ЛЕКЦИИ

по

КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ

доц. д-р Ваня Хаджийски

второ издание

София, 2018 г.

На светлата памет
на моите родители

СЪДЪРЖАНИЕ

Допълнение

Предисловие към второто издание

Второто издание на лекциите е допълнено с две лекции: Гама функцията на Ойлер и Равномерно приближение с полиноми и рационални функции. Теореми на Рунге. Това са теми които, съм излагал пред студентите от специалност „Математика" в годините, когато курсът по Комплексен анализ бе двусеместриален, а след промяната са част от изборният курс „Избрани глави от Комлексния анализ". Също така са отстранени забелязаните неточности, за което съм изключително благодарен на моите студенти от сп. „Математика и сп. „Приложна математика".

февруари. 2018 г. В. Хаджийски

Предисловие

Това са записки на лекциите на основния курс по Комплексен анализ (Теория на функциите на една комплексна променлива), които чета един семестър на студентите от направление „Математика" на Факултета по Математика и информатика на Софийския университет. Целта на тези записки е да помогне на студентите да усвоят основите на предмета и да ги подготви както за усвояването му на по-високо ниво, така и за приложението му в други области. Подходът ми към изграждането на курса е класически и по идеи и дух е близък до учебника на доц. Т. Аргирова. По-точно това е т.н. подход на Коши-Риман, в основата на който лежи концепцията за комплексна диференцируемост. Опорна точка на този подход е разбирането за взаимната зависимост между функциите на реална и комплексна променлива. Това дава шанс на студентът да „усети" че комплексният анализ е естествено продължение на реалния анализ. Освен това така той (тя) има още една възможност да „преговори" реалния анализ, а и въвеждането му в комплексния анализ става по-гладко. Също така този подход позволява по-бързо да се достигне до сърцевината на комплексния анализ, там където са съществените разлики със ситуацията в реалния случай. Изключение от класическия подход е Лекция 19 (чета я само на специалност „Математика"), в която следвайки елегантното доказателство на J.Dixon [8], излагам хомологичната версия на Глобалната теорема на Коши.

Записките са структурирани в 21 лекции, като това са отделни теми, а не реалните лекции. В края на всяка от лекциите са включени неголям брой задачи. Повечето имат по-скоро „теоретичен" характер. Целта им е да допълнят и задълбочат изложената в лекцията тема. Умишлено не съм включил задачи за упражнения, каквито могат да се намерят в сборниците [15] и [16].

Използваните означения са стандартни. При номерирането са използвани две числа: първото посочва номера на лекцията, а второто – поредния номер съответно на теоремата, твърдението, лемата, задачата и т.н., в лекцията. Номерата на някои от задачите са отбелязани със знака *. Това означава, че те ще се използват по-нататък в изложението.

В записките има малко фигури, които не са достатъчни за онагледяване на изложението. Затова съветвам, всеки, който ги използва да скицира свои чертежи. Благодаря на своя колега Вили Черногоров за начертаването на фигурите. Особено съм благодарен на гл.ас. Александър Александров затова, че прочете ръкописа и допринесе за отстраняване на редица неточности.

май. 2015 г. В.Хаджийски

Лекция 1
Комплексни числа. Редици и редове от комплексни числа

В основата на комплексния анализ са алгебричната, геометричната и топологичната структура на комплексните числа. В тази лекция ще изложим основните алгебрични и геометрични свойства на комплексните числа, а също и основни понятия и твърдения за редици и редове от комплексни числа.

Комплексните числа се появяват в 16-ти век, по съвсем естествен начин- при решаването на кубични уравнения (не на квадратни!) и са свързани с имената на няколко италиански учени. В 1545 г. Г.Кардано публикува в своята прочута Ars magna (Велико изкуство) формулата за корените на кубичното уравнение $x^3 = px + q$ (общото кубично уравнение се свежда до тази форма), известна днес като формула на Кардано:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \, ,$$

като отбелязва, че тя е открита от С.Феро и Н.Фонтана (Тарталя). Тази формула въвежда комплексни числа, ако $(q/2)^2 - (p/3)^3 < 0$. При това корените на уравнението, в които те фигурират, не могат да бъдат отхвърлени (както е ставало при квадратните уравнения), защото всяко кубично уравнение има поне един реален корен. Така формулата на Кардано поставя въпроса: Какви са тези числа и как се действа с тях? Самият Кардано, не се занимава с този въпрос. Първият, който приема насериозно новите числа и извършва систематични пресмятания с тях е Р. Бомбели, чиято „Алгебра” се е появила в 1572 г., но както той пише: „в цялата работа има повече софистика отколкото истина”. Въпреки успешното използване на комплексните числа от Р.Бомбели, почти 250 години на тях се е гледало с недоверие и дори с известна неприязън. Дори математици като Декарт, Ойлер, Лайбниц са ги разглеждали като невъзможни, наричайки ги „имагинерни”. (Оттук е и означението $i = \sqrt{-1}$, въведено от Ойлер в 1777г.). Задоволителен отговор на въпроса “Какво е комплексно число?” е получен едва в края на 18-ти век. Независимо един от друг, Весел, Арган и Гаус достигат до една проста и естествена интерпретация на комплексните числа като точки (или вектори) в равнината. Термина „комплексно число” е въведен от Гаус, но първата строга формална дефиниция дължим на неговия съвременник Хамилтон.

Алгебрична структура на комплексните числа

Дефиниция 1.1. Комплексно число се нарича всяка наредена двойка от реални числа.

В множеството на комплексните числа $\mathbb{C} = \{z : z = (a,b),\, a,b \in \mathbb{R}\}$ се въвеждат равенство и операциите събиране и умножение:

- $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ и $b = d$.
- $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$.

- $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

Относно тези операции $\mathbb{C}$ е поле с нула двойката $(0,0)$ и единица двойката $(1,0)$. Ако $z=(a,b)\in\mathbb{C}$, то обратният му елемент относно събирането е $-z=(-a,-b)$, а относно умножението (при $z\neq 0$) е $z^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. Множеството от комплексни числа от вида $(a,0)$ е подполе на $\mathbb{C}$ и е изоморфно на полето на реалните числа, като изоморфизмът се задава с изображението $a\to(a,0)$. Ето защо оттук нататък ще отъждествяваме реалното число a с комплексното число $(a,0)$. Да въведем означението $i:=(0,1)$. Числото i се нарича имагинерна единица на $\mathbb{C}$. Имаме, че $i^2=ii=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$, т.е. i е един от корените на уравнението $z^2+1=0$ (другият е $-i$). С тези уговорки всяко комплексно число $z=(a,b)$ може да бъде записано в така наречения *алгебричен вид* $z=a+ib$ (или $z=a+bi$). Действително

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)=a+ib.$$

Чрез този запис действията с комплексни числа се свеждат до съответните действия с реални числа, като просто се разкриват скобите и се взема предвид, че $i^2=-1$. Така полето на комплексните числа е разширение на полето на реалните числа, в което уравнението $z^2+1=0$ има решение. Нещо повече, всеки полином с комплексни коефициенти има корен в $\mathbb{C}$. Това е съдържанието на основната теорема на алгебрата, доказателство на която ще изложим и в този курс (вж. Лекция 11). Но това разширение има и един сериозен недостатък, $\mathbb{C}$ не наследява наредбата на $\mathbb{R}$. Действително, ако в $\mathbb{C}$ имаше наредба наследяваща тази на $\mathbb{R}$, то или $i>0$ или $-i>0$ (очевидно $i\neq 0$). Ако $i>0$, то $ii>0$, откъдето $-1>0$, което е абсурд. Ако пък $-i>0$, то $(-i)(-i)>0 \Leftrightarrow -1>0$ и отново абсурд. Така в $\mathbb{C}$ неравенствата $z>w, z<w$ са лишени от смисъл (освен ако z и w не са реални числа).

С всяко комплексно число $z=a+ib$ се свързват означенията:

- $\operatorname{Re} z:=a$ - *реална част на* z
- $\operatorname{Im} z:=b$ - *имагинерна част на* z
- $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ - *модул* на z
- $\bar{z}=a-ib$ - *комплексно спрегнато на* z.

В сила са равенствата:

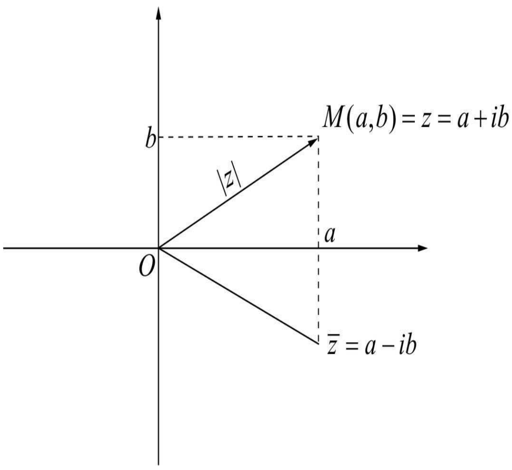
$$z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z \Leftrightarrow \operatorname{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2},\ z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}z \Leftrightarrow \operatorname{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2i},$$

$$\bar{\bar{z}}=z,\ \overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w},\ \overline{zw}=\bar{z}.\bar{w},\ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}},$$

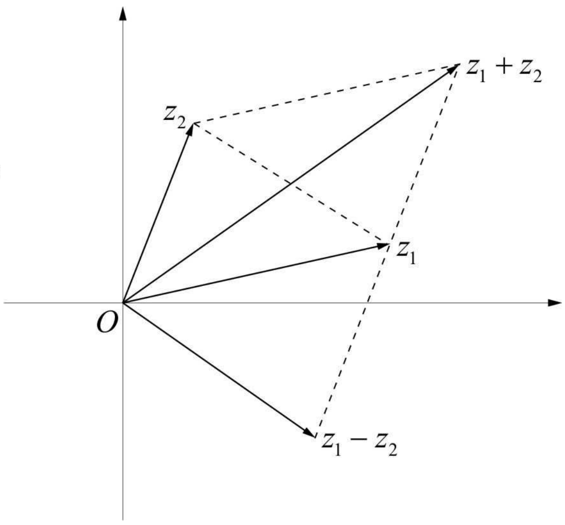
$$z.\bar{z}=|z|^2,\ \frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2},\ |z|=|\bar{z}|,\ |zw|=|z||w|,\ \left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}.$$

Геометрично представяне. Комплексната равнина

Следвайки формалната дефиниция на комплексно число като наредена двойка от реални числа, естествено е да си го представим като точка в Евклидовата равнина с декартова координатна система. Иначе казано, с всяка точка $M(a,b)\in\mathbb{R}^2$ се асоциира комплексното число $z=a+ib$. Така на реалните числа съответстват точки от абсцисната ос, поради което тя се нарича *реална ос*, а на чисто имагинерните числа, т.е. числата от вида $ib, b\in\mathbb{R}$, съответстват точки от ординатната ос, поради което тя се нарича *имагинерна ос* и се бележи с $i\mathbb{R}$. Освен това, тъй като всяка точка M от равнината се определя еднозначно от радиус-вектора си $\overrightarrow{OM}$, то оттук нататък ще отъждествяваме комплексното число $z=a+ib$ както с точката $M(a,b)$, така и с радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Равнината $\mathbb{R}^2$ се нарича *комплексна равнина* и се бележи с $\mathbb{C}$.



фиг.1.1



фиг.1.2

Сега въведените по-горе означения придобиват ясен геометричен смисъл. Така $|z|$ е дължината на вектора z, а $\bar{z}$ е точката симетрична на z относно реалната ос (фиг.1.1). Векторната интерпретация на комплексните числа нагледно илюстрира събирането и изваждането на комплексните числа чрез стандартното *правило на успоредника* (фиг.1.2). Ясно е, че евклидовото разстояние между точките z_1 и z_2 е равно на дължината на вектора $z_1 - z_2$, т.е на $|z_1 - z_2|$. Така $|z_2|$ е разстоянието между $z_1 + z_2$ и z_1, и затова са в сила *неравенствата на триъгълника* (фиг. 1.2)

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Те изразяват геометричния факт, че дължината на всяка страна в един триъгълник е не по-малка от модула на разликата от дължините на останалите две страни и не надминава сумата от дължините им. Тези неравенства са строги, освен ако някое от z_1 и z_2 е нула или ако векторите z_1 и z_2 са колинеарни и разнопосочни за първото неравенство и, ако те са колинеарни и еднопосочни - за второто**.**

По-общо, по индукция се доказва, че

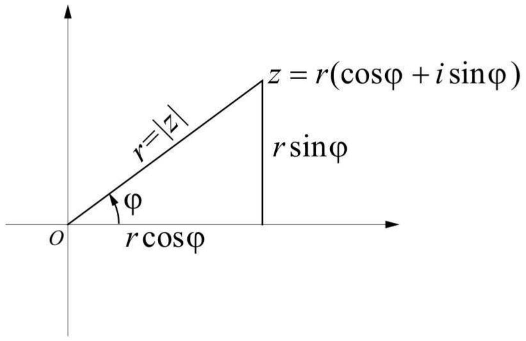
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Тригонометричен вид. Формула на Моавър

Векторът $z \neq 0$ се определя еднозначно от дължината си и от ъгъла, който сключва с положителната част на реалната ос - $\mathbb{R}^+$. Този ъгъл се нарича *аргумент* на z и се бележи с $\arg z$. Числото $z = 0$ няма аргумент. Ясно е, че ако φ е един аргумент на z, то $\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, е също аргумент на z и това са всичките му аргументи. Оттук нататък с $\arg z$ ще означаваме множеството от всички аргументи на z. Също така ако φ е един аргумент на z, ще пишем $\arg z = \varphi$, а не $\varphi \in \arg z$. Измежду всички аргументи на z съществува един единствен, който принадлежи на интервала $(-\pi, \pi]$. Означава се с $\arg_0 z$ и се нарича *главен аргумент* на z. Множеството от всички аргументи на z е

$$\arg z = \{\arg_0 z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Нека $z = x + iy$, $r = |z|$ и φ е един аргумент на z. Тогава (фиг.1.3) $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ и $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.



фиг.1.3

Този запис се нарича *тригонометричен вид* на z. Ясно е, че аргументите на z са решенията на системата

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$$
$$\sin\varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Ще отбележим още, че ако φ е един аргумент на z, то $tg\varphi = y/x$, но не всяко решение на това уравнение е аргумент на z. Така, ако $z = 1+i$, то $tg\varphi = 1$, откъдето $\varphi = \pi/4$ или $\varphi = 5\pi/4$ $(\varphi \in (0,2\pi])$ и $\varphi = 5\pi/4$ е аргумент на $-1-i$, а не на $z = 1+i$.

