{d\zeta}{(e^\zeta-1)\zeta(\zeta-z)}\right|\le M\frac{2\pi R_n}{R_n(R_n-|z|)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

след граничен преход в (24) получаваме

$$\begin{aligned}\frac{z}{e^z-1}&=1-\frac{z}{2}+\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\left(1-\frac{2k\pi i}{2k\pi i-z}\right)\\&=1-\frac{z}{2}-z\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{-1}\frac{1}{2k\pi i-z}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k\pi i-z}\right)\\&=1-\frac{z}{2}-z\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k\pi i-z}-\frac{1}{2k\pi i+z}\right)\\&=1-\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2+4n^2\pi^2}.\end{aligned}$$

§ 10. Принцип за максимума. Лема на Шварц. Теорема за единственост. Принцип за аргумента

В този параграф са включени задачи, свързани със следните основни резултати от комплексния анализ:

- *Принцип за максимума* (вж. задачи 10.1 и 10.4 и забележките след тях).
- *Лема на Шварц.* Нека $f(z)$ е холоморфна в кръга $K(0,R)$, $|f(z)| \leq M$ за всяко $z \in K(0,R)$ и $f(0) = 0$. Тогава

  $$|f(z)| \leq M\frac{|z|}{R}, \quad z \in K(0,R); \tag{1}$$

  $$|f'(0)| \leq \frac{M}{R}. \tag{2}$$

  При това равенство в (1) (при $z \neq 0$) или в (2) има само ако $f(z) = \dfrac{M}{R}e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- *Теорема за единственост.* Ако $f(z)$ е холоморфна в област D и множеството от нулите ѝ има поне една точка на сгъстяване в D, то $f(z) \equiv 0$, $z \in D$.
- *Теорема за логаритмичния индикатор и принцип за аргумента.* Нека γ е затворена жорданова крива, $f(z)$ е холоморфна в околност на $\gamma \cup \operatorname{Int}\gamma$ с изключение на краен брой полюси в $\operatorname{Int}\gamma$ и $f(z) \neq 0$, $z \in \gamma$. Тогава

  $$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f(z),$$

  където N и P са съответно броят на нулите и полюсите на f в $\operatorname{Int}\gamma$, а $\Delta_\gamma \arg f(z)$, е изменението на $\arg f(z)$, когато z опише γ веднъж в положителна относно $\operatorname{Int}\gamma$ посока.
- *Теорема на Руше.* Нека γ е затворена жорданова крива, функциите f и g са холоморфни в околност на $\gamma \cup \operatorname{Int}\gamma$ и $|g(z)| < |f(z)|$, $z \in \gamma$. Тогава функцията $f + g$ има толкова нули в $\operatorname{Int}\gamma$, колкото и f.

10.1. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена област и $f(z)$ е функция, холоморфна в D. Да се докаже, че за всяко $a \in D$ и всяко r, за което $K(a,r) \subset D$, е в сила равенството

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

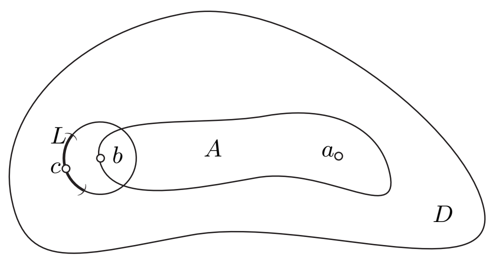
Като се използва това равенство, да се докаже, че или $f(z)$ е тъждествено константа, или за всяко $a \in D$ съществува $z = z(a) \in D$, такова че $|f(a)| < |f(z)|$.

Решение. От формулата на Коши имаме

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi}\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Тази формула обикновено наричаме *формула за средната стойност.*

Да допуснем сега, че твърдението не е вярно. Това означава, че $f(z)$ не е константа и съществува $a \in D$, такова че за всяко $z \in D$ имаме $|f(z)| \le |f(a)|$. Нека $A = \{z \in D : |f(z)| = |f(a)|\}$. Тъй като $|f(z)|$ е непрекъсната функция, то A е затворено подмножество на D ($f \not\equiv \mathrm{const}$) и следователно $D \setminus A$ е отворено. Ще докажем, че A е и отворено. Да допуснем, че това не е така. Тогава (фиг. 10.1) съществува точка $b \in A$, която не е вътрешна за A. Това означава, че за всеки кръг $K(b, r_0) \subset D$



Фиг. 10.1

съществува точка $c \in K(b, r_0) \cap (D \setminus A)$. Нека $r = |b - c|$. Тъй като $D \setminus A$ е отворено, съществува интервал $[\alpha, \beta]$, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, такъв че затворената дъга $L = \{z : z = b + re^{i\varphi}, \alpha \le \varphi \le \beta\}$ от окръжността $C(b, r)$ лежи изцяло в $D \setminus A$. Тогава $|f(z)| < |f(a)|$ за всяко $z \in L$ и следователно съществува достатъчно малко $\varepsilon > 0$, такова че $|f(z)| \le |f(a)| - \varepsilon$, $z \in L$. От формулата за средната стойност имаме

$$|f(a)| = |f(b)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(b+re^{i\varphi})\,d\varphi\right|$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\left[\int_\alpha^\beta |f(b+re^{i\varphi})|\,d\varphi + \int_{[0,2\pi]\setminus[\alpha,\beta]} |f(b+re^{i\varphi})|\,d\varphi\right] \tag{3}$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\left[(|f(a)| - \varepsilon)(\beta-\alpha) + |f(a)|(2\pi - (\beta - \alpha))\right]$$
$$= |f(a)| - \frac{\varepsilon}{2\pi}(\beta - \alpha) < |f(a)|.$$

Това противоречие показва, че A е отворено. Тъй като D е област и $A \neq \emptyset$ $(a \in A)$, то следва, че $D \setminus A = \emptyset$ и $A \equiv D$, т. е. $|f(z)| = |f(a)|$ за всяко $z \in D$. Сега от зад. 2.8 следва, че $f(z) \equiv f(a)$, $z \in D$, което противоречи на допускането. Твърдението е доказано.

Забележка 1. Това твърдение е известно като *принцип за максимума* и се използва най-често в следната форма: Ако f е холоморфна в област D, то $|f(z)|$ не може да достига максимума си във вътрешна точка на D, освен ако $f \equiv \mathrm{const}$.

Забележка 2. От (3) се вижда, че съществено за доказателството е не формулата за средната стойност, а неравенството

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\varphi})| \, d\varphi.$$

Като използвате това обстоятелство, докажете следното по-общо твърдение:

Нека $f(z)$ е реалнозначна непрекъсната функция в ограничена област D, такава че за всяко $a \in D$ и всяко $r > 0$, за което $K(a, r) \subset D$, е в сила неравенството

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\varphi}) \, d\varphi.$$

Тогава или f е константа, или за всяко $a \in D$ съществува $z = z(a)$, такова че $f(a) < f(z)$, т. е. за f е в сила принципът за максимума.

10.2. Нека $P_1, P_2, \ldots, P_n$ са фиксирани точки в равнината $\mathbb{C}$ и за всяка точка $P \in \mathbb{C}$ $|PP_k|$ е дължината на отсечката PP_k. Нека $f(P) = \prod_{k=1}^{n} |PP_k|$. Да се докаже, че ако $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена област, то максимумът на функцията $f(P)$ в $\overline{D}$ се достига върху ∂D.

Решение. Нека z и z_k са комплексните числа, съответстващи на P и P_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Полиномът $g(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$ е холоморфна в $\overline{D}$ функция и според принципа за максимума $|g(z)|$ достига максимума си върху ∂D. Остава да се забележи, че $f(P) = |g(z)|$.

10.3. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена област, $f(z)$ е холоморфна в D функция и M е константа, такава че за всяко $\zeta \in \partial D$ е в сила неравенството $\limsup\limits_{z \to \zeta} |f(z)| \leq M$. Да се докаже, че $|f(z)| \leq M$ за всяко $z \in D$, като равенство се достига само ако $f \equiv \mathrm{const}$.

Решение. Нека $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ са фиксирани. Съгласно дефиницията на $\limsup$ за всяко $\zeta \in \partial D$ съществува $r = r(\zeta, \varepsilon)$, $r < \delta$, такова че за всяко $z \in D \cap K(\zeta, r)$ имаме $|f(z)| \leq M + \varepsilon$. Кръговете $K(\zeta, r)$, $\zeta \in \partial D$, покриват компакта ∂D и можем да изберем крайно подпокритие $K(\zeta_1, r_1), \ldots, K(\zeta_n, r_n)$. Тогава за $z \in D \cap \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{K(\zeta_k, r_k)} \right)$ ще имаме $|f(z)| \leq M + \varepsilon$. Нека $D_\delta = D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} K(\zeta_k, r_k)$. Тогава $\partial D_\delta \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{K(\zeta_k, r_k)}$ и следователно $|f(z)| \leq M + \varepsilon$ за $z \in \partial D_\delta$. Съгласно принципа за максимума същото неравенство е в сила и за $z \in \overline{D}_\delta$. Ако сега $z \in D$ е произволно и $\delta < \operatorname{dist}(z, \partial D)$, то $z \in D_\delta$ и значи $|f(z)| \leq M + \varepsilon$. Оттук, понеже $\varepsilon > 0$ е произволно, следва $|f(z)| \leq M$. Съгласно зад. 10.1 равенство се достига само ако $f(z) \equiv \text{const} = Me^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

10.4. Нека $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ е произволна област и f е функция, холоморфна в D. Да се докаже, че или $f(z) \equiv \text{const}$, или за всяко $a \in D$ съществува $z = z(a) \in D$, такова че $|f(a)| < |f(z)|$, т. е. принципът за максимума е валиден за произволна област в $\overline{\mathbb{C}}$.

