Примерни задачи за междинния изпит по Комплексен анализ

зад.1. Нека неконстантната функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y),\ z=x+iy$ е холоморфна в точката z_0. Вярно ли е, че и функцията $g(z)=u(x,y)-iv(x,y)$ е холоморфна в z_0? Обосновете отговора си.

зад.2. Вярно ли е твърдението:

а) Ако $\left|e^z\right|=1,\ z=x+iy$, то $z=iy$; б) $\operatorname{Re} e^z=\cos y,\ z=x+iy, x\neq 0$;

в) $|\sin z|^2+|\cos z|^2\geq 1,\ \forall z\in C$; г) $\log(-1)^2=2\log(-1)$?

Обосновете отговорите си.

зад.3. Функцията $f(z)=\dfrac{1}{z}$ е холоморфна в едносвързаната област $D=\{\ z\in\mathbb{C}:|z|>1\ \}\cup\infty$. Вярно ли е, че $\int\limits_\gamma f(z)dz=0$, за всяка затворена крива $\gamma\subset D$? Обосновете отговора си.

зад.4. Нека γ е затворена Жорданова крива и $f(z)$ е функция холоморфна в околност на $\gamma\cup Int\gamma$. Вярно ли е, че $\int\limits_\gamma \dfrac{f'(z)}{z-z_0}dz=\int\limits_\gamma \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$, за всяко $z_0\notin\gamma$?

Обосновете отговора си.

зад.5. 26. Нека $f(z)$ и $g(z)$ са функции холоморфни в област $D\subset\mathbb{C}$ и съществува $z_0\in D$, така че $f^{(n)}(z_0)=g^{(n)}(z_0),\quad n=0,1,\ldots$ Вярно ли е, че $f(z)=g(z),\ z\in D$? Обосновете отговора си.

зад.6. Съществува ли функция $f(z)$ холоморфна в $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ и такава, че а) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{i^n}{n}$; б) $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2^n}$ в) $|f(z)|=e^{|z|}$? Обосновете отговора си.

зад.7. Нека $\Omega\subset\mathbb{C}$ е отворено множество и $f(z)$ и $g(z)$ са холоморфни в Ω. Да се докаже, че Ω е област, тогава и само тогава когато от $f(z)g(z)=0,\ z\in\Omega$ следва $f(z)\equiv 0,\ z\in\Omega$ или $g(z)\equiv 0,\ z\in\Omega$.

зад.8. Да се намерят всички цели функции $f(z)$, такива че $|f(z)|\leq K|\sin z|$ за всяко $z\in\mathbb{C}$.

зад.9. Нека $f(z)$ е неконстантна функция, холоморфна в околност на затвореният единичен кръг и $|f(z)|=1$ за $|z|=1$. Да се докаже, че за всяко $w, |w|<1$, уравнението $f(z)=w$ има решение .

зад.10. Нека $D\subset\mathbb{C}$ е ограничена област, $f(z)$ е функция холоморфна в D и непрекъсната върху $\overline{D}$.

а) Вярно ли е. че най-малката стойност на $|f(z)|$ се достига върху границата на D? Обосновете отговора си.

б) Да се докаже, че ако $|f(z)|=1,\ z\in\partial D$, то или $f(z)=c, |c|=1, z\in D$ или $f(z)$ има поне една нула в D.

зад.11 . Нека z_0 е изолирана особена точка на $f(z)$. Каква е тя за $\dfrac{1}{f(z)}$, ако z_0 е

а) отстранима особена точка;
б) полюс;
в) съществена особена точка?

Обосновете отговорите си.

зад.12. Чрез теоремата за резидуумите да се пресметне

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{5+3\cos\theta}\,d\theta;$$

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}.$$