За удобство се въвежда означението на Ойлер $e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi$. Така тригонометричният запис на z приема вида $z = re^{i\varphi}$. Очевидно

$$|e^{i\varphi}| = 1,\ e^{i\varphi} = e^{i\theta} \Leftrightarrow \varphi - \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z},\ \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$$

и са в сила формулите на Ойлер

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

От събирателните формули за тригонометричните функции следва

(1.1) $$e^{i\varphi}e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}, \quad e^{i\varphi}/e^{i\theta} = e^{i(\varphi-\theta)}.$$

Така със символа $e^{i\varphi}$ се оперира както с познатата ни функция $e^x, x \in \mathbb{R}$, все едно, че i е реално число. След като се дефинира $e^z, z \in \mathbb{C}$, става ясно, че тези равенства са верни. Две комплексни числа записани в тригонометричен вид са равни, само ако модулите им са равни и аргументите им се различават с целочислено кратно на 2π, т.е. ако $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$, то

$$z = w \Leftrightarrow r = \rho \text{ и } \varphi - \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

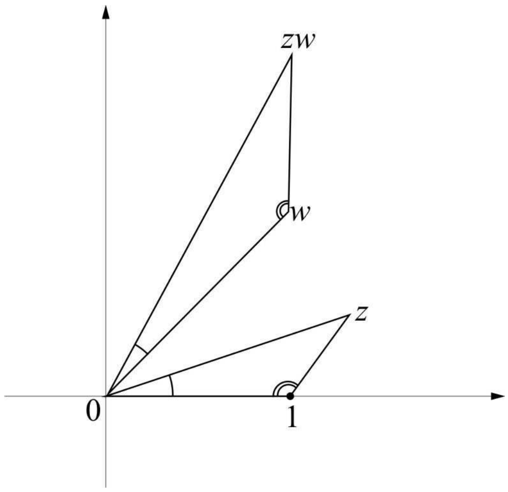
Освен това

$$zw = r\rho e^{i(\varphi+\theta)} \text{ и } z/w = (r/\rho)e^{i(\varphi-\theta)}.$$

Оттук следва

$$|zw| = |z||w| \text{ и } \arg zw = \arg z + \arg w.$$

Забележка 1.1. Равенството $\arg zw = \arg z + \arg w$ не е числово равенство и следва да се разбира като съвпадане на множества, т.е. ако $\arg z$ е един аргумент на z, $\arg w$ е един аргумент на w, то съществува аргумент на zw, така че $\arg zw = \arg z + \arg w$. То не винаги е вярно, ако аргумента е еднозначно определен. Така например $\arg_0(-1) = \pi$, но $\arg_0(-1)(-1) = \arg_0 1 = 0 \neq \pi + \pi$.



фиг.1.4

Тригонометричният запис на комплексните числа нагледно илюстрира геометричния смисъл на произведението на две комплексни числа. Числото zw се получава от z чрез хомотетия с коефициент $|w|$ и въртене около координатното начало на ъгъл $\arg w$. Така, ако разгледаме триъгълника с върхове в точките $0, 1$ и z, и след това построим подобен (и еднакво ориентиран) на него триъгълник с върхове в точките $0, w$, така че векторът w да е съответен на вектора 1, то третият връх на този триъгълник е zw (фиг.1.4).

От (1.1) по индукция следва $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, т.е.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

за всяко реално число φ и за всяко цяло число n. Това равенство се нарича *формула на Моавър*. Едно важно следствие от нея е формулата за n-тите корени на едно комплексно число.

Твърдение 1.1. Уравнението $z^n = c$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, има точно n различни корена и те се задават с формулата

(1.2) $$z_k = \sqrt[n]{|c|}e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

където θ е един аргумент на c.

Доказателство. Нека $z = re^{i\varphi}$ и $c = \rho e^{i\theta}$. Тогава от формулата на Моавър имаме

$$z^n = c \Leftrightarrow r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow r^n = \rho \text{ и } n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

откъдето

$$r = \sqrt[n]{\rho} \text{ и } \varphi = (\theta + 2k\pi)/n, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Така за корените на уравнението получаваме

$$z_k = \sqrt[n]{|c|}e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При $k = 0,1,\dots,n-1$ получаваме n различни корена. Поради периодичността на функциите $\cos\theta$ и $\sin\theta$, за всяка друга стойност на k, съответните стойности на z_k ги дублират, като $z_l = z_k \Leftrightarrow l \equiv \pm k (\operatorname{mod} n)$ за всяко $l \in \mathbb{Z}$ и $k = 0,1,\dots n-1$. Така уравнението $z^n = c$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, има точно n различни корена и те се задават с формулата (1.2). Те са върхове на правилен n-ъгълник, вписан в окръжност с център координатното начало и радиус $\sqrt[n]{|c|}$. Тази формула за пресмятане на корените ще наричаме също *формула на Моавър.*■

Редици от комплексни числа

Дефинициите за редица, подредица, ред, сходимост, точка на сгъстяване и т.н. в комплексната равнина са същите, както в реалния анализ. Поради това всички основни резултати от теорията на сходимостта на редици и редове в реалния случай без затруднение се пренасят и за редици и редове от комплексни числа. Ето защо тук ще се ограничим само с едно кратко изложение на някои основни понятия и резултати необходими ни за по-нататък.

Дефиниция 1.2. Околност (ε- околност) на точката $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича всеки кръг $K(z_0, \varepsilon) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \}$.

Дефиниция 1.3. Редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към $z \in \mathbb{C}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $\nu = \nu(\varepsilon)$, така че $z_n \in K(z, \varepsilon)$ при $n > \nu$ (т.е. за всяко ε-околност на z, вън от нея лежат само краен брой от членовете на редицата).
Точката z наричаме граница на редицата и пишем $z_n \to z$, при $n \to \infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Дефиниция 1.4. Редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича редица на Коши, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $\nu = \nu(\varepsilon)$, така че $|z_m - z_n| < \varepsilon$, при $m, n > \nu$.

Теорема 1.1. (Критерий на Коши) Редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ от комплексни числа е сходяща, точно когато тя е редица на Коши.

Следното твърдение свежда въпроса за сходимост на редица от комплексни числа към сходимост на редици от реални числа.

Твърдение 1.2. Редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ от комплексни числа е сходяща към z, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, точно когато $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$.

Доказателство. Следва от очевидните неравенства

$$\max\{|\operatorname{Re} w|, |\operatorname{Im} w|\} \le |w| \le |\operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} w|,\ w \in \mathbb{C},$$

приложени за $w = z_n - z$.■

Нека сега членовете на редицата $\{z_n \ne 0\}_{n=1}^{\infty}$ са записани в тригонометричен вид, т.е. $z_n = |z_n| e^{i\arg z_n}$, където $\arg z_n$ е един фиксиран аргумент на z_n (т.е. $\{\arg z_n\}$ е редица). Каква е връзката между сходимостта на редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и редиците $\{|z_n|\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\arg z_n\}_{n=1}^{\infty}$? От непрекъснатостта на функциите $\sin x, \cos x$ следва

Твърдение 1.3. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \arg_0 z_n = \arg_0 z$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Нека сега $\lim_{n\to\infty} z_n = z \ne 0$, Ясно е (например от неравенството на триъгълника), че $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$. Но дали редицата $\{\arg_0 z_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и ако е сходяща дали нейната граница е $\arg_0 z$?

Забележка 1.2. При $z = 0$, този въпрос е безсмислен. защото $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

Следните два примера показват, че без допълнителни предположения отговорът е отрицателен.

Пример 1.1. Нека $z_n = -1 + (-1)^n \dfrac{i}{n}$. Очевидно $z_n \to -1$. Но редицата $\{\arg_0 z_n\}_{n=1}^{\infty}$ е разходяща, защото $\arg_0 z_{2k} \to \pi$, докато $\arg_0 z_{2k-1} \to -\pi$.

Пример 1.2. Нека $z_n = -1 - \dfrac{i}{n}$. Сега $z_n \to -1$, $\arg_0 z_n \to -\pi$, докато $\arg_0(-1) = \pi$.

Твърдение 1.4. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \ne 0$ и φ е един фиксиран аргумент на z. Тогава ако изберем $\arg z_n \in (\varphi - \pi, \varphi + \pi]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \arg z_n = \varphi$.

Дефиниция 1.5. Точката $z \in \mathbb{C}$ е точка на сгъстяване на редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако във всяка ε- околност $K(z,\varepsilon)$ на z има безбройно много членове на редицата.

Твърдение 1.5. Точката $z \in \mathbb{C}$ е точка на сгъстяване на редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, точно когато съществува подредица $\left\{ z_{n_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$, така че $z_{n_k} \to z$.

Дефиниция 1.6. Редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, ако съществува число $R > 0$, така че $z_n \in K(0,R)$ за всяко n.

Теорема 1.2. (Болцано-Вайерщрас) Всяка ограничена редица от комплексни числа има точка на сгъстяване (т.е. има сходяща подредица).

Редове от комплексни числа

Дефиниция 1.7. Нека $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ е редица от комплексни числа. Редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ се нарича сходящ, ако редицата от парциални суми $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ е сходяща при $n \to \infty$, в противен случай казваме, че редът е разходящ. Ако $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то S се нарича сума на реда и пишем $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Непосредствено от Твърдение 1.2 следва

Твърдение 1.6. Редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящ, точно когато редовете $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ са сходящи и тогава $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$.

Твърдение 1.7. (Критерий на Коши) Редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящ, точно когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $\nu = \nu(\varepsilon)$, така че $| z_{m+1} + z_{m+2} + \cdots + z_n | < \varepsilon$ за всеки $n > m > \nu$.

В частност (при $m = n-1$) следва, че ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящ, то $z_n \to 0$.

Дефиниция 1.8. Редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ се нарича абсолютно сходящ, ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} | z_n |$ е сходящ.

Твърдение 1.8. Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е абсолютно сходящ, то той е сходящ.

Твърдение 1.9. Ако $|z_n| \le a_n, n = 1,2,...$ и редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е абсолютно сходящ.

За да установим дали един ред от комплексни числа е абсолютно сходящ можем да използваме всички, познати ни от реалния анализ, критерии за сходимост на редове с неотрицателни членове. Тук ще приведем само критерия на Коши. Преди това ще припомним следната

Дефиниция 1.9. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от реални числа. Числото α се нарича най-дясна точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, означава се $\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$, ако

1) α е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. съществува подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, така че $a_{n_k} \to \alpha$;

2) За всяко $\varepsilon > 0$,съществува число $\nu = \nu(\varepsilon)$, така че $a_n < \alpha + \varepsilon$ за всяко $n > \nu$ (т.е. надясно от $\alpha + \varepsilon$, за всяко $\varepsilon > 0$, има само краен брой членове на редицата и значи никое $\alpha' > \alpha$ не е точка на сгъстяване на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Теорема 1.3. (Критерий на Коши) Нека $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от комплексни числа и $l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|}$. Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е абсолютно сходящ, ако $l < 1$ и е разходящ ако $l > 1$.

Доказателство. Нека $l < 1$ и $\varepsilon > 0$ е такова, че $l + \varepsilon < 1$. Съществува число $\nu = \nu(\varepsilon)$, така че $\sqrt[n]{|z_n|} < l + \varepsilon \Leftrightarrow |z_n| < (l+\varepsilon)^n$ при $n > \nu$ и от Твърдение 1.9 следва, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е абсолютно сходящ. Ако $l > 1$, то съществува подредица $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, така че $\sqrt[n_k]{|z_{n_k}|} \to l$. Това означава, че $|z_n| \ge 1$ за безбройно много стойности на n и общият член на реда не клони към нула. Следователно редът $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е разходящ.■

Задачи

1.1. Нека $\widehat{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a,b \in \mathbb{R} \right\}$. Да се докаже, че $\widehat{\mathbb{C}}$ е поле относно обичайните операции събиране и умножение на реални 2×2 матрици и то е изоморфно на $\mathbb{C}$.

Забележка. Това е още един начин за въвеждане на комплексните числа.

1.2. Върху страните на четириъгълник външно са построени квадрати. Да се докаже, че двете отсечки, свързващи центровете на квадратите построени върху срещуположните страни на четириъгълника, са равни и взаимно перпендикулярни.

1.3. Да се докаже Твърдение 1.4.

1.4*. Да се докаже, че ако редицата $\{z_n\}_1^\infty$ е сходяща и $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, то $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k = z$.

1.5*. Да се докаже, че ако $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$ са две редици от положителни реални числа, то

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \le (\limsup_{n\to\infty} a_n)(\limsup_{n\to\infty} b_n)$$

при условие, че произведението в дясната страна на неравенството е добре дефинирано (т.е. изключваме случая, когато единият множител е 0, а другият е ∞). В случай, че една от редиците е сходяща имаме равенство.

Лекция 2
Топология в комплексната равнина – отворени, затворени, компактни, свързани множества. Разширената комплексна равнина. Сфера на Риман

В тази лекция ще въведем известна терминология и ще изложим основни свойства на различни видове множества в комплексната равнина.

Отворени и затворени множества

Дефиниция 2.1. Нека $M \subseteq \mathbb{C}$ е произволно подмножество на комплексната равнина. Една точка $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича вътрешна, респективно външна точка на M, ако съществува околност $K(z_0,\varepsilon)$ на z_0, така че $K(z_0,\varepsilon) \subset M$, съответно $K(z_0,\varepsilon) \subset \mathbb{C}\setminus M$. Ако във всяка околност на z_0 има точки както от M, така и от $\mathbb{C}\setminus M$, то z_0 се нарича гранична точка на M.

Множеството от вътрешните точки на M наричаме вътрешност на M и бележим с $int M$, а множеството от външните точки на M - външност на M и бележим с $ext\, M$. Множеството от граничните точки на M наричаме граница на M и бележим с ∂M. Така точките в комплексната равнина се разделят относно M на три непресичащи се множества, т.е $\mathbb{C} = int M \cup ext M \cup \partial M$.

Дефиниция 2.2. Пробита околност на точката z_0 се нарича множеството $K'(z_0,\varepsilon) = \{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$, т.е. това е околност на z_0, от която е отстранена самата точка z_0.

Дефиниция 2.3. Една точка $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича точка на сгъстяване на множеството M, ако във всяка нейна пробита околност има точка на M. Ако съществува пробита околност на $z_0 \in M$, в която няма други точки на M, то z_0 се нарича изолирана точка на M.

Обединението на едно множество M и всичките му точки на сгъстяване се нарича затворена обвивка на M и се бележи с $\overline{M}$.

Твърдение 2.1. Една точка $z_0 \in \mathbb{C}$ е точка на сгъстяване на множеството $M \subset \mathbb{C}$, точно когато съществува редица от точки $z_n \in M$, такава че $z_n \neq z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Примери 2.1.

(1) Нека $M = K(z_0,\varepsilon)$. Всяка точка $z \in M$ е вътрешна. Действително $K(z,\delta) \subset K(z_0,\varepsilon)$ за $0 < \delta < \varepsilon - |z - z_0|$, т.е. $M = int M$. Освен това $ext\, M = \{z : |z - z_0| > \varepsilon\}$, $\partial M = C(z_0,\varepsilon) = \{z : |z - z_0| = \varepsilon\}$, $\overline{M} = \overline{K(z_0,\varepsilon)} = \{z : |z - z_0| \le \varepsilon\}$;
(2) Нека $M = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$. Тук $int M = \varnothing, ext M = \mathbb{C}\setminus M$, $\partial M = M = \overline{M}$;
(3) Нека $M = \left\{i, \frac{i}{2}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots\right\}$. Сега, $\partial M = \overline{M} = M \cup \{0\}$ и $int M = \varnothing, ext M = \mathbb{C}\setminus \overline{M}$;

(4) Нека $M = K'(z_0,\varepsilon) = \{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$. Имаме $M = intM$, $\partial M = C(z_0,\varepsilon) \cup \{z_0\}$, $\overline{M} = \overline{K(z_0,\varepsilon)}, extM = \mathbb{C} \setminus \overline{M}$.

(5) Нека $M = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x, y \in \mathbb{Q}\}$. Тъй като множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$ е изброимо и навсякъде гъсто в множеството на реалните числа, то M е изброимо и навсякъде гъсто в $\mathbb{C}$. Тогава $\partial M = \overline{M} = \mathbb{C}$ и $intM = extM = \varnothing$.