Решение. Да допуснем, че $f \not\equiv \text{const}$ и съществува $a \in D$, такова че $|f(z)| \leq |f(a)|$ за всяко $z \in D$. Ако $a \neq \infty$, то $|f(z)| \leq |f(a)|$ за всяко $z \in K(a, r) \subset D$ и съгласно зад. 10.1 $f(z) \equiv \text{const}$ за $z \in K(a, r)$. Тогава (теорема за единственост) $f(z) \equiv \text{const}$, $z \in D$. Ако $a = \infty$, то при достатъчно голямо $R > 0$, $\{z : |z| > R\} \subset D$ и $|f(z)| \leq |f(\infty)|$ за $|z| > R$. Съгласно дефиницията на холоморфност в ∞ (вж. § 8) функцията $\varphi(z) = f(1/z)$ е холоморфна в кръга $|z| < 1/R$ и там $|\varphi(z)| \leq |\varphi(0)|$. Оттук следва, че $\varphi(z) \equiv \text{const}$ за $|z| < 1/R$, т. е. $f(z) \equiv \text{const}$ за $|z| > R$. Следователно (теорема за единственост) $f(z) \equiv \text{const}$ за $z \in D$.

Забележка. От принципа за максимума следва, че ако $f(z)$ е холоморфна в $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ и непрекъсната в $\overline{D}$, то от $|f(z)| \leq M$ за $z \in \partial D$ следва $|f(z)| \leq M$ за $z \in \overline{D}$. При използването на това свойство за неограничени области трябва да се внимава. Например $\sin z$ е холоморфна в $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ и за $z \in \mathbb{R} = \partial D$ имаме $|\sin z| \leq 1$, докато $|\sin z|$ расте неограничено с растенето на $\operatorname{Im} z$ (вж. решението на зад. 5.4). Причината е, че $\sin z$ не е непрекъсната в $\overline{D} = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \{\infty\}$.

10.5. Нека $f(z) = e^{\frac{1-z}{1+z}}$, $|z| \leq 1$, $z \neq -1$.

а) Да се докаже, че ако $|z| = 1$, $z \neq -1$, то $|f(z)| = 1$.

б) За всяко $R > 0$ да се опише множеството от точки z, за които

$|f(z)| = R$.

в) Вярно ли е, че ако $|z| < 1$, то $|f(z)| < 1$? Ако не е, не противоречи ли това на принципа за максимума? Обосновете отговора.

Решение. Дробно-линейната функция $w = \dfrac{1-z}{1+z}$ изобразява еднолистно и конформно кръга $|z| \le 1$ върху дясната полуравнина $\operatorname{Re} w \ge 0$.

а) Следва от това, че $|f(z)| = e^{\operatorname{Re} w}$.

б) Нека $L = \{z : |f(z)| = R\}$. Ясно е, че $L = \emptyset$ за $0 < R < 1$ и $L = \{z : |z| = 1\}$ за $R = 1$. От свойствата на трансформациите $w = \dfrac{1-z}{1+z}$ и e^w следва, че за $R > 1$ L е окръжност с център в точката $\dfrac{-\ln R}{1+\ln R}$, допираща се до единичната окръжност в -1.

в) Не е вярно, защото $f(0) = e > 1$. Не противоречи на принципа за максимума, тъй като не съществува $\lim\limits_{z\to -1} f(z)$. В последното се убеждаваме, като оставим z да клони към -1 веднъж по реалната ос и втори път по L.

10.6. Нека $f(z)$ е холоморфна в област D и $f(z)$ няма нули в D. Да се докаже, че или $f(z) \equiv \text{const}$, или за всяко $a \in D$ съществува $z = z(a) \in D$, такова че $|f(a)| > |f(z)|$, т. е. $|f|$ не достига минимума си в D.

Решение. Ако $|f|$ достига минимума си в D, то холоморфната функция $g(z) = 1/f(z)$ ще достига максимума си в D. Следователно $g(z) \equiv \text{const}$, а оттук и $f(z) \equiv \text{const}$, $z \in D$.

Забележка. Твърдението в зад. 10.6 е известно като *принцип за минимума.*

10.7. Нека $f(z)$ е холоморфна в $K(0,1)$, $|f(z)| \le M$, $z \in K(0,1)$ и z_k, $|z_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, са нули на f. Да се докаже, че

$$|f(z)| \le M \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z - z_k}{1 - \overline{z}_k z} \right|.$$

Решение. Функциите $\varphi_k(z) = (z - z_k)/(1 - \overline{z}_k z)$, $k = 1, 2, \dots, n$, изобразяват единичния кръг в себе си. Нека $m_k(\varepsilon) = \min\{|\varphi_k(z)| : |z| = 1 - \varepsilon\}$, където $0 < \varepsilon < 1$ е произволно. Тогава $m_k(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$ и следователно $m(\varepsilon) = \min\{m_k(\varepsilon),\ k = 1, 2, \dots, n\} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 1$. Функцията $\varphi(z) = f(z)/\prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(z)$ е холоморфна в $K(0,1)$ и върху $C(0, 1-\varepsilon)$ удовлетворява неравенството $|\varphi(z)| \le M/(m(\varepsilon))^n$. От принципа за максимума следва, че то е изпълнено и за $z \in K(0, 1-\varepsilon)$. Сега като оставим ε да клони към 0, ще получим, че $|\varphi(z)| \le M$ за всяко $z \in K(0,1)$, откъдето $|f(z)| \le M \prod\limits_{k=1}^{n} |\varphi_k(z)|$, което и трябваше да се докаже.

10.8. Нека $P(z)$ е полином със старши коефициент единица. Да се докаже, че $\max\limits_{|z|=1} |P(z)| \ge 1$. Кога се достига равенство?

Решение. Имаме $P(z) = z^n \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \dfrac{a_0}{z^n}\right) = z^n \varphi(z)$. Функцията $\varphi(z)$ е холоморфна в областта $|z| > 1$, непрекъсната е за $|z| \ge 1$ и $\varphi(\infty) = 1$. От принципа за максимума следва, че $\max\limits_{|z|=1} |\varphi(z)| \ge 1$, откъдето $\max\limits_{|z|=1} |P(z)| \ge 1$.

Ако $\max\limits_{|z|=1} |P(z)| = 1$, то $\max\limits_{|z|=1} |\varphi(z)| = 1 = \varphi(\infty)$, откъдето $\varphi \equiv \mathrm{const} = \varphi(\infty) = 1$ и тогава $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, т. е. $P(z) = z^n$.

10.9. Нека $P_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ е полином от степен n и $\max\limits_{[-1,1]} |P_n(z)| = 1$. Да се докаже, че:

а) $|P_n(z)| \le \left|z + \sqrt{z^2-1}\right|^n$ за всяко $z \notin [-1,1]$, където $\sqrt{z^2-1}$ е този еднозначен клон, за който $\sqrt{z^2-1}\Big|_{z=i} = i\sqrt{2}$;

б) $|a_n| \le 2^n$.

Решение. При така фиксирания еднозначен клон на корена функцията $\varphi(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ е холоморфна в областта $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]$ и я изобразява еднолистно и конформно върху външността на единичния кръг, като $\varphi(\infty) = \infty$ и $|\varphi(z)| = 1$, $z \in [-1,1]$ (това е еднозначен клон на обратната функция на Жуковски). Тогава функцията $g(z) = P_n(z)/\varphi^n(z)$ е холоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1,1]$. Прилагаме принципа за максимума за външността на елипсата, ограждаща „разреза“ $[-1,1]$, която е прообраз на окръжността $|w| = \rho$ при трансформацията $w = \varphi(z)$, и след това оставяме ρ да клони към 1. Получаваме:

а) за $z \notin [-1,1]$ $|g(z)| \le \max\limits_{[-1,1]} |g(z)| = 1 \iff |P_n(z)| \le |\varphi(z)|^n$.

б) $\dfrac{|a_n|}{2^n} = |g(\infty)| \le \max\limits_{[-1,1]} |g(z)| = 1 \iff |a_n| \le 2^n$.

10.10. Нека D е ограничена област и $f(z)$ е функция, холоморфна в D, непрекъсната в $\overline{D}$ и $|f(z)| = \mathrm{const}$ за $z \in \partial D$. Да се докаже, че или

$f(z)$ има поне една нула в D, или $f(z) \equiv \text{const}$, $z \in D$.

Решение. Нека непрекъснатата функция $|f(z)|$ достига минимума и максимума си върху компакта $\overline{D}$ съответно в точките a и b. От принципа за максимума (зад. 10.1) следва, че $b \in \partial D$. Ако $f(z) \neq 0$ в D, то от принципа за минимума (зад. 10.6) следва, че и $a \in \partial D$. Тогава съгласно условието имаме $|f(a)| = |f(b)|$ и тъй като $|f(a)| \leq |f(z)| \leq |f(b)|$ за всяко $z \in \overline{D}$, то $|f(z)| \equiv |f(a)| = \text{const}$, $z \in D$. Сега от зад. 2.8 следва, че $f(z) \equiv \text{const}$, $z \in D$.

10.11. Нека $P(z)$ е полином от степен $n \geq 1$ и $r > 0$. Да се докаже, че множеството $E_r = \{z : |P(z)| < r\}$ е обединение на не повече от n едносвързани области. Покажете, че E_r са едносвързани области за достатъчно големи r.