Забележка 2.1. От самите дефиниции е ясно, че:

●всяка вътрешна точка на M е точка на M и е точка на сгъстяване на M, но (вж. Примери 2.1 (3)) една точка може да е точка на сгъстяване на M и да не принадлежи на M. Също така, ако $z_0 \in \mathbb{C}$ е точка на сгъстяване на M, то във всяка пробита околност на z_0 има безбройно много точки на M;

●всяка точка от $\overline{M}$ (∂M) е или точка на сгъстяване на M или е изолирана точка на M;

● $\overline{M} = M \cup \partial M = intM \bigcup \partial M = \mathbb{C} \setminus extM$.

Дефиниция 2.4. Едно множество $M \subset \mathbb{C}$ се нарича отворено, ако всичките му точки са вътрешни, т.е за всяко $z \in M$, съществува ε-околност $K(z,\varepsilon)$ (ε може да зависи от z), така че $K(z,\varepsilon) \subset M$.

Предвид $intM \subset M$, това означава, че M е отворено, точно когато $M = intM$.

Примери 2.2.

(1) За всяко $z \in \mathbb{C}$, $K(z,\varepsilon)$ е отворено множество, затова го наричаме отворен кръг.

(2) $H^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ е отворено множество;

(3) $\overline{H}^+ = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ не е отворено множество; $0 \in \overline{H}^+$, но 0 не е вътрешна точка на $\overline{H}^+$;

(4) Ако $M \subset \mathbb{C}$ е произволно подмножество на комплексната равнина, то $intM$ и $extM$ са отворени множества

(5) $\mathbb{C}$ е отворено множество;

(6) $\varnothing$ е отворено множество: ако допуснем, че $\varnothing$ не е отворено, то съществува $z \in \varnothing$**(!)** такова, че във всяка ε-околност на z има точки непринадлежащи на $\varnothing$**.** Понеже в $\varnothing$ изобщо няма точки, това не е възможно. (Нещо като служебна победа, поради неявяване на противника.)

Теорема 2.1. (1) Ако $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е произволна фамилия от отворени подмножества на комплексната равнина, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ е отворено множество;

(2) Ако $U_1, U_2, ..., U_n$ са отворени подмножества на комплексната равнина, то $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ е отворено множество.

Доказателство. (1) Ако $U_\alpha = \varnothing$ за всяко $\alpha \in A$, то $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \varnothing$ е отворено множество. Ако това не е така и $z_0 \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, то съществува $\alpha_0 \in A$, така че

$z_0 \in U_{\alpha_0}$. Понеже U_{α_0} е отворено, то съществува $\varepsilon > 0$, такова, че $K(z_0,\varepsilon) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ и значи $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ е отворено множество.

(2) Ако $\bigcap_{k=1}^{n} U_k = \varnothing$, твърдението е вярно. Нека $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \neq \varnothing$ и $z_0 \in \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Тогава $z_0 \in U_k$, $k = 1,2...,n$ и тъй като U_k е отворено множество, то съществува $\varepsilon_k > 0$, такова, че $K(z_0,\varepsilon_k) \subset U_k$, $k = 1,2...,n$. Нека $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$. Ясно е сега, че $\varepsilon > 0$ и $K(z_0,\varepsilon) \subset K(z_0,\varepsilon_k) \subset U_k$, $k = 1,2...,n$. Следователно $K(z_0,\varepsilon) \subset \bigcap_{k=1}^{n} U_k$ и $\bigcap_{k=1}^{n} U_k$ е отворено множество.■

Забележка 2.2. Сечението на безброй много отворени множества може да не е отворено множество. Така $U_n = K(0,1/n), n = 1,2,...$ са отворени множества, но $\bigcap_{н=1}^{\infty} U_н = \{0\}$ не е отворено.

С така дефинираните отворени множества $\mathbb{C}$ се превръща в топологично пространство.

Дефиниция 2.5. Нека $X \neq \varnothing$ е произволно множество. Една система τ от подмножества на X, се нарича топология в X, ако

1) $X, \varnothing \in \tau$;

2) Обединението на всяка съвкупност от елементи на τ е елемент на τ;

3) Сечението на краен брой елементи на τ е елемент на τ.

Двойката (X,τ) се нарича *топологично пространство*, а елементите на τ - отворени множества.

Дефиниция 2.6. Едно множество $M \subset \mathbb{C}$ се нарича затворено, ако допълнението му $\mathbb{C} \setminus M$ е отворено множество.

Примери 2.3.

(1) $\mathbb{C}$ и $\varnothing$ са затворени множества;
(2) $\overline{H}^+ = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ е затворено множество;
(3) $\overline{K(z,\varepsilon)} = \{\zeta : |\zeta - z| \leq \varepsilon\}$ е затворено множество, затова го наричаме затворен кръг;
(4) Ако $M \subset \mathbb{C}$ е произволно подмножество на комплексната равнина, то ∂M и $\overline{M}$ са затворени множества.

Твърдение 2.2. Едно множество $M \subset \mathbb{C}$ е затворено, точно когато то съдържа всичките си точки на сгъстяване, т.е. $\overline{M} \subset M$ или, предвид $M \subset \overline{M}$, точно когато $M = \overline{M}$.

Още една полезна характеристика на затворените множества е следната:

Твърдение 2.3. Едно непразно множество $M \subset \mathbb{C}$ е затворено, точно когато границата на всяка сходяща редица от точки на M е точка от M, т.е когато $z_н \in M, n = 1,2,...$ и $z_n \to z$, то $z \in M$.

В сила е следният аналог на Т.2.1

Теорема 2.2. (1) Ако $V_1, V_2, ..., V_n$ са затворени подмножества на комплексната равнина, то $\bigcup_{k=1}^{n} V_k$ е затворено множество;
(2) Ако $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е произволна фамилия от затворени подмножества на комплексната равнина, то $\bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$ е затворено множество.

Забележка 2.3. Обединението на безброй много затворени множества може да не е затворено множество. Така $V_n = \left\{z : \operatorname{Re} z \geq \frac{1}{n}\right\}$ са затворени множества, но $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ е отворено множество

Накрая ще отбележим, че едно множество $M \subset \mathbb{C}$ може да не бъде нито отворено, нито затворено. Например множеството $M = \{z : 0 < |z| \leq 1\}$ не е отворено, защото $1 \in M$, но 1 не е вътрешна точка на M и не е затворено, защото 0 е точка на сгъстяване на M, но $0 \notin M$.

Компактни множества

Дефиниция 2.7. Едно множество $M \subset \mathbb{C}$ се нарича ограничено, ако съществува $R > 0$, така че $|z| < R$ за всяко $z \in M$, т.е ако $M \subset K(0, R)$. Ако M е ограничено множество, диаметър на M се нарича числото $diam(M) = sup\{|z - w| : z, w \in M\}$.

Дефиниция 2.8. Едно множество $K \subset \mathbb{C}$ се нарича компактно (компакт), ако то е затворено и ограничено множество.

Като вземем предвид теоремата на Болцано-Вайерщрас и Твърдение 2.3 получаваме следната характеристика на компактните множества в комплексната равнина.

Теорема 2.3. Едно множество $K \subset \mathbb{C}$ е компактно, точно когато всяка редица от точки на K има сходяща подредица, чиято граница е точка от K.

Доказателство. Нека $K \subset \mathbb{C}$ е компакт, т.е затворено и ограничено множество. Тогава всяка редица $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ от точки на K е ограничена и според теоремата на Болцано-Вайерщрас има сходяща подредица $z_{n_k} \to z$. Понеже K е затворено множество, то (Твърдение 2.3) $z \in K$.

Обратно, нека всяка редица от точки на K има сходяща подредица с граница точка от K. Ако допуснем, че K не е ограничено, то за всяко естествено число n съществува $z_n \in K$, така че $|z_n| > n$. Всяка подредица на $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена и значи е разходяща. Ако K не е затворено, то съществува точка на сгъстяване на K - $z, z \notin K$. Съществува редица $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ от точки на K, такава че $z_n \to z$. Тогава всяка подредица на тази редица е също сходяща към z и значи нейната граница не е точка от K.

Следователно K е и ограничено и затворено множество.■

Ще приведем още една, по-обща характеристика на компактните подмножества на комплексната равнина. Преди това

Дефиниция 2.9. Отворено покритие на едно множество $M \subseteq \mathbb{C}$ се нарича всяка съвкупност от отворени множества $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, чиито обединение съдържа M, т.е $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$; подпокритие е подсъвкупност със същото свойство; крайно подпокритие е покритие съставено от краен брой множества, т.е. съществуват краен брой $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in A$, така че $M \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$.

Теорема 2.4. (Хайне-Борел) Едно множество $K \subset \mathbb{C}$ е компактно, точно когато, всяко отворено покритие на K съдържа крайно подпокритие.

Така имаме три еквивалентни определения за това едно множество $K \subset \mathbb{C}$ да е компактно:

- ● K е затворено и ограничено;
- ● Всяка редица от точки на K има сходяща подредица, чиято граница е точка от K;
- ● Всяко отворено покритие на K има крайно подпокритие.

Забележка 2.4. В случая на общо топологично пространство, тези три твърдения за множеството K не са еквивалентни, и за определение на компактно множество, се възприема третата версия. Възможността едно отворено покритие да се редуцира до крайно покритие свежда доказателството на едно твърдение за компакт до доказването му само за кръг. Ето защо много локални свойства (свойства, които са изпълнени в околност на всяка точка на едно множество) са и свойства на целия компакт. Така че компактността е едно хубаво свойство на множествата.

Примери 2.4.

(1) $\mathbb{C}$ не е компакт;
(2) $\varnothing$ е компакт;
(3) За всяко $z \in \mathbb{C}$, $\overline{K(z,r)}$ е компакт;
(4) $\overline{H}^+ = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ не е компакт.

Едно интересно свойство на компактните множества е следната теорема на Кантор, която ще използваме при доказателството на теоремата на Коши за триъгълен контур.

Теорема 2.5. (Кантор) Ако $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от непразни, вложени едно в друго компактни подмножества на комплексната равнина, т.е. $K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_n \supset ...$, и $diam(K_n) \to 0$, при $n \to \infty$, то съществува единствена точка $z_0 \in \mathbb{C}$, такава че $z_0 \in K_n$ за всяко n.

Доказателство. Да изберем по една точка $z_n \in K_n$ за всяко n. Ще покажем, че редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица на Коши. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тъй като $diam(K_n) \to 0$, при $n \to \infty$, то съществува естествено число ν, такова че $diam(K_n) < \varepsilon$ за всяко $n > \nu$. Тогава $z_m, z_n \in K_{\nu+1}$ при $m, n > \nu$, защото $K_m \subset K_{\nu+1}, K_n \subset K_{\nu+1}$, и $|z_m - z_n| < diam(K_{\nu+1}) < \varepsilon$. Следователно (Критерий на Коши) редицата е сходяща и нека $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Понеже за всяко n, в K_n са всички членове на редицата с изключение на краен брой, т.е. $z_m \in K_n$, при $m > n$ ($K_m \subset K_n$,при $m > n$) и K_n е затворено множество, то $z_0 \in K_n$ за всяко n. Да допуснем сега, че съществува $z_1 \neq z_0$, и $z_1 \in K_n$ за всяко n. Тогава $0 < |z_1 - z_0| \leq diam(K_n)$ и условието $diam(K_n) \to 0$, при $n \to \infty$ не е изпълнено. С това теоремата е доказана.■

Разстояние между множества

Дефиниция 2.10. Нека A и B са две непразни подмножества на комплексната равнина. Разстояние между A и B се нарича числото

$$dist(A,B) = inf\left\{|z-w| : z \in A, w \in B\right\}.$$

Ясно е, че $dist(A,B) \geq 0$ и ако $A \cap B \neq \varnothing$, то $dist(A,B) = 0$. Но може $A \cap B = \varnothing$ и $dist(A,B) = 0$; например $A = K(0,1)$, $B = C(0,1)$. Обаче, ако A и B са затворени и поне едно от тях е компакт, то $dist(A,B) > 0$. По-точно в сила е

Твърдение 2.4. Ако A и B са две непразни, непресичащи се, затворени подмножества на комплексната равнина и поне едно от тях е компактно, то съществуват точки $a \in A$ и $b \in B$, така че $dist(A,B) = \left|a-b\right| > 0$.

Доказателство. Нека A е компакт и $d = dist(A,B)$. От самото определение следва, че съществуват редици от точки $a_n \in A$ и $b_n \in B$, $n = 1,2...$, така че $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = d$. Тъй като A е компакт, съществува подредица $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, така че $a_{n_k} \to a$ и $a \in A$. Ще покажем, че редицата $\left\{b_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ е ограничена. Действително, от неравенството на триъгълника имаме $\left|b_{n_k}\right| \leq \left|a_{n_k} - b_{n_k}\right| + \left|a_{n_k}\right|$. Понеже редиците $\left\{\left|a_{n_k} - b_{n_k}\right|\right\}_{k=1}^{\infty}$ и $\left\{a_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ са сходящи, те са ограничени и значи е ограничена и редицата $\left\{b_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Сега от теоремата на Болцано-Вайерщрас следва, че съществува подредица, за да не претрупваме записа да я означим пак с $\left\{b_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, така че $b_{n_k} \to b$. Освен това $b \in B$, защото B е затворено множество. Тогава $d = \lim_{k\to\infty}\left|a_{n_k} - b_{n_k}\right| = |a-b| > 0$.■

Забележка 2.5. Условието поне едно от множествата да е компактно е съществено. Например множествата $A=\mathbb{R}$ и $B=\{(x,e^x),x\in\mathbb{R}\}$ са затворени, не се пресичат и $dist(A,B)=0$.

Свързани множества. Области

Интуитивно казваме, че едно множество е свързано, ако то е съставено само от едно „парче”. За нас е важно да прецизираме тази идея и това ще направим в следващите редове.

Дефиниция 2.11. Едно множество $M\subseteq\mathbb{C}$ се нарича свързано, ако не съществуват непресичащи се отворени множества U и V, такива че $U\cap M\neq\varnothing, V\cap M\neq\varnothing$ и $M\subseteq U\cup V$.

В частност, ако M е отворено , то е свързано, ако не съществуват непразни, непресичащи се отворени множества U и V, така че $M=U\cup V$. Това означава, че ако едно отворено и свързано множество се представя като обединение на две непресичащи се отворени множества U и V, то или $U=\varnothing$, или $V=\varnothing$. Същото е вярно и ако заменим „отворени” със „затворени”.

Дефиниция 2.12. Всяко отворено и свързано множество се нарича област**.**

Примери 2.5.

(1) Всяко едноточково множество е свързано, но всяко крайно множество от поне две точки не е свързано;
(2) Всяка отсечка $[z_1,z_2]=\{z: z=(1-t)z_1+tz_2,\ t\in[0,1]\}$, свързваща точките $z_1\in\mathbb{C}$ и $z_2\in\mathbb{C}$ е свързано множество;
(3) Всяка начупена линия $[z_1,z_2,...,z_n]=[z_1,z_2]\cup[z_2,z_3]\cup...\cup[z_{n-1},z_n]$ съставена от краен брой последователно свързани отсечки, така че краят на всяка отсечка е начало на не-повече от една отсечка, е свързано множество;
(4) Множеството $\{z:0<\operatorname{Re} z<1\}\cap\{z:|\operatorname{Im} z|>1\}$ не е свързано.

Това определение за свързаност, изказано в негативен смисъл, не се поддава на геометрична интерпретация. (Но е удобно при доказателствата.) Има още един вид свързаност, т.н. линейна свързаност, която има ясен геометричен смисъл и в случая на отворени множества е еквивалентна на дефинираната току-що.

Дефиниция 2.13. Път (Крива) в $\mathbb{C}$ се нарича всяко непрекъснато изображение $z=\gamma(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ на интервала $[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$ в комплексната равнина.

Иначе казано, път това е комплекснозначна функция $z=\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ на реалната променлива t, непрекъсната за всяко $t\in[a,b]$, което означава, че реалнозначните функции $x(t)$ и $y(t)$ са непрекъснати в интервала $[a,b]$. Казваме, че пътят γ свързва началната му точка $\gamma(a)$ с крайната му точка $\gamma(b)$. Множеството $\{\ z: z=\gamma(t), t\in[a,b]\ \}$ се нарича *носител* на пътя и се бележи с γ^*.

Дефиниция 2.14. Едно множество $M \subseteq \mathbb{C}$ се нарича линейно свързано, ако всеки две точки z_1 и z_2 от M могат да се свържат с път γ, лежащ в M, т.е. $\gamma^* \subseteq M$.

Сега ще покажем, че за отворени множества въведените два вида свързаност съвпадат.

Теорема 2.6. Нека $G \subseteq \mathbb{C}$ е отворено множество. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) Всеки две точки от G могат да се свържат с начупена линия, лежаща изцяло в G;

(2) G е линейно-свързано множество;

(3) G е свързано.

Доказателство. Очевидно (1)$\Rightarrow$(2). Ще докажем, че (2)$\Rightarrow$(3). Да допуснем, че G не е свързано множество, т.е. съществуват непразни, непресичащи се отворени множества G_1 и G_2, така че $G = G_1 \cup G_2$. Нека $z_1 \in G_1$ и $z_2 \in G_2$ са произволни точки и $z = \gamma(t) : [a,b] \to G$, $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ е път, който ги свързва. Нека $t_0 = sup\{t \in [a,b] : \gamma(s) \in G_1, a \le s < t\}$. Имаме,че $a < t_0 < b$, защото множествата G_1 и G_2 са отворени. Ще покажем, че точката $z_0 = \gamma(t_0)$ не принадлежи нито на G_1, нито на G_2. Действително, ако $z_0 \in G_1$, то съществува околност $K(z_0, \varepsilon) \subset G_1$. Това означава, че има точка $z' = \gamma(t') \in K(z_0, \varepsilon) \cap \gamma$, от G_1, за която $t' > t_o$. Аналогично, ако $z_0 \in G_2$ то има точка $z'' = \gamma(t'')$ от G_2, за която $t'' < t_o$. И двете заключения противоречат на дефиницията на точна горна граница. Следователно $z_0 \notin G$, което не е възможно. Това противоречие доказва свързаността на G.

За да завършим доказателството на теоремата, остава да покажем, че (3)$\Rightarrow$(1). Нека G е отворено и свързано множество, $z_0 \in G$ и да дефинираме $G_1 = \{z \in G : \exists \text{ начупена линия } d = [z_0, z_1, ..., z_n = z] \subset G\}$, $G_2 = G / G_1$. Ясно е, че $G = G_1 \cup G_2$ и $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Ще покажем, че $G_2 = \varnothing$.

Нека $z_1 \in G_1$ и $d \subset G$ е начупена линия, която свързва z_1 със z_0. Тъй като G е отворено множество, съществува околност $K(z_1, \varepsilon_1) \subset G$. Но всяка точка $z \in K(z_1, \varepsilon_1)$ се свързва със z_1 чрез отсечката $[z_1, z]$ и тогава начупената линия $d \cup [z_1, z] \subset G$ свързва z със z_0, т.е. $K(z_1, \varepsilon_1) \subset G_1$ и значи G_1 е отворено множество. Аналогично следва, че и G_2 е отворено множество. Действително, ако $z_2 \in G_2$, то съществува околност $K(z_2, \varepsilon_2) \subset G$. Всички точки от тази околност ще лежат в G_2, защото в противен случай в $K(z_2, \varepsilon_2)$ ще има точка от G_1 и тогава, както по-горе, ще съществува начупена линия свързваща z_2 със z_0. Тъй като G е свързано множество, то или $G_1 = \varnothing$, или $G_2 = \varnothing$. Но $z_0 \in G_1$ и значи $G_2 = \varnothing$. Следователно $G = G_1$. С това теоремата е доказана.■

Забележки 2.6.

(1) В доказателството на импликацията (2)$\Rightarrow$(3) не използвахме, че G е отворено множество. Така всъщност доказахме, че всяко линейно свързано множество е свързано. Обратното не е вярно за произволни множества. Така множеството $G=\{(0,y),y\in[-1,1]\}\cup\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right),x\in(0,1]\right\}$ е свързано, но не е линейно свързано.

(2) Твърдението в (1) допуска следното уточнение: Всеки две точки от G могат да се свържат с начупена линия, чийто отсечки са успоредни или на реалната ос или на имагинерната ос и лежаща изцяло в G. Работата е в това (вж. доказателството), че отсечката $[z_1,z]$ можем да заменим с други две, едната от които е успоредна на реалната ос, а другата на имагинерната ос.

Следствие 2.1. Единствените подмножества на $\mathbb{C}$, които са едновременно отворени и затворени са $\varnothing$ и самото $\mathbb{C}$.

Доказателство. Да допуснем противното и нека $U\subset\mathbb{C}$ е непразно, едновременно отворено и затворено множество. Тогава $V=\mathbb{C}\setminus U$ е непразно отворено множество, $U\cap V=\varnothing$ и $\mathbb{C}=U\cup V$, т.е. $\mathbb{C}$ не е свързано множество. Но $\mathbb{C}$ е отворено и очевидно линейно свързано (всеки две точки от комплексната равнина се свързват чрез отсечка) множество и според Т.2.5 е свързано. Това противоречие доказва твърдението.■

Сега ще покажем, че всяко множество в комплексната равнина може да се представи като обединение на свързани множества.

Дефиниция 2.15. Нека $M\subseteq\mathbb{C}$. Едно подмножество $K\subseteq M$ се нарича компонента на свързаност на M, ако то е свързано и не се съдържа строго в никое друго свързано подмножество на M.

Теорема 2.7. Всяко множество $M\subseteq\mathbb{C}$ се представя по единствен начин като обединение на компонентите си на свързаност.

Доказателство. Нека $z_0\in M$ и K_{z_0} е обединението на всички свързани подмножества на M, които съдържат z_0 (да отбележим, че $K_{z_0}\neq\varnothing$, $\{z_0\}\subset K_{z_0}$). Ще докажем, че K_{z_0} е свързано множество. Да допуснем противното и нека U и V са непразни, непресичащи се отворени множества, такива че $U\cap K_{z_0}\neq\varnothing, V\cap K_{z_0}\neq\varnothing$ и $K_{z_0}\subseteq U\cup V$. Нека за определеност $z_0\in U$ и $z\in V\cap K_{z_0}$ е произволна точка. От самото определение на K_{z_0} следва,че съществува свързано подмножество K_0 съдържащо z_0 и z. За него имаме $U\cap K_0\neq\varnothing, V\cap K_0\neq\varnothing$ и $K_0\subseteq U\cup V$, което противоречи на свързаността му. И така множеството K_{z_0} е свързано и е максимално сред свързаните подмножества на M, съдържащи точката z_0, т.е. K_{z_0} е компонента на свързаност на M. Остава да покажем, че всеки две компоненти или нямат обща точка или съвпадат. Действително, нека K_1 и K_2 са две компоненти на свързаност на M, които имат обща точка. Тогава $K_1 \cup K_2$ е свързано подмножество на M, съдържащо компонентите K_1 и K_2. Това е възможно, само ако $K_1 = K_1 \cup K_2 = K_2$. Така за всяка точка $z_0 \in M$,съдържащата я компонента се определя еднозначно.■

Следствие 2.2. Компонентите на свързаност на всяко отворено множество в $\mathbb{C}$ са области и са изброимо много.

Доказателство. Нека $G \subset \mathbb{C}$ е отворено множество, D е негова компонента на свързаност и $z \in D$ е произволна точка. Тъй като G е отворено, то съществува околност $K(z,\varepsilon) \subset G$. Но $K(z,\varepsilon)$ е свързано множество, съдържащо z и от самото определение за компонента следва $K(z,\varepsilon) \subset D$, т.е. D е отворено множество. За да се убедим, че компонентите са изброимо много, да разгледаме множеството $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{Q}\}$ от точки в комплексната равнина, чиито координати са рационални числа. То е изброимо и е навсякъде гъсто в $\mathbb{C}$, поради което всяко отворено подмножество на $\mathbb{C}$, в частност всяка компонента на G, съдържа точка от $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$. Следователно множеството от компонентите е изброимо.■

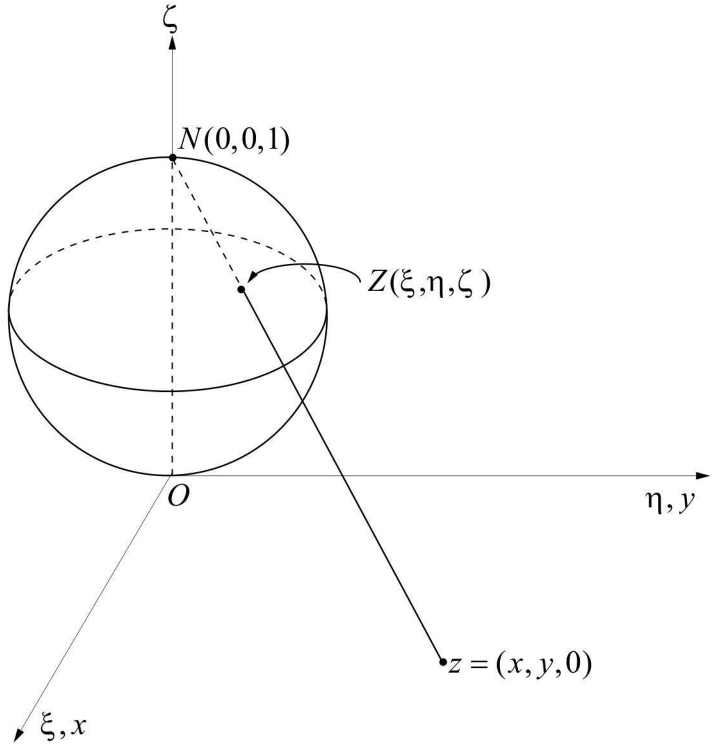
Разширената комплексна равнина. Сфера на Риман

Както вече отбелязахме, комплексната равнина не е компакт. За да преодолее този недостатък, Риман допълва комплексната равнина с една идеална точка $z = \infty$, безкрайната точка. Така се получава едноточковата компактификация на комплексната равнина или още *разширената комплексна равнина*, която ще означаваме с $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Комплексната равнина $\mathbb{C}$ ще наричаме *крайна комплексна равнина*. Новата точка не е елемент от полето на комплексните числа и не участва в алгебричната структура на $\mathbb{C}$, но можем да дефинираме някои алгебрични действия с нейно участие, без това да ни доведе до безсмислици. По дефиниция, ще считаме, че

$$\begin{cases} \infty \pm z = z \pm \infty = \infty, \ z \in \mathbb{C} \\ \infty . z = z . \infty = \infty, \ z \in \overline{\mathbb{C}}, \ z \neq 0 \\ \dfrac{z}{\infty} = 0, \ z \in \mathbb{C} \\ \dfrac{z}{0} = \infty, \ z \in \overline{\mathbb{C}}, \ z \neq 0. \end{cases}$$

Изразите $\infty \pm \infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty . 0, \dfrac{0}{0}$ за нас няма да имат смисъл. Също така, понятията реална част, имагинерна част, аргумент на безкрайната точка са лишени от смисъл. Но е естествено да считаме, че $|\infty| = +\infty$.

Разширената комплексна равнина се илюстрира геометрично, чрез т.н. (модел) сфера на Риман, върху която безкрайната точка има конкретно представяне, и е равноправна с всички останали точки.



фиг.2.1

Нека $S=\left\{(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^3:\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\right\}$ е двумерната сфера в тримерното евклидово пространство с център $(0,0,1/2)$ и радиус $1/2$, допираща се до равнината $\zeta=0$ в координатното начало. Тази точка ще наречем южен полюс на сферата S, а диаметрално противоположната ѝ точка $N(0,0,1)$ ще наречем (не случайно) *северен полюс*. Да отъждествим комплексната равнина $\mathbb{C}$ с равнината $\zeta=0$, като осите Ox и Oy съвпаднат съответно с осите $O\xi$ и $O\eta$. На всяка точка $Z(\xi,\eta,\zeta)\in S,\, Z\neq N$ да съпоставим точката $z=x+iy\in\mathbb{C}$ (фиг.2.1), в която лъчът $NZ^{\to}$ пресича $\mathbb{C}$. Точката z се нарича стереографска проекция на точката Z. Така получаваме взаимно еднозначно съответствие между продупчената сфера $S/\{N\}$ и комплексната равнина. Това съответствие се нарича *стереографска проекция* и се използва в картографията, за направа на плоски географски карти. Да опишем аналитично стереографската проекция. Най-напред да изразим координатите на Z чрез тези на z. Параметричното уравнение на лъчът $Nz^{\to}$ е $\xi=tx,\,\eta=ty,\,\zeta=1-t,\,0\le t<+\infty$ ($t=0$ съответства на северния полюс, а $t=1$ на z). Пресечната му точка със сферата S се получава за стойност на параметъра $t\neq 0$, за която $t^2(x^2+y^2)+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2=\frac{1}{4}$, откъдето намираме $t=\frac{1}{|z|^2+1}$. Следователно координатите на точката $Z(\xi,\eta,\zeta)\in S,\, Z\neq N$ се пресмятат по формулите

(2.1) $$\xi = \frac{x}{|z|^2+1}, \qquad \eta = \frac{y}{|z|^2+1}, \qquad \zeta = \frac{|z|^2}{|z|^2+1}.$$

Обратно, предвид $t = 1-\zeta$, координатите на z се изразяват чрез тези на Z с формулите

(2.2) $$x = \frac{\xi}{1-\zeta} \quad , \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}.$$

От (2.1) и (2.2) е ясно, че когато $|z| \to +\infty$ съответната точка Z е произволно близко до северния полюс N и обратно, на всички точки от сферата, които са произволно близко до N, съответстват точки от $\mathbb{C}$ с произволно голям модул. Това просто наблюдение прави безкрайната точка естествен кандидат за образ на северният полюс N при стереографската проекция. По такъв начин установяваме взаимно еднозначно съответствие между разширената комплексна равнина $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ и сферата S. Така получихме геометричен модел на разширената комплексна равнина, в който ∞ е „видима” точка. Този модел, т.е. сферата, заедно със стереографската проекция, се нарича *сфера на Риман.*

Ще отбележим още, че от (2.1) и (2.2) следва кръговото свойство на стереографската проекция а именно:

Твърдение 2.5. При стереографската проекция на окръжностите и правите в $\mathbb{C}$ съответстват окръжности върху Римановата сфера, при това на окръжност в $\mathbb{C}$ съответства окръжност не минаваща през северния полюс N, а на права – окръжност през N.

Ето защо е удобно правите в $\mathbb{C}$ да разглеждаме като окръжности през безкрайната точка. Сега предното твърдение можем да изкажем така: При стереографската проекция на окръжностите върху Римановата сфера съответстват окръжности в разширената комплексна равнина.