Решение. Множеството E_r е отворено и $\partial E_r = \{z : |P(z)| = r\}$. Тогава $E_r = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$, където D_k са непресичащи се области и $\partial D_k \subset \partial E_r$. Тъй като $P(z)$ не е константа, то всяка от областите D_k съдържа поне една нула на $P(z)$ (вж. зад. 10.10). Следователно броят им не надминава n. Ако D_k е една от тези области, нека $\gamma \subset D_k$ е затворена жорданова крива. За $z \in \gamma$ имаме, че $|P(z)| < r$ и от принципа за максимума следва, че неравенството е в сила и за точките от вътрешността $\operatorname{Int}\gamma$ на γ. Това означава, че $\operatorname{Int}\gamma \subset E_r$, откъдето следва (защо?), че $\operatorname{Int}\gamma \cup \gamma \subset D_k$, т. е. D_k е едносвързана област.

Нека $P(z) = a_n \prod\limits_{k=1}^{n} (z - z_k)$ и $R > 0$ е такова, че $|z_k| < \dfrac{R}{2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогава $|P(z)| < |a_n| R^n$ за всяко z от кръга $K(0, R/2)$. Оттук следва, че за $r > |a_n| R^n$ този кръг се съдържа в E_r и тъй като всяка от областите D_k съдържа поне една нула на $P(z)$ и $K(0, R/2)$ е свързано множество, то $K(0, R/2) \subset D_k$ за всяко k. Следователно E_r има само една компонента на свързаност, т. е. E_r е област, при това едносвързана.

10.12. Нека D е ограничена област и функциите $f(z)$ и $g(z)$ са холоморфни в D, непрекъснати в $\overline{D}$ и имат едни и същи нули (броени с кратностите им) в D. Да се докаже, че ако $|f(z)| = |g(z)| \neq 0$, $z \in \partial D$, то $f(z) = \lambda g(z)$, $|\lambda| = 1$, $z \in \overline{D}$.

Решение. От условието следва, че функцията $\varphi(z) = f(z)/g(z)$ е холоморфна и различна от нула в D, непрекъсната е в $\overline{D}$ и $|\varphi(z)| = 1$, $z \in \partial D$. Тогава от зад. 10.10 следва, че $\varphi(z) \equiv \lambda$, $z \in \overline{D}$, т. е. $f(z) = \lambda g(z)$.

10.13. Нека $f(z)$ е холоморфна в кръга $K(0,1)$ с изключение на краен брой полюси, непрекъсната е в $\overline{K(0,1)}$ и $|f(z)| = 1$ за $z \in C(0,1)$. Да се докаже, че $f(z)$ е рационална функция.

Упътване. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_p$ са съответно нулите и полюсите на $f(z)$, броени със съответните им кратности. Функциите $f(z) \prod\limits_{k=1}^{p} (z - b_k)/(1 - \overline{b}_k z)$ и $g(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} (z - a_k)/(1 - \overline{a}_k z)$ удовлетворяват условията в зад. 10.12.

10.14. Нека $f(z)$ е цяла функция ($f \not\equiv \text{const}$) и $|f(z)| = 1$ за $z \in C(0,1)$. Да се докаже, че $f(z) = \lambda z^n$, $|\lambda| = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Тъй като $f \not\equiv \text{const}$, то f има краен брой нули $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в кръга $K(0,1)$. Тогава (зад. 10.13) $f(z) = \lambda \prod\limits_{k=1}^{n} (z - a_k)/(1 - \overline{a}_k z)$, т. е. $f(z)$ е рационална функция с полюси в точките $1/\overline{a}_k$. Тъй като f е цяла функция, това е възможно само ако $1/\overline{a}_k = \infty$, т. е. $a_k = 0$ за всяко k. Следователно $f(z) = \lambda z^n$.

10.15. Нека $f(z)$ е цяла функция и $|f(z)| \leq 1/|\operatorname{Im} z|$, $z \in \mathbb{C}$. Да се докаже, че $f(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$.

Решение. Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ е произволна точка и $R > 0$ е такова, че $|z_0| < R$. Функцията $g(z) = (z^2 - R^2) f(z)$ също е цяла и за $|z| = R$ имаме

$$|g(z)| = |z - R|\,|z + R|\,|f(z)| = 2S|f(z)| = 2R|\operatorname{Im} z|\,|f(z)| \leq 2R,$$

където S е лицето на триъгълника с върхове в точките $-R$, R и z. От принципа за максимума следва, че $|g(z_0)| < 2R \iff |f(z_0)| < \dfrac{2R}{R^2 - |z_0|^2}$. При $R \to \infty$ получаваме, че $f(z_0) = 0$.

10.16. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в единичния кръг $K(0,1)$, и $|f(z)| < 1$, $z \in K(0,1)$. Да се докаже, че:

а) $\left| \dfrac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z} \right|$ за всеки $z, z_0 \in K(0,1)$;

б) $|f'(z_0)| \leq \dfrac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}$, $z_0 \in K(0,1)$.

Решение. а) Нека $w = f(z)$ и $\zeta = \varphi(z) = \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$, $\psi(w) = \dfrac{w - w_0}{1 - \overline{w_0} w}$. Функцията $g(\zeta) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\zeta)$ е холоморфна в $K(0,1)$, $g(0) = 0$, $|g(\zeta)| \leq 1$, $\zeta \in K(0,1)$, т. е. тя удовлетворява условията в лемата на Шварц. Следователно $|g(\zeta)| \leq |\zeta|$, $\zeta = \varphi(z) \iff |\psi(f(z))| \leq |\varphi(z)|$.

б) Следва от а), като направим граничен преход при $z \to z_0$.

10.17. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в горната полуравнина $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, и $\operatorname{Im} f(z) > 0$, $z \in H$. Да се докаже, че:

а) $\left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-\overline{f(z_0)}}\right| \le \left|\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}\right|$ за всеки $z, z_0 \in H$;

б) $|f'(z_0)| \le \dfrac{\operatorname{Im} f(z_0)}{\operatorname{Im} z_0}$, $z_0 \in H$.

Упътване. Следвайте решението на зад. 10.16, като използвате трансформациите $\varphi(z) = \dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$ и $\psi(w) = \dfrac{w-w_0}{w-\overline{w}_0}$, изобразяващи горната полуравнина в единичния кръг.

10.18. Да се докаже, че ако функцията $f(z)$ е холоморфна в $K(0,1)$, $|f(z)| < 1$, $z \in K(0,1)$, и има две различни неподвижни точки $a, b \in K(0,1)$, то $f(z) = z$.

Решение. Функцията $\zeta = g(z) = \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ изобразява единичния кръг в себе си, като $g(a) = 0$, $g(b) = \zeta_1 := \dfrac{b-a}{1-\overline{a}b}$. Тогава функцията $\varphi(\zeta) = g \circ f \circ g^{-1}(\zeta)$ е холоморфна в $K(0,1)$, $|\varphi(\zeta)| \le 1$, $\zeta \in K(0,1)$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(\zeta_1) = \zeta_1$. От лемата на Шварц следва, че $\varphi(\zeta) = \zeta$. Тогава $f(z) = g^{-1} \circ \varphi \circ g(z) = g^{-1} \circ g(z) = z$.

10.19. Нека $D = \{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\}$. Да се докаже, че:

а) трансформацията $w = \operatorname{tg} \dfrac{z}{2}$ изобразява D еднолистно и конформно върху единичния кръг;

б) ако $f(z)$ е функция, холоморфна в D, $f(0) = 0$ и $|f(z)| \le 1$, $z \in D$, то $|f(z)| \le \left|\operatorname{tg} \dfrac{z}{2}\right|$, $z \in D$.

Решение. а) Следва от това, че $\operatorname{tg} \dfrac{z}{2} = -i\dfrac{e^{iz}-1}{e^{iz}+1}$.

б) От а) следва, че функцията $g(w) = f(z)$, $w = \operatorname{tg} \dfrac{z}{2}$, е холоморфна в $K(0,1)$, $g(0) = 0$ и $|g(w)| \le 1$. Тогава $|g(w)| \le |w| \iff |f(z)| \le \left|\operatorname{tg} \dfrac{z}{2}\right|$.

10.20. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в $K(0,1)$, и $|f(z)| \le 1$, $z \in K(0,1)$. Да се докаже, че

$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)|\,|z|} \le |f(z)| \le \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)|\,|z|}.$$

Решение. От зад. 10.16 а) (при $z_0 = 0$) имаме $\left|\dfrac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(0)}f(z)}\right| \le |z|$, $z \in K(0,1)$. Това означава, че точката $\zeta = f(z)$ принадлежи на прообраза на кръга $\{w : |w| < |z|\}$ при трансформацията $w = \dfrac{\zeta - f(0)}{1-\overline{f(0)}\zeta}$. От свойствата на дробно-линейната трансформация (вж. § 3) следва, че това е кръг с диаметър, чиито краища са в точките

$$a = \frac{|f(0)|-|z|}{1-|f(0)|\,|z|}\cdot\frac{f(0)}{|f(0)|} \quad \text{и} \quad b = \frac{|f(0)|+|z|}{1+|f(0)|\,|z|}\cdot\frac{f(0)}{|f(0)|}.$$

При това a и b са точките от този кръг, съответно с най-малък и най-голям модул, т. е. $|a| \le |f(z)| \le |b|$.

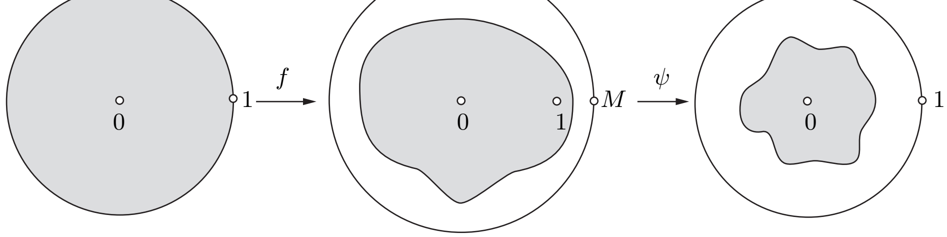
Забележка. Сравнете тази задача със зад. 3.31.