Топология в разширената комплексна равнина

Преди всичко трябва да въведем понятието околност на безкрайната точка. Като се ръководим от геометричният модел на разширената комплексна равнина , естествено е околност на ∞ да наречем всяко множество в $\overline{\mathbb{C}}$, което е образ при стереографската проекция на сферична околност на северният полюс N. Тук под сферична околност на точка P от сферата разбираме „шапката”, която отсича от нея равнина перпендикулярна на диаметъра през P и съдържаща P. Така достигаме до следното определение:

Дефиниция 2.16. Околност на ∞ се нарича външността на всеки кръг с център в нулата, т.е. $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$.

Имайки предвид това определение, всички основни топологични понятия и твърдения, изложени преди за $\mathbb{C}$ се пренасят и за разширената комплексна равнина $\overline{\mathbb{C}}$, като се премахне изискването за ограниченост. Ще се спрем накратко на някои от тях.

Ясно е, че $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

Теорема 2.8. (Болцано-Вайерщрас) Всяка редица $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $z_n \in \mathbb{C}$ има точка на сгъстяване.

Дефиниция 2.17. Едно множество $F \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ се нарича компактно, ако то е затворено множество.

Теорема 2.8. За едно множество $F \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ следните твърдения са еквивалентни:

(1) F е компактно;

(2) От всяко отворено покритие на F може да се избере крайно подпокритие;

(3) Всяка редица от точки на F има сходяща подредица, чиято граница е точка от F.

В частност, разширената комплексна равнина е компакт. Така добавяйки към крайната равнина една идеална точка ние наистина я компактифицирахме.

Забележка 2.7. Стереографската проекция задава хомеоморфизъм между $\overline{\mathbb{C}}$ и сферата на Риман, т.е. те са топологично еквивалентни. Така всяко топологично понятие или свойство на сферата се пренася с нейна помощ в разширената комплексна равнина. В частност, тъй като сферата е компакт то и разширената комплексна равнина е компакт.

Задачи

2.1. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област. Да се докаже, че съществуват компактни множества K_n, такива че $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$ и $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$.

Упътване. $K_n = \{z \in D : |z| \le n, dist(z, \partial D) \ge 1/n\}$.

2.2. Да се докаже Твърдение 2.5.

2.3. Използвайки стереографската проекция можем да въведем сферично разстояние в $\overline{\mathbb{C}}$ чрез евклидовото разстояние върху сферата. По-точно, нека $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ и $Z_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), Z_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ са съответните им точки върху сферата. Дефинираме сферично разстояние $\rho(z_1, z_2)$ чрез формулата:

$$\rho(z_1, z_2) = d(Z_1, Z_2) = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}\,.$$

Да се докаже, че:

а) $\rho(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; $\rho(z, \infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, z \in \mathbb{C}$;

б) $\rho(z_1, z_2) = \rho\left(\overline{z_1}, \overline{z_2}\right) = \rho\left(1/z_1, 1/z_2\right)$; в) $\rho\left(z, -1/\overline{z}\right) = 1$;

г) $\left(\overline{\mathbb{C}}, \rho\right)$ е пълно метрично пространство.

Лекция 3
Функция на комплексна променлива. Непрекъснатост. Реална и комплексна диференцируемост. Уравнение на Коши-Риман. Конформни изображения

Функция на комплексна променлива

Под комплекснозначна функция на комплексна променлива ще разбираме изображение $f : M \to \mathbb{C}$, $M \subseteq \mathbb{C}$ на подмножество на комплексната равнина в комплексната равнина, т.е. това е функция, чийто дефиниционно множество M и множество от стойности $f(M)$ са подмножества на комплексната равнина. Ще използваме записа $w = f(z), z \in M$. Както е общоприето, под функция ще разбираме еднозначно изображение, т.е. на всяко $z \in M$ съответства единствено число $w = f(z) \in f(M)$. Една от спецификите на комплексния анализ, това което го отличава от реалния анализ, е че в него по съвсем естествен начин възниква необходимостта от изучаване на многозначните функции, т. е функции при които на всяко z съответства повече от една стойност на $f(z)$. Такива са например функциите $\arg z, \sqrt{z}$. Тук ние ще третираме многозначните функции като съвкупност от еднозначни функции, наричани *еднозначни клонове* на многозначната функция. Така $\sqrt{z}$ има два еднозначни клона, а $\arg z$ има безбройно много еднозначни клонове. Ако еднозначното изображение $f : M \to \mathbb{C}$, $M \subseteq \mathbb{C}$ е инективно, ще казваме, че f е *еднолистна функция* в M, т.е.това е функция за която, ако $z_1 \neq z_2$, то $f(z_1) \neq f(z_2)$. Ако една функция е еднолистна, то тя има обратна (еднозначна) функция; ако не е еднолистна (в такъв случай е общоприет термина многолистна функция) нейната обратна функция е многозначна функция. Например функциите z^2 и e^z не са еднолистни в $\mathbb{C}$ и техните обратни функции $\sqrt{z}$ и $\log z$ са многозначни.

Като вземем предвид, че ние отъждествихме комплексната равнина $\mathbb{C}$ с евклидовата равнина $\mathbb{R}^2$, можем да интерпретираме комплекснозначната функция $w = f(z)$ на комплексната променлива $z = x + iy$ и като функция $w = f(x, y)$ на двете реални променливи x и y. Освен това, дефинирайки функциите $u(x, y) = u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = v(z) = \operatorname{Im} f(z)$ можем да запишем $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ и да разглеждаме f като векторнозначна функция на две реални променливи (т.е. като изображение $f : (x, y) \to (u, v)$ на подмножество на $\mathbb{R}^2$ в подмножество на $\mathbb{R}^2$). Функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ще наречем съответно реална и имагинерна част на функцията f. Тези интерпретации естествено ни водят до заключението, че теорията на функциите на комплексна променлива тривиално се свежда до теорията на функциите на две реални променливи. Това заключение обаче е твърде прибързано и общо. Има функции, които са функции само на $z = x + iy$, а не просто функции на x и y. Например $x^2 - y^2 + i2xy = (x + iy)^2 = z^2$. От друга страна функцията $x^2 + y^2 + i2xy$ не може да се представи като функция само на $z = x + iy$. Нашата цел е да отделим и изучим този специален клас от функции, всяка от които може да се изрази като функция само на една единствена променлива $z = x + iy$. Изненадващото е, че това се постига с едно единствено и съвсем естествено изискване, а именно тези функции да са диференцируеми. Също така изненадващо е, че свойството диференцируемост има неочаквани и дълбоки последствия за самата природа на тези функции, едно от най-важните от които е, че локалните свойства на функцията до голяма степен определят нейните глобални свойства. Диференцируемите функции ще наречем холоморфни и те са основният обект в този курс.

Непрекъснатост

Диференцируемостта, която формално се дефинира както в реалния анализ, предполага непрекъснатост. Затова тук ще изложим най-важните факти, касаещи непрекъснатостта на функция на комплексна променлива.

Дефиниция 3.1. Една функция $f : M \to \mathbb{C}$ е непрекъсната в $z_0 \in M$, ако за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta > 0$ (зависещо от ε и от z_0), така че $\left| f(z) - f(z_0) \right| < \varepsilon$, за всяко $z \in M$, за което $|z - z_0| < \delta$.

Геометрично това означава, че за всяка околност $K(w_0, \varepsilon)$ на $w_0 = f(z_0)$, съществува околност $K(z_0, \delta)$ на z_0, така че $f\left(K(z_0, \delta) \cap M\right) \subset K(w_0, \varepsilon)$.

Забележка 3.1. Според тази дефиниция, ако дефиниционното множество M има изолирани точки, то f е непрекъсната във всяка от тях.

Ако z_0 е точка на сгъстяване на M, предното определение е еквивалентно на съществуването на $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Това означава, че за всяка редица от точки $\{z_n \in M, z_n \neq z_0\}_{n=1}^{\infty}$, за която $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, съответната редица $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Една функция $f : M \to \mathbb{C}$ е непрекъсната в M, ако тя е непрекъсната във всяка точка $z_0 \in M$.

Лесно се доказва, че една функция е непрекъсната, точно когато са непрекъснати нейните реална и имагинерна части. Ето защо всички основни резултати за непрекъснатост, изложени в курса по реален анализ за функции на две реални променливи, без изменение се пренасят и за функции на комплексна променлива. А именно, че линейна комбинация, произведение, частно, суперпозиция на непрекъснати функции са също непрекъснати.

Дефиниция 3.2. Една функция $f : M \to \mathbb{C}$ е равномерно непрекъсната в M, ако за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta > 0$ (зависещо само от ε), така че $\left| f(z_1) - f(z_2) \right| < \varepsilon$, за всеки $z_1 \in M$, $z_2 \in M$, за които $|z_1 - z_2| < \delta$.

Нека функцията f е непрекъсната в множеството $M \subseteq \mathbb{C}$. Кои от свойствата на M се наследяват от неговият образ $f(M)$? (Т.е. кои свойства на множествата са инвариантни при непрекъснати изображения?)

Примери 3.1.

(1) Функцията $f(z) = |z|$ е непрекъсната в комплексната равнина и я изобразява в реалния интервал $[0,+\infty)$. Това показва, че при непрекъснатите изображения, образът на отворено множество, може да не е отворено множество (т.е. непрекъснатите изображения не са отворени изображения);
(2) Функцията $f(z) = e^z$ е непрекъсната в затворената ивица $\{0 \le \operatorname{Im} z \le 2\pi\}$ и я изобразява в отвореното множество $\mathbb{C} \setminus 0$. Това показва, че при непрекъснатите изображения, образът на затворено множество, може да не е затворено множество;
(3) Функцията $f(z) = \dfrac{1}{z}$ е непрекъсната в пробития единичен кръг $0 < |z| < 1$ и го изобразява във външността на единичния кръг. Това показва, че при непрекъснатите изображения, образът на ограничено множество, може да не е ограничено множество.

Но, ако комбинираме свойствата затвореност и ограниченост на множествата от последните два примера , то образът също има това свойство. В сила е

Теорема 3.1. Ако функцията $f : M \to \mathbb{C}$ е непрекъсната в M , то:

(1) Ако M е компакт, то и $f(M)$ е компакт;

(2) Ако M е свързано множество, то и $f(M)$ е свързано.

Накрая, ще приведем и две важни свойства на непрекъснатите върху компакт функции, които ще използваме по-нататък.

Теорема 3.2. Ако M е компакт и функцията $f : M \to \mathbb{C}$ е непрекъсната в M , то:

(1) $|f(z)|$ приема най-голяма и най-малка стойности в M ;

(2) f е равномерно непрекъсната върху M .

Реална и комплексна диференцируемост
Уравнение на Коши-Риман

Нека комплекснозначната функция $w = f(z)$ е дефинирана в околност на $z_0 \in \mathbb{C}$.

Дефиниция 3.3. Функцията $f(z)$ се нарича $\mathbb{C}$-диференцируема (комплексно-диференцируема) в точката z_0, ако съществува границата

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Тази граница се нарича производна на f в z_0 и се бележи с $f'(z_0)$ или $\dfrac{df}{dz}(z_0)$.

Използвайки обичайните означения за измененията на аргумента - Δz, h, и на функцията - Δf, диференчното частно ,чиято граница дефинира $f'(z_0)$ ще записваме и така

(3.1) $$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Тези еквивалентни записи, в много случаи са по-удобни за работа. Ще отбележим изрично, че $\Delta z, (h)$ не е реално число и то може да клони към нула по всевъзможни начини в комплексната равнина.

Дефиниция 3.4. Функцията $f(z)$ се нарича холоморфна в точката $z_0 \in \mathbb{C}$, ако тя е $\mathbb{C}$-диференцируема в околност на z_0. Една функция дефинирана в отворено множество G се нарича холоморфна в G, ако тя е холоморфна във всяка точка на G. Функциите, които са холоморфни в цялата равнина $\mathbb{C}$ се наричат цели функции.

От самото определение (3.1) следва, че една функция $f(z)$, дефинирана в околност U на $z_0 \in \mathbb{C}$, е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0 точно когато съществува константа $A \in \mathbb{C}$, така че

(3.2) $$\frac{\Delta f}{\Delta z} = A + \alpha(\Delta z) \Leftrightarrow \Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z,\ z \in U,$$

където $\alpha(\Delta z)$ е функция дефинирана в U и такава, че $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0$. Разбира се, имаме $A = f'(z_0)$. Тази еквивалентна преформулировка илюстрира важния факт, че диференцируемостта в точката z_0 означава, че близо до нея $f(z)$ се апроксимира с линейната функция $f(z_0) + f'(z_0)\Delta z$. От тук в частност следва, че ако f е диференцируема в z_0, то тя е непрекъсната в z_0. Обратното не е вярно и за разлика от реалният анализ, намирането на съответния пример не е проблем. Така функцията $f(z) = \bar{z}$ е непрекъсната за всяко $z \in \mathbb{C}$, но не е диференцируема в никоя точка на $\mathbb{C}$. Действително, в този случай диференчното частно е $\dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \dfrac{\Delta \bar{z}}{\Delta z}$ и при реални Δz то е равно на 1, а при чисто имагинерни Δz, на -1. Следователно то няма граница при $\Delta z \to 0$ и разглежданата функция не е $\mathbb{C}$-диференцируема.

Ще отбележим още, че тъй като определението за производна на функция на комплексна променлива, формално повтаря определението за производна на функция на една реална променлива, то основните правила за производна на линейна комбинация, произведение, частно, на суперпозиция на функции и т.н. са в сила и в комплексния случай.

Нека сега разгледаме $f(z)$, $z = x + iy$, като функция на двете реални променливи x и y, и да се запитаме каква е връзката между комплексната диференцируемост на $f(z)$ и диференцируемостта на $f(x, y)$ като функция на две реални променливи? От предният пример с функцията $f(z) = \bar{z} = x - iy$ става ясно, че тези две понятия са съвършено различни, една комплекснозначна функция може да е безкрайно диференцируема като функция на две реални променливи, но да не е $\mathbb{C}$-диференцируема в никоя точка. За да си изясним зависимостта между двете понятия ще въведем следната

Дефиниция 3.5. Функцията $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, дефинирана в околност на точката $z_0 = x_0 + iy_0$ се нарича $\mathbb{R}$-диференцируема (реално диференцируема) в точката z_0, ако $u(x, y)$ и $v(x, y)$ са диференцируеми в точката (x_0, y_0).

Да припомним, че по дефиниция диференцируемост на реалнозначните функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точката (x_0, y_0) означава, че в околност на тази точка са в сила представянията

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\end{aligned},$$

където $\lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \alpha_1(\Delta x, \Delta y) = \lim\limits_{\Delta x, \Delta y \to 0} \alpha_2(\Delta x, \Delta y) = 0$.

За да улесним сравняването на реалната диференцируемост с комплексната да презапишем в комплексен вид предните равенства. Имаме:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1(\Delta z)\Delta z \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_2(\Delta z)\Delta z\,,\end{aligned}$$

където $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha_1(\Delta z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha_2(\Delta z) = 0$.

Сега като вземем предвид, че $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$, ще получим:, че $\mathbb{R}$-диференцируемостта на f в z_0 е еквивалентна на съществуването на константи $a, b \in \mathbb{C}$ така, че в околност на z_0

(3.3) $$\Delta f = a\Delta x + b\Delta y + \beta(\Delta z)\Delta z\,,$$

където $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\beta(\Delta z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha_1(\Delta z)+i\lim\limits_{\Delta z\to 0}\alpha_2(\Delta z)=0$.
От тук непосредствено следва, че f, като комплекснозначна функция на реалните променливи x и y, има частни производни по x и по y в точката z_0 и имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=a,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)=b\,.$$

Обратното не е вярно. Например функцията

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3}{|z|^2}, z\neq 0\\ 0 \quad, z=0\end{cases}$$

има частни производни $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0)=1,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0)=-i$, но не е $\mathbb{R}$-диференцируема в нулата. От друга страна, от реалния анализ ни е известно, че ако f има частни производни по x и по y и те са непрекъснати в точката z_0, то f е $\mathbb{R}$-диференцируема в z_0.

По-нататък освен стандартните означения за частните производни ще използваме и означенията f_x, f_{xy} и т.н.

Теорема 3.3. Функцията f дефинирана в околност на точката z_0 е $\mathbb{C}$-диференцируема в тази точка, точно когато f е $\mathbb{R}$-диференцируема в z_0 и удовлетворява уравнението (условието) на Коши-Риман

(*CR*) $$f_x(z_0)+if_y(z_0)=0\,.$$

Доказателство. Нека f е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0.Тогава

$$\Delta f\,=\,f'(z_0)\Delta z+\alpha(\Delta z)\Delta z=\,f'(z_o)\Delta x+if'(z_0)\Delta y+\alpha(\Delta z)\Delta z\,,$$

където $\lim_{\Delta z\to 0}\alpha(\Delta z)=0$. Това означава, че f е $\mathbb{R}$-диференцируема в z_0 и

$$f_x(z_0)+if_y(z_0)=\,f'(z_0)+i(if'(z_0))=0\,.$$

Обратно, ако f е $\mathbb{R}$-диференцируема в z_0 и удовлетворява (*CR*), то

$$\Delta f\,=\,f_x(z_0)\Delta x+\,f_y(z_0)\Delta y+\beta(\Delta z)\Delta z=\,f_x(z_0)\Delta x+if_x(z_0)\Delta y+\beta(\Delta z)\Delta z=\,f_x(z_0)\Delta z+\beta(\Delta z)\Delta z$$

където $\lim_{\Delta z\to 0}\beta(\Delta z)=0$. Следователно f е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0 и $f'(z_0)=\,f_x(z_0)$.■

Забележки 3.2,

(1) Сега е ясно защо функцията $f(z)=\bar{z}=x-iy$ не е $\mathbb{C}$-диференцируема в никоя точка – тя не удовлетворява условието на Коши-Риман в никоя точка, защото $f_x(z)+if_y(z)=1-i.i=2$.

(2) Уравнението на Коши-Риман е необходимо, но не е достатъчно условие за $\mathbb{C}$-диференцируемост. Действително функцията

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

удовлетворява уравнението на Коши-Риман в точката $z=0$, защото $f_x(0)=f_y(0)=0$. Но от друга страна имаме, че при $y=\alpha x, \alpha\in\mathbb{R}$

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^2}{(1+\alpha^2)x^2}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Тъй като тази граница варира с α, то f не е $\mathbb{C}$-диференцируема в $z=0$.

Следствие 3.1. Ако една функция f има частни производни f_x, f_y в околност на точката $z_0=x_0+iy_0$, които са непрекъснати в тази точка и удовлетворяват условието на Коши-Риман, то тя е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0.

Да запишем сега условието на Коши-Риман в термините на реалната и имагинерната част на функцията. Нека $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Имаме

$$f_x+if_y=0 \Leftrightarrow u_x-v_y+i(u_y+v_x)=0.$$

Така уравнението на Коши-Риман е еквивалентно на системата уравнения

(*CR*) $$u_x=v_y,\, u_y=-v_x,$$

които ще наричаме уравнения (условия) на Коши-Риман.

Теорема 3.4. Ако f е холоморфна в област D и $f'(z)=0$ за всяко $z\in D$, то f е константа в D.

Доказателство. Нека $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Тъй като $f'(z)=f_x(z)=-if_y(z)$, от условието следва $f_x=f_y=0 \Leftrightarrow u_x=u_y=v_x=v_y=0$ навсякъде в D. От реалния анализ е добре известно, че ако производната на една функция на една реална променлива е тъждествено нула в даден интервал, тя е константа в този интервал. Следователно от $u_x=u_y=0$ в D следва, че $u(x,y)$ е константа върху всяка отсечка в D успоредна на една от координатните оси. Аналогично от $v_x = v_y = 0$ в D следва, че и $v(x,y)$ е константа върху всяка такава отсечка. Така $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ е константа върху всяка начупена линия в D, чиито отсечки са успоредни на координатните оси. Но, (виж Забележки 2.6,(2) от Лекция 2) всеки две точки от D могат да се свържат с такава начупена линия. Следователно $f(z_1) = f(z_2)$ за всеки две точки $z_1, z_2 \in D$, т.е. f е константа в D.■

Условието D да е свързано множество е съществено. Така, ако D е обединение на два непресичащи се кръга и дефинираме $f = 1$ върху единият от тях и $f = 0$ върху другият, то $f'(z) = 0$ за всяко $z \in D$, но f не е константа в D.

Формален подход към $\mathbb{C}$-диференцируемостта. Операторите ∂ и $\bar{\partial}$

Сега ще получим един формален запис на условието на Коши-Риман. Ако f е реално-диференцируема в точката z_0 и изразим Δx и Δy чрез $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и $\Delta \bar{z} = \Delta x - i\Delta y$, то условието за $\mathbb{R}$-диференцируемост на f в точката z_0 приема вида

$$\Delta f = \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) - if_y(z_0)\big)\Delta z + \frac{1}{2}\big(f_x(z_o) + if_y(z_0)\big)\Delta \bar{z} + \beta(\Delta z)\Delta z .$$

Това ни провокира да въведем комплексните диференциални оператори (формалните частни производни по z и $\bar{z}$)

$$\partial f := \frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\big(f_x - if_y\big), \qquad \bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\big(f_x + if_y\big).$$

Тогава уравнението на Коши-Риман може да се запише във вида

$$\bar{\partial} f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 .$$

Така, ако формално разглеждаме функцията $f(x,y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$ като функция на „независимите” променливи z и $\bar{z}$, този запис хвърля светлина върху природата на холоморфните функции. Те не зависят от $\bar{z}$ и зависят само от z.

Връзка между холоморфните и хармоничните функции

Дефиниция 3.6. Нека $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ е отворено множество. Една функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ се нарича хармонична в Ω, ако $u \in C^2(\Omega)$ (т.е. има непрекъснати частни производни в Ω до втори ред включително) и удовлетворява уравнението на Лаплас $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$ в Ω.

Твърдение 3.1. Ако $f = u + iv$ е холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и $u, v \in C^2(D)$, то u и v са хармонични в D.

Доказателство. Тъй като f е комплексно-диференцируема в D, то $u_x = v_y, u_y = -v_x$ в D. Диференцираме двете равенства по x и по y и получаваме $u_{xx} = v_{yx},\ u_{xy} = v_{yy}, u_{yy} = -v_{xy}, u_{yx} = -v_{xx}$. От тук следва $u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy}$ и $v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy}$ в D. Тъй като u и v имат непрекъснати втори частни производни, то (както е добре известно от реалния анализ) $u_{xy} = u_{yx}$ и $v_{xy} = v_{yx}$. С това твърдението е доказано.■

Забележки 3.3.

(1) Изискването $u, v \in C^2(D)$ е всъщност излишно, тъй като, както ще се убедим по-нататък, холоморфните функции са безкрайно диференцируеми.
(2) Обратното твърдение, а именно, че ако u е хармонична в D, то съществува f холоморфна в D, така че $u = \operatorname{Re} f$ в D, е вярно само локално (вж. зад.8.3).

Крива в $\mathbb{C}$. Конформни изображения

За да изследваме свойствата на една комплекснозначна функция на комплексна променлива е важно да имаме нагледна представа за нея. В случая на реалнозначна функция на реална променлива, изключително полезно средство за онагледяване на нейните свойства е нейната графика-едномерна крива в $\mathbb{R}^2$. Една комплекснозначна функция на комплексна променлива също има графика, но тя е двумерна повърхнина в $\mathbb{R}^4$ и начертаването ѝ изглежда невъзможно (поне за нас простосмъртните), защото нашето въображение е тренирано в тримерното пространство. Все пак положението не е толкова безнадеждно както изглежда. Ако човек иска да получи геометрична картина на една холоморфна функция, може да използва различни методи. Най-простият и разбираем подход, и в този курс ще се придържаме към него, е човек да разглежда функцията $w = f(z)$ като изображение на комплексната равнина в себе си и да се опита да разбере как това изображение „деформира” равнината. За целта е удобно да си мислим, че разполагаме с две копия на комплексната равнина: в едното (z-равнина) изобразяваме дефиниционната област на f, а в другото (w-равнина) – областта от стойностите ѝ. Ще изследваме свойствата на изображението $w = f(z)$ като проследяваме образите (в w-равнината) на подходящо избрани геометрични обекти в z-равнината. Такива са например координатните мрежи в равнината или по-общо, различни семейства от криви.

Преди всичко ще уточним някои основни понятия свързани с кривите.

Дефиниция 3.7. Път в комплексната равнина се нарича всяко непрекъснато изображение $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, където $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Интервалът $[a,b]$ наричаме *параметричен интервал* на γ, уравнението $z=\gamma(t), t\in[a,b]$ - *параметрично уравнение* на γ, образът на $[a,b]$ при γ - *носител на пътя* γ и ще го бележим с γ^*. Да отбележим, че тъй като $z=\gamma(t)$ е непрекъсната функция, то γ^* е компактно и свързано множество, защото $[a,b]$ е компактно и свързано множество. Точките $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ ще наричаме съответно *начало и край на пътя*. Казваме, че *пътят е затворен*, ако $\gamma(a)=\gamma(b)$. Ако пътят няма самопресичания, т.е. $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ само ако $t_1=t_2$ или $t_1=a$ и $t_2=b$, ще казваме, че той е *прост* или още *жорданов*. Интуитивно, можем да си мислим пътят γ като траектория на движението на точката $\gamma(t)$, която описва γ в посока от $\gamma(a)$ към $\gamma(b)$, когато t описва интервала $[a,b]$ от a към b. Така естествената наредба на параметричният интервал индуцира наредба върху γ^*, която ще наречем положителна, като считаме, че точката $z_2=\gamma(t_2)$ следва точката $z_1=\gamma(t_1)$, ако $t_2>t_1$. Ако заменим изображението $z=\gamma(t), t\in[a,b]$ със $z=\gamma(b+a-t), t\in[a,b]$ ще получим път противоположен на γ, който ще бележим с γ^-. Той има същият носител, но точката $z=\gamma(t)$ го описва в противоположна посока – от $\gamma(b)$ към $\gamma(a)$. Така път в комплексната равнина е не просто множество от точки, той е наредено множество от точки.

За по-нататъшните ни цели е необходимо да не различаваме някои пътища, като въведем понятието еквивалентни пътища.

Дефиниция 3.8. Два пътя $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$ и $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{C}$ се наричат еквивалентни ($\gamma_1\sim\gamma_2$), ако съществува непрекъсната строго растяща функция $\lambda:[a_1,b_1]\to[a_2,b_2]$, за която $\lambda(a_1)=a_2$, $\lambda(b_1)=b_2$ и $\gamma_2(\lambda(t))=\gamma_1(t)$ за всяко $t\in[a_1,b_1]$.

Примери 3.1.

(1) $\gamma_1:z=\gamma_1(t)=t,\ t\in[0,1]$;

(2) $\gamma_2:z=\gamma_2(t)=\sin t,\ t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

(3) $\gamma_3:z=\gamma_3(t)=\sin t,\ t\in[0,\pi]$;

(4) $\gamma_4:z=\gamma_4(t)=e^{i2\pi t},\ t\in[0,1]$;

(5) $\gamma_5:z=\gamma_5(t)=e^{-i2\pi t},\ t\in[0,1]$;

(6) $\gamma_6:z=\gamma_6(t)=e^{i5\pi t},\ t\in[0,1]$.

Пътищата γ_1, γ_2 и γ_3 имат общ носител – отсечката $[0,1]$, $\gamma_1\sim\gamma_2$, но γ_3 не е еквивалентен на тях; γ_1 и γ_2 са жорданови, γ_3 е затворен и не е жорданов.

Пътищата γ_4, γ_5 и γ_6 също имат общ носител – единичната окръжност; γ_4 и γ_5 са затворени и жорданови, $\gamma_5=\gamma_4^-$, γ_6 не е затворен и не е жорданов и никои два от тях не са еквивалентни помежду си.

Лесно се проверява, че въведеното понятие еквивалентни пътища удовлетворява аксиомите за релация на еквивалентност: рефлексивност, симетричност и транзитивност. Следователно множеството от пътищата в $\mathbb{C}$ се разделя на непресичащи се класове на еквивалентност.

Дефиниция 3.9. Крива се нарича клас от еквивалентни пътища.

Всеки представител на класа на еквивалентност ще разглеждаме като специфична параметризация на кривата. Да отбележим, че различните пътища, които представляват една и съща крива имат общо начало и край, общ носител и еднаква ориентировка. (Също така имат една и съща дължина, ако са ректифицируеми, и, както ще видим по-нататък, интегралите от непрекъснати функции върху тях имат една и съща стойност.) Освен това можем да считаме, че всички те имат общ параметричен интервал, например $[0,1]$. (Това е така, защото за всеки затворен интервал $[a,b]$ функцията $\lambda(t)=a+(b-a)t,\ t\in[0,1]$, е строго растяща (даже диференцируема с $\lambda'(t)>0$) и $\lambda:[0,1]\leftrightarrow[a,b]$.)

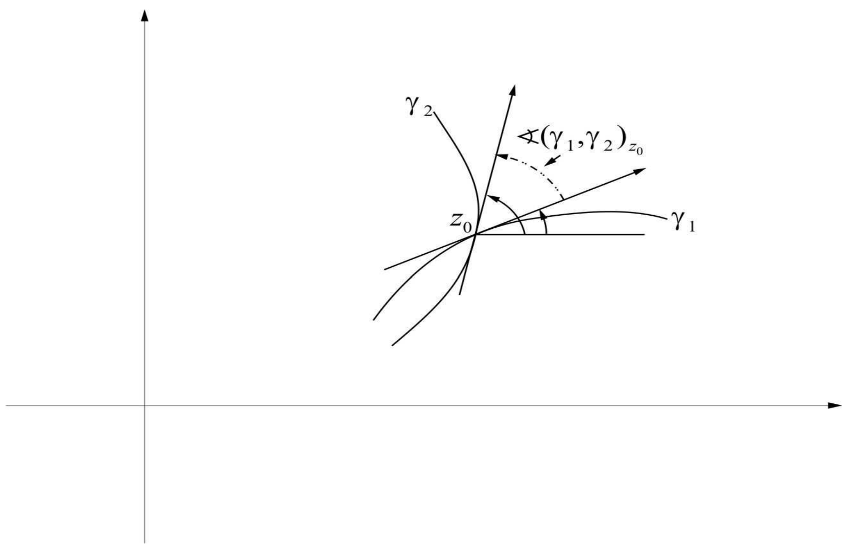
В изложението по-нататък, ако това няма да доведе до недоразумения, няма да правим разлика между кривата, пътят, който я представя и носителят на кривата.

Дефиниция 3.10. Пътят $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ се нарича гладък, ако функцията $z=\gamma(t)$ има непрекъсната производна в $[a,b]$ и $\gamma'(t)\neq 0$ за всяко $t\in[a,b]$. При $t=a$ и $t=b$ под $\gamma'(a)$ и $\gamma'(b)$ разбираме съответно дясна и лява производна. Пътят $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ се нарича частично гладък, ако съществуват точки $a=a_0<a_1<...<a_n=b$, така че γ е гладък във всеки от интервалите $[a_k,a_{k+1}],\ k=0,1,...,n-1$. В частност лявата и дясната производна в точката a_k могат да са различни за $k=1,...,n-1$.