10.21. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в $K(0,1)$, $f(0) = 1$ и $|f(z)| \le M$, $z \in K(0,1)$. Да се докаже, че в кръга $K(0,1/M)$ е изпълнено неравенството $|f(z)-1| \le M|z|$.

Решение. Ако $f \equiv \mathrm{const}$ в $K(0,1)$, то $f \equiv 1$ (понеже $f(0) = 1$) и неравенството е очевидно. Нека сега $f \not\equiv \mathrm{const}$. Трансформацията $\psi(w) = M\dfrac{w-1}{M^2-w}$ изобразява $K(0,M)$ в $K(0,1)$ (вж. зад. 3.24 в)), така че $\psi(1) = 0$. Тогава (фиг. 10.2) функцията

$$\varphi(z) = M\frac{f(z)-1}{M^2-f(z)} \tag{4}$$

е холоморфна в $K(0,1)$, $\varphi(0) = 0$ и $|\varphi(z)| < 1$, $z \in K(0,1)$. Следователно (лема на Шварц) $|\varphi(z)| \le |z|$, $z \in K(0,1)$, и в частност, ако



Фиг. 10.2

$z \in K(0, 1/M)$, то $|\varphi(z)| \leq 1/M$. Сега от (4) получаваме

$$f(z) - 1 = \frac{\varphi(z)(M^2 - 1)}{M + \varphi(z)}$$

и за $|z| \leq 1/M$ имаме

$$|f(z) - 1| \leq \frac{|\varphi(z)|(M^2 - 1)}{M - |\varphi(z)|} \leq \frac{\frac{1}{M}(M^2 - 1)}{M - \frac{1}{M}} = 1.$$

Тогава от лемата на Шварц за функцията $f(z) - 1$ в кръга $K(0, 1/M)$ следва

$$|f(z) - 1| \leq \frac{|z|}{1/M} = M|z|.$$

10.22. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в кръга $K(0, R)$ и непрекъсната в $\overline{K(0, R)}$. Да се докаже, че $f(z)$ няма нули в кръга $\{z : |z| < \frac{|f(0)|R}{M + |f(0)|}\}$, където $M = \max\{|f(z)|,\, z \in \overline{K(0, R)}\}$.

Решение. Нека $z_0 \in K(0, R)$ и $f(z_0) = 0$. Прилагаме лемата на Шварц към функцията $g(z) = f(z) - f(0)$ и получаваме $|g(z)| \leq \frac{M + |f(0)|}{R}|z|$. Оттук за $z = z_0$ следва, че $|z_0| \geq \frac{|f(0)|R}{M + |f(0)|}$.

10.23. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област и $u(z)$ е хармонична в D функция. Да се докаже, че ако $u(z)$ достига минимума или максимума си във вътрешна точка на D, то $u(z) \equiv \text{const}$, $z \in D$.

Решение. Нека $a \in D$ е такава, че $u(z) \leq u(a)$ за всяко $z \in D$. Нека $K(a, r) \subset D$. Тъй като $K(a, r)$ е едносвързана област (зад. 7.22), съществува холоморфна в $K(a, r)$ функция $f(z)$, за която $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$. Функцията $e^{f(z)}$ е холоморфна в $K(a, r)$ и $|e^{f(z)}| = e^{u(z)} \leq e^{u(a)} = |e^{f(a)}|$. От принципа за максимума следва, че $e^{f(z)} \equiv \text{const}$, $z \in K(a, r)$, откъдето $u(z) \equiv u(a)$, $z \in K(a, r)$.

Нека $A = \{z \in D : u(z) = u(a)\}$. Множеството A е затворено и непразно, тъй като $K(a, r) \subset A$. Но A е и отворено. Действително, ако $b \in A$, то $u(b) = u(a) \geq u(z)$, $z \in D$, и както по-горе съществува кръг $K(b, \varepsilon) \subset D$, за чийто точки z е изпълнено $u(z) = u(b) = u(a)$, т.е. $K(b, \varepsilon) \subset A$. Тъй като D е свързано множество и $A \neq \emptyset$, то $D = A$.

Ако $u(z)$ достига минимума си във вътрешна точка на D, то хармоничната функция $-u(z)$ достига максимума си в същата точка и отново получаваме $u(z) \equiv \text{const}$, $z \in D$.

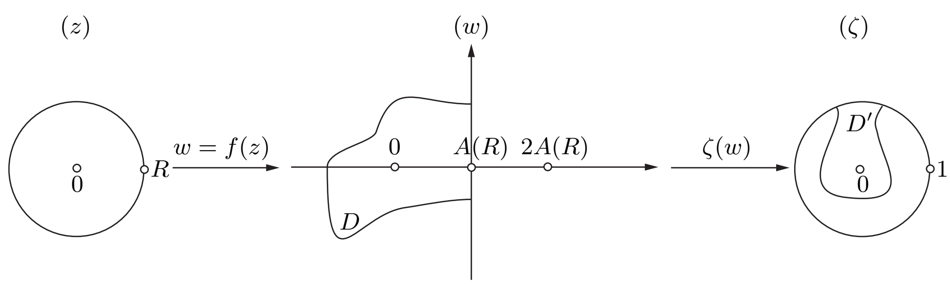
10.24. Да се докаже, че ако $u(z)$ е хармонична и ограничена функция в $\mathbb{C}$, то $u(z) \equiv \text{const}$, $z \in \mathbb{C}$.

Решение. Тъй като $\mathbb{C}$ е едносвързана област, то съществува холоморфна в $\mathbb{C}$, т. е. цяла функция $f(z)$, такава че $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$. Функцията $e^{f(z)}$ е също цяла и $|e^{f(z)}| = e^{u(z)} \le e^M$, където $M \ge u(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Съгласно теоремата на Лиувил $e^{f(z)} \equiv \text{const}$, а тогава и $u(z) \equiv \text{const}$, $z \in \mathbb{C}$.

10.25. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в кръга $K(0, R)$, непрекъсната в $\overline{K(0, R)}$ и нека $A(r) = \max\{\operatorname{Re} f(z), |z| = r\}$ и $M(r) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$, където $0 \le r \le R$. Да се докаже, че ако $f(0) = 0$, то

$$M(r) \le \frac{2r}{R - r} A(R), \quad r < R.$$

Решение. Ако f е константа (т. е. $f \equiv 0$), твърдението е очевидно. Нека f не е константа и D е образът на $K(0, R)$ при трансформацията $w = f(z)$. От принципа за максимума за хармоничната функция $\operatorname{Re} f(z)$ (зад. 10.23) следва, че D се съдържа в полуравнината $\{w : \operatorname{Re} w \le A(R)\}$, като $0 \in D$ и $A(R) > \operatorname{Re} f(0) = 0$ (фиг. 10.3). Дробно-линейната транс-



Фиг. 10.3

формация $\zeta = \dfrac{w}{2A(R) - w}$ изобразява полуравнината в единичния кръг $K(0, 1)$ (защо?), а D — в $D' \subset K(0, 1)$, като $\zeta(0) = 0$. Това ни подсеща да разгледаме функцията $g(z) = \dfrac{f(z)}{2A(R) - f(z)}$. Тя е холоморфна в $K(0, R)$, $g(0) = 0$ и $|g(z)| < 1$, $z \in K(0, R)$. Съгласно лемата на Шварц имаме $|g(z)| \le |z|/R$, $z \in K(0, R)$. Оттук, като вземем предвид, че $f(z) = \dfrac{2g(z)}{1+g(z)}A(R)$, следва

$$|f(z)| \le \frac{2|g(z)|}{1-|g(z)|}A(R) \le \frac{2|z|/R}{1-|z|/R}A(R) = \frac{2|z|}{R-|z|}A(R), \quad z \in K(0,R),$$

откъдето при $|z| = r$ получаваме твърдението на задачата.

* * *

10.26. Да се намери броят на нулите на полинома

$$f(z) = z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1,$$

които лежат в дясната полуравнина $\operatorname{Re} z > 0$.

Решение. Нека $R > 0$ е толкова голямо, че всички нули на f, лежащи в $\operatorname{Re} z > 0$, са в полукръга $D_R = \{\operatorname{Re} z > 0\} \cup \{|z| < R\}$. Тогава ако f няма нули върху ∂D_R, броят N на нулите в $\operatorname{Re} z > 0$ ще бъде съгласно принципа за аргумента

$$N = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial D_R} \arg f(z). \tag{5}$$

Следователно най-напред трябва да проверим дали f има нули върху имагинерната ос и ако има, да ги отстраним чрез делене на полиноми. Върху $|z| = R$ нули няма съгласно избора на R. Имаме

$$f(iy) = -y^6 + 6y^4 - 8y^2 + 1 + i(y^5 - 5y^3 + 4y) = 0$$

тогава и само тогава, когато уравненията

$$-y^6 + 6y^4 - 8y^2 + 1 = 0 \quad \text{и} \quad y^5 - 5y^3 + 4y = 0$$

имат общи корени. Корените на второто уравнение са 0, ± 1 и ± 2 и те не са корени на първото. Следователно f не се анулира върху имагинерната ос и е в сила (5).