Еквивалентност на гладки пътища се дефинира както в случая на непрекъснати пътища с допълнителното изискване функцията λ да бъде непрекъснато диференцируема и $\lambda'(t)>0$ за всяко t. Клас от еквивалентни гладки пътища наричаме *гладка крива*.

Една гладка крива $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ се характеризира с това, че има допирателна във всяка точка. Ако $z_0=\gamma(t_0)$ е точка от кривата, то векторът $\gamma'(t_0)$ е допирателен към кривата в точката z_0 и $\arg\gamma'(t_0)$ е ъгълът, който той сключва с положителната посока на реалната ос.

Дефиниция 3.11. Нека $\gamma_1:[a,b]\to\mathbb{C}$ и $\gamma_2:[c,d]\to\mathbb{C}$ са гладки криви през точката $z_0=\gamma_1(t_0)=\gamma_2(\tau_0)$. Под ъгъл между кривите γ_1 и γ_2 в точката z_0 се разбира ъгълът между допирателните към γ_1 и γ_2 в z_0, мерен от допирателната към γ_1 до допирателната към γ_2, т.е. това е ъгълът на който трябва да завъртим, в посока обратна на движението на часовниковата стрелка, единичният допирателен вектор към γ_1 в z_0, за да съвпадне с единичният допирателен вектор към γ_2 в z_0.



фиг.3.1

Ще възприемем означението $\angle(\gamma_1,\gamma_2)_{z_0}$. По дефиниция имаме (фиг.3.1.)

$$\angle(\gamma_1,\gamma_2)_{z_0} = \arg\gamma_2'(\tau_0) - \arg\gamma_1'(t_0).$$

Забележка 3.4. Ъгълът между две гладки криви не зависи от избора на параметризация на тези криви, което прави предната дефиниция коректна.

Дефиниция 3.12. Нека $f(z)$ е дефинирана и непрекъснато диференцируема в околност на z_0. Изображението $w = f(z)$ се нарича конформно в z_0, ако то запазва ъглите между гладките криви през z_0, по големина и по ориентировка.

Теорема 3.5. Ако $f(z)$ е холоморфна в z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то изображението $w = f(z)$ е конформно в z_0.

Доказателство. Нека $\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ е гладка крива през $z_0 = \gamma(t_0)$. Ъгълът, който допирателната към γ в z_0 сключва с положителната посока на реалната ос е равен на $\arg\gamma'(t_0)$. Нека $\Gamma = f(\gamma)$ е образът на γ. Тъй като $\Gamma'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$, това е гладка крива (тук предполагаме непрекъснатост на f', което както ще се убедим по-нататък автоматично следва от холоморфността на f) през точката $w_0 = f(z_0)$ и ъгълът, който допирателната към Γ в w_0 сключва с положителната посока на реалната ос е равен на $\arg\Gamma'(t_0)$. Имаме

$$\arg\Gamma'(t_0) = \arg(f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)) = \arg(f'(z_0).\gamma'(t_0)) = \arg f'(z_0) + \arg\gamma'(t_0),$$

откъдето

(3.4) $$\arg\Gamma'(t_0) - \arg\gamma'(t_0) = \arg f'(z_0),$$

т.е. аргументът на $f'(z_0)$ е ъгълът на който се завърта допирателната към γ в точката z_0 при изображението f. Тогава, ако $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ са гладки криви през точката $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(\tau_0)$ и $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ и $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$ са техните образи през $w_0 = f(z_0)$, то от (3.4) следва

$$\arg\Gamma_2'(\tau_0) - \arg\Gamma_1'(t_0) = \arg\gamma_2'(\tau_0) - \arg\gamma_1'(t_0),$$

т.е. $\angle(\Gamma_1, \Gamma_2)_{w_0} = \angle(\gamma_1, \gamma_2)_{z_0}$.■

Забележки 3.5.

(1). Функциите $f_1(z) = \bar{z}$ и $f_2(z) = z^2$ показват, че условията за диференцируемост на $f(z)$ и $f'(z_0) \neq 0$ са съществени. Действително нека γ_1 и γ_2 са съответно положителната реална и положителната имагинерна полуоси. Те сключват в $z = 0$ ъгъл $\frac{\pi}{2}$. Образите им при f_1 и f_2 сключват в $f_1(0) = f_2(0) = 0$ ъгли съответно равни на $-\frac{\pi}{2}$ и π. Това е така, защото $f_1(z)$ не е диференцируема за никое z, а $f_2'(0) = 0$.

(2). Вярно е и обратното. Ако комплексно-значната функция $f(z)$ има непрекъснати частни производни (по x и по y) в околност на z_0 и запазва ъглите между гладките криви през z_0, по големина и ориентировка, то $f(z)$ е холоморфна в z_0 (вж. [6], стр.38, Т.1)

Холоморфност и конформност в безкрайната точка

Дефиниция 3.13. Функцията $f(z)$ дефинирана в околност на безкрайната точка се нарича холоморфна (съответно конформна) в точката $z = \infty$, ако функцията

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

е холоморфна (съответно конформна) в нулата.

Дефиниция 3.14. Изображението $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, за което $f(z_0) = \infty, z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ се нарича конформно в точката z_0, ако изображението

$$h(z)=\frac{1}{f(z)}$$

е конформно в z_0. В частност, ако $f(\infty)=\infty$, то конформност на f в $z_0=\infty$ означава конформност на изображението

$$h(z)=\frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$$

в нулата.

Задачи

3.1. Нека $z=re^{i\varphi}$ и $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Да се докаже, че

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial r}+\frac{i}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

3.2. Да се докаже, че ако $f:D\to\mathbb{C}$ има непрекъснати частни производни по x и по y до втори ред включително, то $\Delta f=4\partial\overline{\partial}f=4\overline{\partial}\partial f$.

3.3. Да се докаже, че якобианът на всяка $\mathbb{R}$-диференцируема в точката z_0 функция, разглеждана като изображение на $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ е равен на

$$Jf(z_0)=|f_z(z_0)|^2-|f_{\overline{z}}(z_0)|^2.$$

3.4. Да се докаже, че ако $f=u+iv$ е холоморфна в околност на точката z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, то линиите на ниво $\{z:u(z)=u(z_0)\}$ и $\{z:v(z)=v(z_0)\}$ са гладки криви в околност на z_0 и се пресичат в точката z_0 под прав ъгъл.

3.5. Да се докаже, че ако функциите $f_1, f_2,..., f_n$ са двукратно комплексно диференцируеми в област D и $\sum_{k=1}^{n}|f_k|^2=const$ в D, то всяка от функциите $f_1, f_2,..., f_n$ е константа в D.

Лекция 4
Дробно-линейната функция

В тази лекция ще изучим един важен клас от конформни изображения със забележителни свойства – дробно-линейните трансформации, наричани още трансформации на Мьобиус.

Конформност, групово и кръгово свойство

Дефиниция 4.1. Дробно-линейна функция (трансформация) се нарича всяка функция от вида

(4.1) $$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\text{, където } a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ и } \Delta = ad - bc \neq 0.$$

При $c = 0$ (тогава $d \neq 0$ и $a \neq 0$) и $d = 1$ тя приема вида $w = T(z) = az + b$ и се нарича цяла линейна функция (трансформация). Числото Δ се нарича детерминанта на T. Ако $\Delta = 0$, то $T(z) = const$.

Цялата линейна трансформация изобразява взаимно еднозначно $\overline{\mathbb{C}}$ в себе си, като $T(\infty) = \infty$. Освен това, ако $\alpha = \arg a$, тя е суперпозиция на ротацията $z_1 = e^{i\alpha} z$, хомотетията $z_2 = |a| z_1$ и транслацията $w = z_2 + b$. Следователно, тя запазва ъглите между гладките криви по големина и ориентировка, т.е. тя е конформно изображение, и изобразява окръжност в окръжност и права в права.

Нека $c \neq 0$. Като решим (4.1) относно z получаваме

(4.2) $$z = T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Следователно на всяко $w \neq a/c, \infty$ съответства единствено $z \neq -d/c, \infty$, т.е. дробно-линейната трансформация изобразява взаимно еднозначно $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ върху $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. При това, като вземем предвид, че $\lim\limits_{z \to \infty} T(z) = a/c$ и $\lim\limits_{z \to -d/c} T(z) = \infty$ и положим $T(\infty) = a/c$, $T(-d/c) = \infty$, $T^{-1}(\infty) = -d/c$, $T^{-1}(a/c) = \infty$ получаваме взаимно еднозначно съответствие на $\overline{\mathbb{C}}$ в себе си. Освен това от (4.1) и (4.2) е ясно. че T и T^{-1} са непрекъснати изображения, т.е. дробно-линейната трансформация е хомеоморфизъм на разширената равнина в себе си.

Твърдение 4.1. Дробно-линейната трансформация е конформно изображение във всяка точка на разширената комплексна равнина.

Доказателство. В точките $z \neq -d/c, \infty$ конформността на изображението

$$w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

следва от това, че $T(z)$ е холоморфна и производната ѝ

$$T'(z) = \frac{\Delta}{(cz+d)^2}$$

е различна от нула в тези точки. Ще проверим конформноста на $T(z)$ в безкрайната точка. Ако $c = 0$, то $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ е цяла линейна функция, като $T(\infty) = \infty$. Трябва да проверим конформноста на изображението (вж. Дефиниция 3.14)

$$h(z) = \frac{1}{T\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{dz}{bz+a}$$

в нулата. Имаме $h'(0) = d/a \neq 0$. При $c \neq 0$ конформноста на $T(z)$ в безкрайната точка е еквивалентна на конформността на изображението

$$g(z) = T\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{bz+a}{dz+c}$$

в нулата. Сега $g'(0) = -\Delta / c^2 \neq 0$. Следователно дробно-линейната трансформация е конформна в безкрайната точка. Аналогично следва и конформноста на $T(z)$ в $z = -d/c, c \neq 0$.■

Твърдение 4.2. (Групово свойство) Множеството на дробно-линейните трансформации образува група относно операцията суперпозиция.

Доказателство. Ако $w = T(z)$ е дробно-линейна трансформация, от (4.2) следва, че нейната обратна трансформация, също е дробно-линейна, защото е изпълнено условието за коефициентите $ad - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$. Ако $T_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ и $T_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$ са дробно-линейни трансформации, директно се проверява, че суперпозицията им $T = T_1 \circ T_2$ е също дробно-линейна функция. При това, ако Δ_1 и Δ_2 са детерминантите съответно на T_1 и T_2, то за детерминантата Δ на T имаме $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$. Непосредствено се проверява, че аксиомите за група са изпълнени. Единичният елемент на групата е идентитетът $I : I(z) = z, z \in \overline{\mathbb{C}}$.■

Целите линейни трансформации образуват подгрупа.

Забележка 4.1. Предното твърдение става очевидно, ако свържем дробно-линейната трансформация (4.1) с комплексната 2×2 матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Условието $\Delta = ad - bc \neq 0$ е просто условието тази матрица да има ненулева детерминанта, т.е. да е обратима. Множеството от всички обратими 2×2 комплексни матрици образуват група относно умножението (на матрици) с единичен елемент единичната 2×2 матрица. Нарича се *обща линейна група* и се означава с $GL(2,\mathbb{C})$. Изображението на $GL(2,\mathbb{C})$ върху групата на дробно-линейните трансформации, при което на всяка матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$ съпоставяме дробно-линейната трансформация $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, запазва груповите операции, и е сюрективно, но не е инективно, защото на матриците $A, \lambda A \in GL(2,\mathbb{C})$ $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ съответства една и съща трансформация, т.е. то е хомоморфизъм.

Твърдение 4.3. (Кръгово свойство) Дробно-линейната трансформация изобразява окръжност от $\overline{\mathbb{C}}$ в окръжност от $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказателство. Да припомним, че под „окръжност в $\overline{\mathbb{C}}$" разбираме окръжност или права в $\mathbb{C}$, разглеждайки правите като окръжности през безкрайната точка. Ако $c = 0$ трансформацията е цяла линейна и, както вече отбелязахме, тя запазва окръжностите в $\overline{\mathbb{C}}$. Нека $c \neq 0$ и да разделим $az+b$ на $cz+d$. Получаваме представянето

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{\Delta / c}{cz+d}.$$

От него следва, че дробно-линейната трансформация е суперпозиция на цялата линейна трансформация $z_1 = cz + d$, трансформацията $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$ и цялата линейна трансформация $w = -\dfrac{\Delta}{c} z_2 + \dfrac{a}{c}$. Поради това е достатъчно да докажем кръговото свойство само за трансформацията $w = \dfrac{1}{z}$. За целта да запишем декартовото уравнение на окръжност в комплексен вид. Имаме $A(x^2+y^2) + B_1 x + B_2 y + C = 0$, където $A, B_1, B_2, C \in \mathbb{R}$ и $B_1^2 + B_2^2 > 4AC$ (при $A = 0$ това е уравнение на права). Заместваме в уравнението $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ и получаваме $A|z|^2 + \overline{B}z + B\bar{z} + C = 0$, където $B = (B_1 + iB_2)/2$ и $|B|^2 > AC$. При изображението $w = \dfrac{1}{z}$ окръжността зададена с това уравнение преминава в множество от точки, удовлетворяващи уравнението $C|w|^2 + Bw + \overline{B}\overline{w} + A = 0$. Очевидно това е пак уравнение на окръжност в $\overline{\mathbb{C}}$. С това твърдението е доказано.■

Дробно-линейната трансформация и двойното отношение на четири точки. Запазване на инверсията

Дефиниция 4.2. Просто отношение на три различни точки $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ се нарича числото

$$(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Дефиниция 4.3. Двойно отношение на четири различни точки $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$, взети в този ред, се нарича числото

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1, z_2, z_3)}{(z_1, z_2, z_4)} = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)},$$

ако и четирите точки са крайни, и съответната гранична стойност, ако някое $z_k = \infty$. Например $(z_1, z_2, z_3, \infty) = \lim_{z_4 \to \infty}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$.

Лесно се проверява, че ако $\lambda = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, то съответните двойни отношения, които се получават като разместваме точките приемат общо шест различни стойности: λ, $\dfrac{1}{\lambda}$, $1-\lambda$, $\dfrac{1}{1-\lambda}$, $\dfrac{\lambda-1}{\lambda}$, $\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.

Дефиниция 4.4. Точката $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ се нарича двойна (неподвижна) точка на дробно-линейната трансформация $T(z)$, ако $T(z_0) = z_0$.

Твърдение 4.4. Една дробно-линейна трансформация, различна от идентитета има най-много две двойни точки.

Доказателство. Нека трансформацията е $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Ясно е, че ∞ е двойна точка, само ако $c = 0$. Крайните двойни точки са решенията на уравнението $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Ако $c \neq 0$ това е квадратно уравнение и то има най-много два корена. Ако $c = 0$ уравнението има единствен корен при $d \neq a$ и няма корени при $d = a$. Така във всички случаи неподвижните точки са най-много две.■

Твърдение 4.5. Ако z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 са две тройки от различни точки на $\overline{\mathbb{C}}$, то съществува единствена дробно-линейна трансформация T, такава че $T(z_k) = w_k$, $k = 1,2,3$ и тя се задава с равенството:

(4.3) $$(w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3).$$

Доказателство. Ако T_1 и T_2 са дробно-линейни трансформации, за които $T_1(z_k) = T_2(z_k) = w_k$, $k = 1,2,3$, то $T_1 \circ T_2^{-1}$ е дробно-линейна трансформация, с поне три двойни точки w_1, w_2, w_3. Следователно (Твърдение 4.4) тя е идентитетът, т.е. $T_1 = T_2$. От друга страна, ако решим (4.3) относно w ще получим една дробно-линейна трансформация, която изобразява точките z_k в w_k, $k = 1,2,3$. С това твърдението е доказано.■

Твърдение 4.6. Дробно-линейната трансформация е единствената трансформация, която запазва двойното отношение на всеки четири точки.