Тъй като $f(z) = z^6(1 + 1/z + \cdots + 1/z^6)$, то

$$\Delta_{C_R} \arg f(z) = \Delta_{C_R} \arg z^6 + \Delta_{C_R} \arg(1 + 1/z + \cdots + 1/z^6),$$

където $C_R = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Re} z \ge 0\}$. Ясно е, че

$$\Delta_{C_R} \arg z^6 = 6\Delta_{C_R} \arg z = 6\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 6\pi.$$

По-нататък, тъй като $1 + 1/z + \cdots + 1/z^6 \to 1$ при $|z| \to \infty$, то $\arg(1 + 1/z + \cdots + 1/z^6) \to \arg 1 = 0$, откъдето

$$\varepsilon(R) = \Delta_{C_R} \arg(1 + 1/z + \cdots + 1/z^6) \to 0 \text{ при } |z| = R \to \infty.$$

Така получаваме $\lim\limits_{R\to\infty} \Delta_{C_R} \arg f(z) = 6\pi$.

За да намерим изменението на $\varphi = \arg f(iy)$, когато y се мени от $+\infty$ до $-\infty$, ще изследваме изменението на

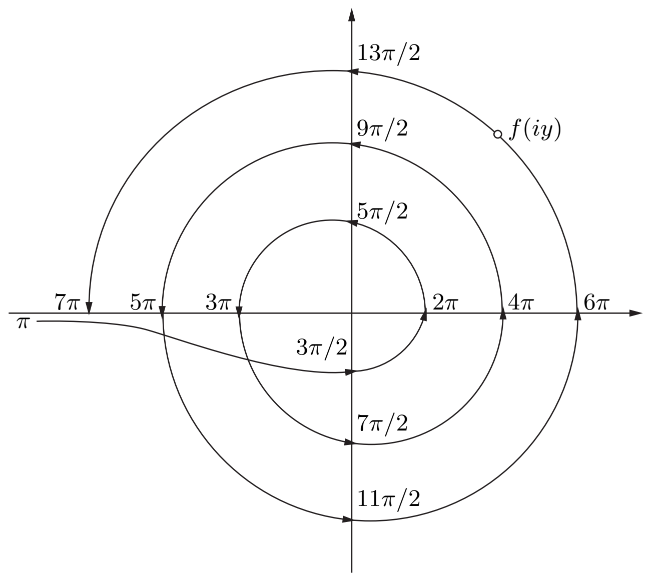
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} f(iy)}{\operatorname{Re} f(iy)} = \frac{y^5 - 5y^3 + 4y}{-y^6 + 6y^4 - 8y^2 + 1} = \frac{Q(y)}{P(y)}. \tag{6}$$

За тази цел трябва да познаваме разположението на нулите на числителя и знаменателя в (6). Нулите на $Q(y)$ са 0, ± 1, ± 2. Що се отнася до нулите на $P(y)$, като положим $y^2 = t$, получаваме $g(t) = t^3 - 6t^2 + 8t - 1$. Непосредствено проверяваме, че $g(0) < 0$, $g(1) > 0$, $g(4) < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$. Следователно $g(t) = 0$ има три различни реални корена t_1, t_2 и t_3, такива че $0 < t_1 < 1 < t_2 < 2 < 4 < t_3$. Тогава $P(y) = -g(t)$ има шест нули $y_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$, $y_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$, $y_{5,6} = \pm\sqrt{t_3}$, чието разположение както и поведението на $\operatorname{tg}\varphi$ и φ е дадено в табл. 10.1 (в нея с „+“ и

Таблица 10.1

y	$-\infty$		y_6		-2		y_4		-1		y_2		0		y_1		1		y_3		2		y_5		$+\infty$
Q		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
P		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\operatorname{tg}\varphi$	0		$+\infty$ | $-\infty$		0		$+\infty$ | $-\infty$		0		$+\infty$ | $-\infty$		0		$+\infty$ | $-\infty$		0		$+\infty$ | $-\infty$		0		$+\infty$ | $-\infty$		0
φ	π		$3\pi/2$		2π		$5\pi/2$		3π		$7\pi/2$		4π		$9\pi/2$		5π		$11\pi/2$		6π		$13\pi/2$		7π

„−“ са дадени знаците на P и Q в отделните интервали). Ако $y \to -\infty$, $y < y_6$, то $\operatorname{tg}\varphi \to 0$, като при това $f(iy)$ лежи в III квадрант (знаци $-$, $-$). Следователно $\varphi \to \pi$ (фиг. 10.4). При $y \to y_6$, $y < y_6$, $\operatorname{tg}\varphi \to \infty$, като $f(iy)$ е в III квадрант и значи $\varphi \in (\pi, 3\pi/2)$ и $\varphi \to 3\pi/2$. При преминаването на y през y_6 в интервала $(y_6, -2)$ $f(iy)$ преминава в IV квадрант (знаци $-$, $+$) и при $y \to -2$ получаваме $\operatorname{tg}\varphi \to 0$, откъдето $\varphi \to 2\pi$. При преминаването на y през -2 в интервала $(-2, y_4)$ $f(iy)$ преминава в I квадрант (знаци $+$, $+$) и $\operatorname{tg}\varphi \to +\infty$ при $y \to y_4$, откъдето $\varphi \to 2\pi + \pi/2 = 5\pi/2$. Като продължим така от интервал в интервал, ще получим последователно стойностите на φ, както е показано на фиг. 10.4.



Фиг. 10.4

Така при изменението на y от $-\infty$ до $+\infty$, φ се изменя от π до 7π и следователно

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{[iR,-iR]} f(iy) = \pi - 7\pi = -6\pi.$$

Тогава

$$N = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D_R} \arg f(z) = \frac{6\pi - 6\pi}{2\pi} = 0$$

и f няма нули в дясната полуравнина.

10.27. Да се намери броят на нулите на полинома

$$f(z) = 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1$$

във всеки квадрант.

Решение. Върху имагинерната ос $f(iy) = 2y^4 - 3y^2 + 1 + i(3y^3 - y)$ и f не се анулира, защото уравненията $2y^4 - 3y^2 + 1 = 0$ и $3y^3 - y = 0$ нямат общи корени. Ще покажем, че $f(x) > 0$ за $x \in \mathbb{R}$. Действително, $f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 6x - 1$, $f''(x) = 6(4x^2 - 3x + 1)$ и $f''(x) > 0$ за всяко x. Тогава $f'(x)$ расте в $(-\infty, +\infty)$ и понеже $f'(0) = -1 < 0$, а $f'(1) = 4 > 0$, то $f'(x)$ има единствена реална нула $a \in (0, 1)$. Тъй като $f'(x) < f'(a) = 0$ за $x < a$ и $f'(x) > f'(a) = 0$ за $x > a$, то $f(x)$ намалява в $(-\infty, a)$ и расте в $(a, +\infty)$. Така $f(x) \geq f(0) = 1$ за $x \leq 0$ и $f(x) \geq f(1) = 2$ за $x \geq 1$. За $x \in (0, 1)$ имаме

$$f(x) = 3x^2(1-x) + 1 - x + 2x^4 > 3x^2(1-x) + 1 - x = (1-x)(3x^2+1) > 0.$$

Следователно $f(x) > 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Ще намерим броя на нулите на f в I квадрант. Тъй като $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$, то $\Delta_{[0,+\infty]} \arg f(x) = 0$. Както в зад. 10.26

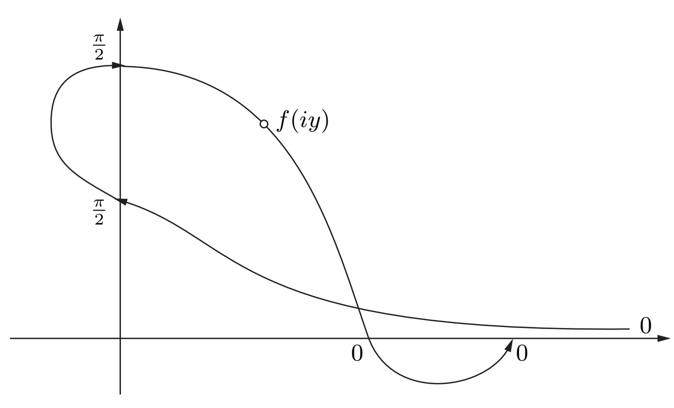
$$\Delta_{C_R} \arg f(z) = \Delta_{C_R} \arg z^4 + \varepsilon(R) = 4 \cdot \frac{\pi}{2} + \varepsilon(R) = 2\pi + \varepsilon(R),$$

където C_R е дъгата $\{z = Re^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$, а $\varepsilon(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$.

Върху имагинерната ос $f(iy) = 2y^4 - 3y^2 + 1 + iy(3y^2 - 1) = P + iQ$, като нулите на P са ± 1 и $\pm 1/\sqrt{2}$, а на Q — 0, $\pm 1/\sqrt{3}$. Знаците на P и Q в отделните интервали, както и поведението на $\varphi = \arg f(iy)$ и $\operatorname{tg}\varphi = Q/P$ са дадени в табл. 10.2. Представа за поведението на $f(iy)$

Таблица 10.2

y	$+\infty$		1		$1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{3}$		0
Q		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0
P		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\operatorname{tg}\varphi$	0		$+\infty$; $-\infty$		$-\infty$; $+\infty$		0; 0		0
φ	0		$\pi/2$		$\pi/2$		0		0



Фиг. 10.5

дава фиг. 10.5. Следователно

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{[iR,i0]} \arg f(iy) = 0 - 0 = 0.$$

Така за броя N на нулите на f в I квадрант получаваме $N = \dfrac{1}{2\pi}(2\pi + 0 + 0) = 1$.

По-нататък продължете сами, като установите, че в горната полуравнина f има две нули, и използвате, че f е с реални коефициенти.

Отг. Във всеки квадрант f има точно по една нула.

10.28. Да се намери броят на нулите на полинома

$$f(z) = z^5 + z^4 + 3z^3 + 8z^2 + 15$$

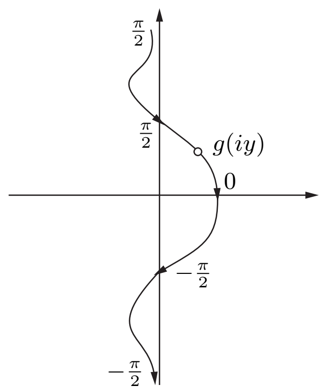
във всяка от полуравнините $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} z < 0$, както и във всеки отворен квадрант.

Решение. Ще разгледаме само дясната полуравнина $\operatorname{Re} z > 0$. Имаме $f(iy) = y^4 - 8y^2 + 15 + iy^3(y^2 - 3)$, като корените на $y^4 - 8y^2 + 15 = 0$ са $y = \pm\sqrt{3}$ и $y = \pm\sqrt{5}$, а на $y^3(y^2-3) = 0$ са $y = 0$ и $y = \pm\sqrt{3}$. Следователно f има две нули върху имагинерната ос — $\pm i\sqrt{3}$. Като разделим f на $z^2 + 3$, получаваме $f(z) = (z^2 + 3)(z^3 + z^2 + 5)$. Сега остава да намерим броя на нулите на $g(z) = z^3 + z^2 + 5$ в $\operatorname{Re} z > 0$. Както в зад. 10.26 имаме $\Delta_{C_R} \arg g(z) = 3\pi + \varepsilon(R)$, където $C_R = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$ и $\varepsilon(R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$. Освен това $g(iy) = P(y) + iQ(y) = -y^2 + 5 + i(-y^3)$, като $P(y) = 0$ само за $y = \pm\sqrt{5}$, а $Q(y) = 0$ само за $y = 0$. Като изследваме знаците на P и Q в отделните интервали, за поведението на $\varphi = \arg g(iy)$ и $g(iy)$ получаваме резултатите, отразени в табл. 10.3 и фиг. 10.6. Тогава

$$\lim_{R\to\infty} \Delta_{[iR,-iR]} \arg g(iy) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Таблица 10.3

y	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
Q		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
P		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\operatorname{tg}\varphi$	$-\infty$		$-\infty \mid +\infty$		$0 \mid 0$		$-\infty \mid +\infty$		$+\infty$
φ	$\pi/2$		$\pi/2$		0		$-\pi/2$		$-\pi/2$



Фиг. 10.6

и за броя N на нулите на g в $\operatorname{Re} z > 0$ получаваме $N = \dfrac{3\pi + \pi}{2\pi} = 2$. Тъй като $g(z)$ е с положителни коефициенти, то $g(x) > 0$ за $x \geq 0$ и $g(z)$ има по една нула в I и IV квадрант, симетрични относно реалната ос. Освен това, тъй като g е полином от трета степен, той има и една реална нула и тя е отрицателна. От всичко казано дотук следва, че f има две нули в $\operatorname{Re} z > 0$, една в $\operatorname{Re} z < 0$, по една в I и IV квадрант и няма нули във II и III квадрант.

10.29. Да се намери броят на нулите в първи квадрант на полинома:
а) $f(z) = z^4 + iz^3 - 7z^2 + 6z - 27i/8$;
б) $f(z) = z^5 - 5iz^4 + 3iz^3 + z^2 - 2$;
в) $f(z) = z^5 + 2z^4 + iz^3 - 3z^2 - 2iz - 4i$.
Отг. а) 0; б) 1; в) 1.

10.30. Да се намери броят на нулите в $K(0,1)$ на полинома:
а) $f(z) = z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$;
б) $f(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$;
в) $f(z) = 4z^3 - 2z + 1$.
Решение. а) За $z \in C(0,1)$ имаме

$$|z^9 - 2z^6 + z^2 - 2| \leq |z|^9 + 2|z|^6 + |z|^2 + 2 = 6 < 8 = 8|z|.$$

Съгласно теоремата на Руше $f(z)$ има толкова нули в $K(0,1)$, колкото и $8z$, т. е. една.

б) $|z^8 + z^2| \leq 2 < 3 \leq |-4z^5 - 1|$ за $z \in C(0,1)$ и следователно $f(z)$ има пет нули в $K(0,1)$.

в) *Отг.* Три.

10.31. Да се докаже, че при $\lambda > 1$ уравнението $ze^{\lambda - z} = 1$ има само един корен в $K(0,1)$ и той е положителен.

Решение. Ако $|z| = 1$, то $\operatorname{Re} z = x \leq 1$ и тогава $|ze^{\lambda-z}| = e^{\lambda - x} \geq e^{\lambda-1} > 1$. Съгласно теоремата на Руше уравнението $ze^{\lambda-z} = 1$ има толкова корени в $K(0,1)$, колкото има уравнението $ze^{\lambda-z} = 0$, т. е. един. Освен това ако $f(z) = ze^{\lambda-z} - 1$, то $f(0) = -1 < 0$ и $f(1) = e^{\lambda-1} - 1 > 0$. Следователно този корен е реален и е в интервала $(0,1)$.

10.32. Да се докаже, че при $\lambda > 1$ уравнението $z + e^{-z} = \lambda$ има само един корен в дясната полуравнина и той е положителен.

Решение. Сравняваме $|z - \lambda|$ и $|e^{-z}|$ върху границата на $K(0,R) \cap \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ за $R > \lambda + 1$. Ако $z = iy \in [-iR, iR]$, то $|iy - \lambda| \geq \lambda > 1 = |e^{-iy}|$; ако $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, то $|z - \lambda| \geq |z| - \lambda = R - \lambda > 1 \geq |e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z}$. Сега от теоремата на Руше следва, че уравнението има единствен корен в дясната полуравнина, а от съображения за непрекъснатост заключаваме, че той е в интервала $(0, \lambda)$.

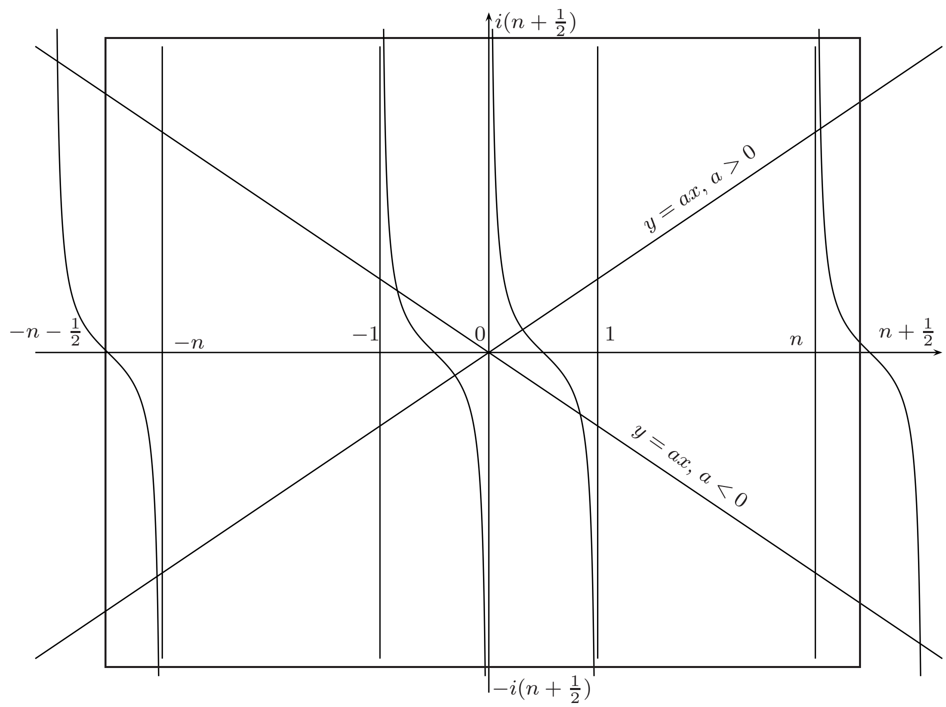
10.33. Нека $0 < |a| < 1$ и $n \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че уравнението $(z-1)^n e^z = a$ има точно n еднократни корена в дясната полуравнина и всички те са в кръга $K(1,1)$.

Решение. Нека $R \geq 1$ и $D_R = K(1,R) \cap \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. За $z = iy \in \partial D_R$, имаме $|iy - 1| \geq 1$, откъдето $|iy-1|^n |e^{iy}| \geq 1 > |a|$. Ако $z \in \partial D_R$, $|z - 1| = R$, то $|z-1|^n |e^z| = R^n e^{\operatorname{Re} z} \geq 1 > |a|$. Следователно за всяко $z \in \partial D_R$ е изпълнено $|z-1|^n |e^z| > |a|$ и съгласно теоремата на Руше във всяка област D_R, $R \geq 1$, уравнението $(z-1)^n e^z = a$ има толкова корена, колкото има и $(z-1)^n e^z = 0$, т. е. точно n. Тъй като $R \geq 1$ е произволно, то даденото уравнение има точно n корена в дясната полуравнина и всички те са в кръга $K(1,1)$. Ако z_0 е корен от ред поне 2, то $(z_0 - 1)^n e^{z_0} = a$ и $n(z_0-1)^{n-1} e^{z_0} + (z_0-1)^n e^{z_0} = 0$, т. е. $(z_0-1)^{n-1} e^{z_0} (z_0 - 1 + n) = 0$, което означава, че или $z_0 = 1$, или $e^{z_0} = 0$, или $z_0 = 1 - n \leq 0$. Стигнахме до противоречие.

10.34. Да се докаже, че уравнението $\operatorname{ctg} \pi z = az$, $a \in \mathbb{R}$, при $a \geq 0$ има само реални корени, а при $a < 0$ — безбройно много реални и два чисто имагинерни корена.

Решение. Нека $D_n = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq n + 1/2,\ |\operatorname{Im} z| \leq n + 1/2\}$. Съгласно зад. 5.8 съществува константа $M > 0$, такава че $|\operatorname{ctg} \pi z| \leq M$,

$z \in \partial D_n$, за всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава при достатъчно големи n за $z \in \partial D_n$ имаме $|\operatorname{ctg} \pi z| \leq M < |a|(n+1/2) \leq |az|$, откъдето $|\cos \pi z| < |az \sin \pi z|$. Тъй като уравненията $\operatorname{ctg} \pi z = az$ и $\cos \pi z = az \sin \pi z$ са еквивалентни, то в D_n броят на корените на даденото уравнение съвпада, съгласно теоремата на Руше, с броя на корените на уравнението $az \sin \pi z = 0$ и той е $2n+2$ ($z = 0$ е двукратен и $z_k = k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ са еднократни).



Фиг. 10.7

Нека сега $a \geq 0$. Тогава (фиг. 10.7) правата $y = ax$ пресича графиката на функцията $y = \operatorname{ctg} \pi x$ в $2(n+1) = 2n+2$ точки, лежащи в D_n (по една във всеки интервал $(k-1, k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, и по една в интервалите $(-n-1/2, -n)$, $(n, n+1/2)$). Следователно уравнението $\operatorname{ctg} \pi z = az$ има $2n+2$ корена в интервала $(-n-1/2, n+1/2)$ и значи всичките му корени в D_n, а оттам и в $\mathbb{C}$, са реални и в $\mathbb{C}$ те са безбройно много.

Ако $a < 0$, пресечните точки на $y = ax$ с $y = \operatorname{ctg} \pi x$ (фиг. 10.7) в D_n са $2n$ (по една във всеки интервал $(k-1, k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, като в интервалите $(-n-1/2, -n)$ и $(n, n+1/2)$ няма пресечни точки). Следователно в този случай даденото уравнение има два комплексни и безбройно много реални корени. Тъй като функцията $f(z) = \operatorname{ctg} \pi z - az$ е нечетна, т. е. $f(-z) = -f(z)$, и върху $\mathbb{R}$ приема реални стойности, т. е. $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$, то ако z е комплексен корен на уравнението, корени биха били и $-z$, $\overline{z}$ и $-\overline{z}$. Последното е възможно само ако $z = -\overline{z}$, т. е. $\operatorname{Re} z = 0$, и тогава комплексните корени на уравнението са $z_1 = i\alpha$, $z_2 = -i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. По-точно, α е корен на уравнението $\operatorname{cth} \pi x = -ax$. С това твърдението е доказано.

10.35. Да се докаже, че уравнението $\operatorname{tg} \pi z = az$, $a \in \mathbb{R}$, има безбройно много реални и два чисто имагинерни корена при $a \in (0, 1)$ и само реални корени при $a \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

Упътване. Следвайте стриктно решението на зад. 10.34.

10.36. Нека $f(z) = z - \operatorname{ctg} z$. Да се докаже, че:

а) $f(z)$ има само реални и прости нули;

б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{dz}{f(z)} = 1;$

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2+x_n^2} = 1$, където x_n са положителните нули на $f(z)$.

Решение. а) От зад. 10.34 (при $a = 1$) следва, че $f(z)$ има само реални нули. Сега, като вземем предвид, че $\operatorname{ctg} z$ е периодична функция и $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{\sin^2 x} > 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, съобразяваме, че $f(z)$ има изброимо много реални и прости нули (по една във всеки интервал $(k\pi, (k+1)\pi)$). При това, тъй като $f(z)$ е нечетна функция, те са симетрични относно началото.

б) Тъй като $|\operatorname{ctg} z| \le M$, $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \{z : |z - k\pi| < \pi/4\}$ (зад. 5.8), последователно получаваме

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{1}{f(z)}\, dz - 1\right| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=(n+\frac{1}{2})\pi} \left(\frac{1}{z - \operatorname{ctg} z} - \frac{1}{z}\right) dz\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\operatorname{ctg} z}{z(z - \operatorname{ctg} z)}\, dz\right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\operatorname{ctg} z|}{|z|(|z| - |\operatorname{ctg} z|)}\, |dz|$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{(n+\frac{1}{2})\pi\left((n+\frac{1}{2})\pi - M\right)} 2\pi(n + \frac{1}{2})\pi = \frac{M}{(n+\frac{1}{2})\pi - M} \to 0,$$

когато $n \to \infty$.

в) От теоремата за резидуумите имаме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{1}{f(z)}\,dz = 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(x_k).$$

Тъй като x_k са прости полюси на $\dfrac{1}{f}$, то

$$\operatorname{Res}(x_k) = \frac{1}{f'(x_k)} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{\sin^2 x_k}} = \frac{1}{1+1+\operatorname{ctg}^2 x_k} = \frac{1}{2+x_k^2}.$$

Сега от б) следва, че $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2+x_n^2} = 1$.

10.37. Нека $f(z) = z + \operatorname{ctg} z$. Да се докаже, че:

а) $f(z)$ има безбройно много реални и точно две чисто имагинерни нули, като всички те са прости;

б) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{|z|=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{dz}{z^2 f(z)} = 0$;

в) $\displaystyle\sum_{n} \frac{1}{z_n^4} = 1$, като сумирането е по всички нули z_n на $f(z)$.

Упътване. Следвайте решението на зад. 10.36.

10.38. Да се докаже, че ако функцията $f(z)$ е холоморфна и еднолистна в област $D \subset \mathbb{C}$, то $f'(z) \neq 0$, $z \in D$.

Решение. Да допуснем, че $f'(z_0) = 0$, $z_0 \in D$. Това означава, че z_0 е поне двукратна нула на функцията $f(z) - f(z_0)$. Тъй като нулите на холоморфните функции са изолирани, то съществува $r > 0$, такова че $K(z_0, r) \subset D$ и $f(z) - f(z_0) \neq 0$, $f'(z) \neq 0$ за $z \in \overline{K(z_0, r)} \setminus \{z_0\}$. Нека $m = \min\{|f(z) - f(z_0)|,\ z \in C(z_0, r)\} > 0$ и $w \neq f(z_0)$ е такова, че $|w - f(z_0)| < m$. Тогава за всяко $z \in C(z_0, r)$ имаме $|w - f(z_0)| < m \leq |f(z) - f(z_0)|$. Съгласно теоремата на Руше функцията $f(z) - w$ ще има в $K(z_0, r)$ точно толкова нули, колкото и $f(z) - f(z_0)$, т. е. поне две нули z_1, z_2. При това поради $w \neq f(z_0)$ те са различни от z_0, а поради $f'(z) \neq 0$ имаме $z_1 \neq z_2$. Но тогава от $f(z_1) = f(z_2) = w$ следва, че f не е еднолистна, което противоречи на условието.

10.39. Съществува ли функция $f(z)$, холоморфна в околност на точката $z = 0$ и такава, че за достатъчно големи n да бъде изпълнено:

а) $f\,(1/n) = f\,(-1/n) = 1/n$;

б) $f\,(1/n) = (-1)^n/n^3$;

в) $f\,(1/n) = 1/(n^2-1)$?

Решение. а) Не. Нека $g(z) = z$. Тъй като $1/n \to 0$ и $f\,(1/n) = g\,(1/n)$, от теоремата за единственост следва, че $f(z) \equiv g(z)$. Но $g\,(-1/n) = -1/n \neq 1/n$.

б) *Упътване.* Разгледайте два случая: n четно и n нечетно.

Отг. Не.

в) *Отг.* Да. $f(z) = z^2/(1-z^2)$.

10.40. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в област D. Да се докаже, че:

а) ако съществуват $z_0 \in D$ и $n_0 \in \mathbb{N}$, такива че $f^{(n)}(z_0) = 0$ за $n > n_0$, то $f(z)$ е полином от степен най-много n_0;

б) ако за всяко $z \in D$ съществува $n = n(z)$, такова че $f^{(n)}(z) = 0$, то $f(z)$ е полином.

Решение. а) От условието следва, че в околност на точката $z = z_0$, $f(z) = P_{n_0}(z) = \sum\limits_{k=0}^{n_0} \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$. Сега от теоремата за единственост получаваме, че $f(z) \equiv P_{n_0}(z)$, $z \in D$.

б) Нека $z_0 \in D$ и $K = K(z_0, r)$ е нейна околност, такава че $\overline{K} \subset D$. Нека $K_n = \{z \in \overline{K} : f^{(n)}(z) = 0\}$. Ясно е, че K_n са компакти и $\overline{K} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Тъй като K е неизброимо множество, то съществува $n = n_0$, за което K_{n_0} е безкрайно, даже неизброимо множество. Тогава то има поне една точка на сгъстяване в D. От теоремата за единственост следва, че $f^{(n_0)}(z) \equiv 0$, $z \in D$, т. е. $f(z)$ е полином.

10.41. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в околност на точката $z = 0$, и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от различни положителни числа, като $a_n \to 0$. Да се докаже, че ако за достатъчно големи n, $f(a_n) \in \mathbb{R}$ и $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$, то $f(z)$ е константа.

Решение. Нека $f(z)$ е холоморфна в кръга $K(0, r)$. Тъй като $K(0, r)$ е симетричен относно $\mathbb{R}$, то и функцията $\overline{f(\overline{z})}$, а оттам и $g(z) = f(z) - \overline{f(\overline{z})}$, е холоморфна в него. При това $g(a_n) = 0$ за достатъчно големи n. Тъй като $a_n \to 0$, от теоремата за единственост следва, че $g(z) \equiv 0$, т. е. $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$, така че f е реалнозначна и диференцируема функция в интервала $(-r, r)$. От $a_{2n} \neq a_{2n+1}$, $f(a_{2n}) = f(a_{2n+1})$ и теоремата на Рол получаваме, че за достатъчно големи n съществува положително число b_n между a_{2n} и a_{2n+1}, такова че $f'(b_n) = 0$. Тъй като $a_n \to 0$ $(a_n > 0)$, то и $b_n \to 0$. Сега от теоремата за единственост следва, че $f'(z) \equiv 0$, $z \in K(0, r)$, и значи $f(z)$ е константа.

10.42. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в околност на точката $z = z_0$. Да се докаже, че съществува функция $g(z)$, холоморфна в околност на точката z_0 и такава, че:

а) ако $f(z_0) \neq 0$, то $f(z) = e^{g(z)}$;

б) ако $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(\nu-1)}(z_0) = 0$, $f^{(\nu)}(z_0) \neq 0$, то $f(z) = (z - z_0)^\nu e^{g(z)}$.

Решение. а) От непрекъснатостта следва, че съществува околност $U = K(z_0, r)$ на z_0, в която $f(z)$ е различна от нула. Тогава функцията $f'(z)/f(z)$ е холоморфна в U и тъй като U е едносвързана, то тя има примитивна в нея, т. е. съществува функция $F(z)$, холоморфна в U, и $F'(z) = f'(z)/f(z)$, $z \in U$. Тогава $(fe^{-F})' = f'e^{-F} - fF'e^{-F} = 0$, откъдето $f(z)e^{-F(z)} \equiv e^\lambda$, $\lambda = \text{const}$. Следователно $f(z) = e^{F(z)+\lambda}$, $z \in U$.

б) Развиваме в ред на Тейлър около z_0 и прилагаме а).

10.43. Нека $f(z)$ и $g(z)$ са цели функции и $|f(z)| \leq |g(z)|$, $z \in \mathbb{C}$. Да се докаже, че $f(z) = \lambda g(z)$, $|\lambda| \leq 1$, $z \in \mathbb{C}$.

Решение. Нека z_0 е нула на $g(z)$ от ред $m \geq 1$. Тогава (зад. 10.42) в околност на z_0 е изпълнено $g(z) = (z - z_0)^m e^{h(z)}$, където $h(z)$ е холоморфна в тази околност. От условието следва, че и $f(z_0) = 0$. Нека $f(z) = (z - z_0)^n e^{\varphi(z)}$ е съответното представяне на $f(z)$ в околност на z_0. Така в околност на z_0 получаваме

$$|z - z_0|^n |e^{\varphi(z)}| \leq |z - z_0|^m |e^{h(z)}| \iff |e^{\varphi(z)}| \leq |z - z_0|^{m-n} |e^{h(z)}|.$$

Оттук следва, че $m \leq n$. Тогава функцията $\dfrac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{n-m} e^{\varphi(z)-h(z)}$ е холоморфна в околност на z_0 и тъй като z_0 е произволна нула на $g(z)$, то тя е цяла функция. Сега твърдението следва от теоремата на Лиувил.

10.44. Нека $f(z)$ е цяла функция ($f \not\equiv 0$) и $|f'(z)| \leq |f(z)|$, $z \in \mathbb{C}$. Да се докаже, че $f(z) = e^{\lambda z + \mu}$, където λ и μ са константи, $|\lambda| \leq 1$.

Решение. Най-напред ще докажем, че $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Да допуснем противното и нека $f(z_0) = 0$. Тогава в околност на точката z_0 имаме

$f(z) = (z - z_0)^n e^{g(z)}$, $n \geq 1$. Сега

$$|n(z - z_0)^{n-1} e^{g(z)} + (z - z_0)^n g'(z) e^{g(z)}| \leq |z - z_0|^n |e^{g(z)}|$$
$$\iff |n e^{g(z)} + (z - z_0) g'(z) e^{g(z)}| \leq |z - z_0|\, |e^{g(z)}|.$$

Оттук за $z = z_0$ получаваме $|e^{g(z_0)}| \leq 0$. Следователно $f(z) \neq 0$ за всяко $z \in \mathbb{C}$. Тогава съществува цяла функция $g(z)$, такава че $f(z) = e^{g(z)}$, $z \in \mathbb{C}$ (вж. решението на зад. 10.42). Сега от $|f'(z)| \leq |f(z)| \iff |g'(z)| \leq 1$ и от теоремата на Лиувил следва, че $g'(z) \equiv \lambda$ и значи $g(z) = \lambda z + \mu$, $z \in \mathbb{C}$, където λ и μ са константи, $|\lambda| \leq 1$.

10.45. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в околност на кръга $|z| \leq 1$, и $|f'(z)| \leq |f(z)|$ за $|z| = 1$. Да се докаже, че ако $f(z)$ има поне една нула в този кръг, то $f(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Решение. Ако $f \equiv 0$, то $f(z) = \lambda z$, $\lambda = 0$. Нека сега $f \not\equiv 0$ и z_0, $|z_0| \leq 1$ е нула на f. Ще докажем, че тя е единствена, при това еднократна нула на f. Разсъждавайки както в решението на задача 10.44, получаваме, че $|z_0| < 1$. Нека N е броят на нулите на f в кръга $|z| < 1$ и $\theta = \theta(z) \in [0, 2\pi)$ е аргументът на $f'(z)/f(z)$ за $|z| = 1$, т. е. за $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$. От условието и от теоремата за логаритмичния индикатор последователно получаваме

$$1 \leq N = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| e^{i(\theta + t)}\, dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \cos(\theta + t)\, dt \leq 1.$$

Следователно $N = 1$, т. е. f има само една, при това еднократна нула в кръга $|z| < 1$. Освен това, равенство в горните неравенства се достига само ако $|f'(z)/f(z)| = 1$ и $\cos(\theta + t) = 1$, т. е. само ако $f'(z)/f(z) = 1/z \iff z f'(z) = f(z)$ за $|z| = 1$. От теоремата за единственост следва, че $z f'(z) = f(z)$ и за $|z| \leq 1$. Оттук в частност получаваме, че $z_0 f'(z_0) = 0 \Rightarrow z_0 = 0$. Тогава функцията $f(z)/z$ е холоморфна в кръга $|z| \leq 1$ и тъй като $(f(z)/z)' = 0$, то $f(z) = \lambda z$, $\lambda \neq 0$.

10.46. Да се намерят всички цели функции $f(z)$ и $g(z)$, за които $f^2(z) + g^2(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$.

Решение. Нека $f(z)$ и $g(z)$ са цели функции, за които $f^2(z) + g^2(z) = 1$,

$z \in \mathbb{C}$. Тогава

$$(f(z)+ig(z))(f(z)-ig(z)) = 1, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Функцията $h(z) = f(z) + ig(z)$ е цяла и $h(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Съществува цяла функция $\varphi(z)$, такава че $h(z) = e^{i\varphi(z)}$, т. е.

$$f(z) + ig(z) = e^{i\varphi(z)}. \tag{8}$$

От (7) следва

$$f(z) - ig(z) = \frac{1}{h(z)} = e^{-i\varphi(z)}. \tag{9}$$

Сега от (8) и(9) получаваме $f(z) = \cos\varphi(z)$ и $g(z) = \sin\varphi(z)$. Обратно, ако $\varphi(z)$ е цяла функция, то $\sin^2\varphi(z) + \cos^2\varphi(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$, т. е. намерените функции са единствените.

10.47. Нека $f(z)$ е функция, холоморфна в кръга $|z| < 1$, и съществува $\varphi \in (0, 2\pi)$, такова че $|f(x)| = |f(xe^{i\varphi})| = \text{const} \neq 0$ за всяко $x \in [0, 1)$. Да се докаже, че ако числото φ/π е ирационално, то $f(z)$ е константа.

Решение. От условието следва, че $f(0) \neq 0$, и значи съществува $0 < r \leq 1$, такова че $f(z) \neq 0$ в кръга $|z| < r$. Тогава функцията $g(z) = f(rz)/f(0)$ е холоморфна и различна от нула в единичния кръг и $g(0) = 1$. Следователно съществува функция $h(z)$, холоморфна в $|z| < 1$, такава че $g(z) = e^{ih(z)}$. Тъй като $|g(x)| = |g(0)| = 1$ за всяко $x \in [0, 1)$, то $h(x) \in \mathbb{R}$ за всяко $x \in (-1, 1)$. Оттук следва, че ако $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е тейлъровото развитие на $h(z)$ около нулата, то

$$a_n \in \mathbb{R}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

Аналогично имаме $|g(xe^{i\varphi})| = |g(0)| = 1$, $x \in [0, 1)$, $h(xe^{i\varphi}) \in \mathbb{R}$, $x \in (-1, 1)$ и

$$a_n e^{in\varphi} \in \mathbb{R}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Ако съществува n, такова че $a_n \neq 0$, то от (10) и (11) следва, че $e^{in\varphi} = \pm 1 \iff n\varphi = k\pi$, т. е. φ/π е рационално число. Следователно $a_n = 0$ за всяко n и тогава $h(z)$, а оттук и $f(z)$ са константи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аргирова Т., Т. Генчев. Сборник от задачи по теория на аналитичните функции. Унив. изд. „Св. Кл. Охридски“, София, 1992.

2. Волковыский Л. И., Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Наука, Москва, 1975.

3. Евграфов М. А., Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, К. А. Бежанов. Сборник задач по теории аналитических функций. Наука, Москва, 1969.

4. Knopp K. Aufgabensammlung zur Funktionentheorie T. I, II. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1965, 1964.

5. Krzyz J. Problems in complex variable theory. Polish Scientific Publisher, Warszawa, 1971.

6. Хаджийски В. Задачи по комплексен анализ. Веди, София, 1997.