Доказателство. Нека $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ са четири различни точки, $w = T(z)$ е дробно-линейна трансформация и $T(z_k) = w_k$, $k = 1,2,3,4$. Тогава (Твърдение 4.5) $w = T(z)$ се задава с равенството $(w_1, w_2, w, w_4) = (z_1, z_2, z, z_4)$. От тук при $z = z_3$ следва $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, т.е. $\left(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\right) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Обратно, ако $w = T(z)$ е функция, която запазва двойното отношение на всеки четири точки и $T(z_k) = w_k$, $k = 1,2,3$, то за всяко $z \in \overline{\mathbb{C}}$ имаме

$$(w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3),$$

което е една дробно-линейна трансформация.■

Твърдение 4.7. Четири точки $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ лежат на една окръжност, тогава и само тогава когато $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

Доказателство. Ако една от точките, например z_4, е ∞, твърдението следва от това, че $(z_1, z_2, z_3, \infty) = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = 0$ или π $\Leftrightarrow z_3$ лежи на правата през z_1 и z_2.

Нека сега $C = C(a, R)$ е окръжност с център a, радиус R и $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C$. Имаме $z_k = \dfrac{R^2}{\overline{z_k - a}} + a$, $k = 1,2,3,4$. Прилагаме последователно при първото, третото и четвъртото равенство по-долу, трансформациите $z \to z - a$, $z \to R^2 / z$ и $z \to z + a$, които запазват двойното отношение и получаваме

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a) = \left(\frac{R^2}{\overline{z_1 - a}}, \frac{R^2}{\overline{z_2 - a}}, \frac{R^2}{\overline{z_3 - a}}, \frac{R^2}{\overline{z_4 - a}} \right)$$

$$= \overline{(z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a)} = \overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}$$

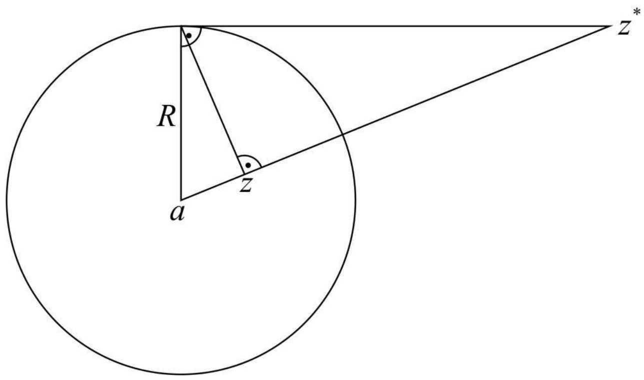
т.е. $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

Обратно, ако $C = C(a, R)$ е окръжността определена от точките z_2, z_3, z_4, то от равенствата $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}$ и $z_k = \dfrac{R^2}{\overline{z_k - a}} + a$, $k = 2,3,4$, процедирайки както по-горе, получаваме $z_1 = \dfrac{R^2}{\overline{z_1 - a}} + a$, т.е. $z_1 \in C$.■

Забележка 4.2. От Твърдение 4.6 и Твърдение 4.7 получаваме още едно доказателство на кръговото свойство на дробно-линейната трансформация.

От училищният курс по Евклидова геометрия е добре познато понятието симетрия относно права и е известно, че то е инвариантно относно движенията в Евклидовата равнина (т.е. относно цялата линейна трансформация). Сега ще обобщим това понятие, ще го наречем инверсия, за окръжности в разширената комплексна равнина и ще покажем, че то е инвариантно относно дробно-линейните трансформации.

Дефиниция 4.5. Нека C е окръжност в $\overline{\mathbb{C}}$. Ако C е права, то инверсна на точката $z\in\mathbb{C}$ се нарича точката z^*, симетрична на z относно C. Ако $C=C(a,R)$ е окръжност, то инверсна на $z\in\mathbb{C}, z\neq a$ се нарича точката z^*, която лежи на лъча през z с начало a, т.е. $\arg(z^*-a)=\arg(z-a)$ и $|z^*-a||z-a|=R^2$ (фиг.4.1).



фиг.4.1

Ще считаме, че инверсната на центъра a на окръжността е ∞ и обратно – инверсната на ∞ е a. Ясно е, че ако $z\in C$, то $z^*=z$.

Ако z и z^* са инверсни относно окръжността $C(a,R)$, от дефиницията непосредствено следва $(z^*-a)\overline{(z-a)}=R^2$, откъдето получаваме формулата

$$z^*=\frac{R^2}{\overline{z-a}}+a\,.$$

От тук при $a=0$ и $R=1$ следва, че инверсията относно единичната окръжност е $z^*=\dfrac{1}{\bar z}$. Така трансформацията $w=\dfrac{1}{z}=\overline{\left(\dfrac{1}{\bar z}\right)}$ е суперпозиция на две инверсии – относно единичната окръжност и относно реалната права.

Твърдение 4.8. Точките z и z^* са инверсни относно окръжността C (в $\overline{\mathbb{C}}$) през точките z_1,z_2,z_3 , тогава и само тогава, когато

(4.4) $$(z^*,z_1,z_2,z_3)=\overline{(z,z_1,z_2,z_3)}\,.$$

Доказателство. Ако $z \in C$, то $z^* = z$ и твърдението следва от Твърдение 4.7. Нека $z \notin C$. Най-напред ще докажем, че равенството (4.4) не зависи от точките определящи окръжността C, т.е. ако (4.4) е в сила и $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ са произволни точки от C, то

$$(z^*, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \overline{(z, \omega_1, \omega_2, \omega_3)}.$$

Действително, нека $w = T(z)$ е дробно-линейна трансформация, която изобразява C в реалната права. Една такава трансформация е например

$$(w, 1, 0, \infty) = (z, z_1, z_2, z_3) \Leftrightarrow w = \frac{(z_1 - z_3)(z - z_2)}{(z_1 - z_2)(z - z_3)},$$

при която $T(z_1) = 1, T(z_2) = 0, T(z_3) = \infty$. Нека $w^* = T(z^*)$ и $w_k = T(\omega_k), k = 1,2,3$. Тъй като $w = T(z)$ запазва двойното отношение, то $(z^*, z_1, z_2, z_3) = (w^*, 1, 0, \infty) = w^*$ и $(z, z_1, z_2, z_3) = (w, 1, 0, \infty) = w$. Оттук и от (4.4) следва $w^* = \overline{w}$. Тогава $(w^*, w_1, w_2, w_3) = (\overline{w}, \overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3)$, защото $w_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,3$. Сега, като вземем предвид, че обратната трансформация $z = T^{-1}(w)$ е също дробно-линейна, получаваме

$$\begin{aligned}(z^*, \omega_1, \omega_2, \omega_3) &= (T(z^*), T(\omega_1), T(\omega_2), T(\omega_3)) = (w^*, w_1, w_2, w_3) = (\overline{w}, \overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3) = \overline{(w, w_1, w_2, w_3)} \\ &= \overline{(T^{-1}(w), T^{-1}(w_1), T^{-1}(w_2), T^{-1}(w_3))} = \overline{(z, \omega_1, \omega_2, \omega_3)}\end{aligned}$$

Нека е в сила равенството (4.4). Ще разгледаме два случая:

1. Нека C е права и $z_3 = \infty$. Тогава

$$(4.4) \Leftrightarrow \frac{z^* - z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z} - \overline{z}_2}{\overline{z}_1 - \overline{z}_2},$$

за произволни точки z_1 и z_2 от C (тук използваме независимостта на равенството (4.4) от избора на точките, определящи C). Това ни дава $|z^* - z_2| = |z - z_2|$, което означава (понеже $z_2 \in C$ е произволна), че z и z^* са на равни разстояния от всяка точка на правата, в частност и от самата права. Тогава или $z^* = z$, или z и z^* са симетрични относно C. Ако $z^* = z$, от (4.4) и Твърдение 4.7 следва $z \in C$, което не е вярно. Следователно z и z^* са симетрични относно правата C.

2. Нека $C = C(a, R)$. Преобразувайки равенството (4.4) и буквално следвайки доказателството на Твърдение 4.7, получаваме $z^* = \dfrac{R^2}{\overline{(z - a)}} + a$, т.е. z^* е инверсна на z относно $C(a, R)$.

Останалата част от твърдението се доказва по обратния път.■

Твърдение 4.9. Дробно-линейната трансформация запазва инверсните точки, т.е. ако z и z^* са инверсни относно окръжност C (в $\overline{\mathbb{C}}$) и T е дробно-линейна трансформация, то $T(z)$ и $T(z^*)$ са инверсни относно окръжността $T(C)$.

Доказателство. Нека $z_1, z_2, z_3 \in C$ и z и z^* са инверсни относно C. Тогава

$$\begin{aligned}\big(T(z^*), T(z_1), T(z_2), T(z_3)\big) &= (z^*, z_1, z_2, z_3) \\ &= \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} \\ &= \overline{\big(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)\big)}\end{aligned},$$

понеже T запазва двойното отношение. Следователно $T(z)$ и $T(z^*)$ са инверсни относно $T(C)$.■

Дробно-линейните автоморфизми на основни области

Дефиниция 4.6. Дробно-линеен автоморфизъм на областта $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ се нарича всяка дробно-линейна трансформация на D в себе си.

Ясно е, че дробно-линейните автоморфизми на произволна област $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ образуват група и тя е подгрупа на групата от всички дробно-линейни трансформации.

Ще опишем дробно-линейните автоморфизми на основните области: комплексната равнина $\mathbb{C}$, разширената комплексна равнина $\overline{\mathbb{C}}$, единичният кръг $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и горната полуравнина $H^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Следните две твърдения са очевидни и не се нуждаят от доказателство.

Твърдение 4.10. Групата на дробно-линейните автоморфизми на $\mathbb{C}$ съвпада с групата на всички цели линейни трансформации $w = T(z) = az + b, a \neq 0, b \in \mathbb{C}$.

Твърдение 4.11. Групата на дробно-линейните автоморфизми на $\overline{\mathbb{C}}$ съвпада с групата на всички дробно-линейни трансформации.

При доказателството на следващите твърдения ще използваме наготово още едно свойство на дробно-линейните трансформации:

Принцип за съответствие на границите: Ако трансформацията (4.1) изобразява област $D \subset \mathbb{C}$ в област $D_1 \subset \mathbb{C}$, то тя изобразява ориентираната граница ∂D на D (това е границата на D при движение, върху която областта D остава отляво) в ориентираната граница ∂D_1 на D_1 и обратно, ако изобразява ∂D в ∂D_1, то тя изобразява D в D_1.

Твърдение 4.12. Групата на дробно-линейните автоморфизми на единичният кръг $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ е съставена от всички трансформации от вида

(4.5) $$w=T(z)=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z},\ \theta\in\mathbb{R},\ z_0\in U.$$

Доказателство. Нека $w=T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ е един дробно-линеен автоморфизъм на U и $z_0=T^{-1}(0)$. Тъй като, съгласно принципа за съответствие на границите, T изобразява единичната окръжност в себе си, то T ще изобрази точката $z_0^*=\dfrac{1}{\bar{z}_0}$ инверсна на z_0 относно единичната окръжност, в точката инверсна на $T(z_0)=0$, т.е. в ∞. Тогава $az_0+b=0, cz_0^*+d=0$, откъдето $b=-az_0$, $d=-cz_0^*$ и T има вида

$$w=T(z)=\frac{a(z-z_0)}{c(z-z_0^*)}=\frac{-a\bar{z}_0}{c}\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}=K\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}.$$

Освен това, тъй като $1=|T(1)|=|K|\dfrac{|1-z_0|}{|1-\bar{z}_0|}=|K|$, то $K=e^{i\theta},\theta\in\mathbb{R}$. Следователно всеки дробно-линеен автоморфизъм на единичният кръг има вида (4.5).

Обратно, нека T е дробно-линейна трансформация от вида (4.5). Ще покажем, че тя е автоморфизъм на U. Действително, ако $|z|=1$, то

$$|T(z)|=|e^{i\theta}|\frac{|z-z_0|}{|z\bar{z}-z\bar{z}_0|}=\frac{|z-z_0|}{|z||\bar{z}-\bar{z}_0|}=\frac{|z-z_0|}{|\overline{z-z_0}|}=1,$$

т.е. $T(\partial U)\subset\partial U$ и понеже $T(\partial U)$ е окръжност, то $T(\partial U)=\partial U$. Сега от принципа за съответствие на границите следва, че или $T(U)=U$, или $T(U)=\overline{\mathbb{C}}\setminus U$. Тъй като $T(z_0)=0$ ($z_0\in U$), то $T(U)=U$ и T е автоморфизъм на единичният кръг.■

Твърдение 4.13. Групата на дробно-линейните автоморфизми на горната полуравнина $H^+=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ е съставена от всички трансформации от вида

(4.6) $$w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ \text{където } a,b,c,d\in\mathbb{R} \text{ и } ad-bc>0.$$

Доказателство. Нека $w=T(z)$ е дробно-линеен автоморфизъм на H^+. Съгласно принципа за съответствие на границите той изобразява реалната права $\operatorname{Im}z=0$ в реалната права $\operatorname{Im}w=0$. Тогава, ако $z_k\in\mathbb{R}$, то и $w_k=T(z_k)\in\mathbb{R}$, $k=1,2,3$. Трансформацията $w=T(z)$ се определя от равенството

$(w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3)$, откъдето следва $w = T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Освен това, ако $\operatorname{Im} z > 0$, то трябва и $\operatorname{Im} w > 0$. Пресмятаме

$$\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \operatorname{Im} z$$

и получаваме $ad - bc > 0$, т.е. T има вида (4.6). Непосредствено се проверява, че е вярно и обратното.■

Задачи

4.1. Да се докаже, че точките z_1 и z_2 са инверсни относно окръжността зададена с уравнението $Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0$, където $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ и $|B|^2 > AC$ тогава и само тогава, когато $Az_1\bar{z}_2 + \bar{B}z_1 + B\bar{z}_2 + C = 0$.

4.2. Нека C е окръжност в разширената комплексна равнина. Да се докаже, че точките $z_1, z_2 \notin C$ са инверсни относно C тогава и само тогава, когато всяка окръжност (в $\overline{\mathbb{C}}$) през z_1 и z_2 е ортогонална на C.

4.3. Да се докаже, че точките $z_1 \neq z_2$ са инверсни относно окръжност C тогава и само тогава, когато $\dfrac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = const$ за всяко $z \in C$.

4.4. Нека дробно-линейната трансформация $T(z) = (az+b)/(cz+d)$ има две различни двойни точки $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Да се докаже, че:

а) тя се представя във вида

$$\frac{T(z)-\alpha}{T(z)-\beta} = A\frac{z-\alpha}{z-\beta},\ A = \frac{a-c\alpha}{a-c\beta};$$

б) за всяко $z_0 \in \mathbb{C}$ редицата $\{z_n = T(z_{n-1})\}_{n=1}^{\infty}$ е или разходяща, или клони към двойна точка на трансформацията.

Лекция 5
Степенни редове

В тази лекция ще разгледаме един широк клас от холоморфни функции – степенните редове. Те ще са нашият основен инструмент при въвеждането на елементарните трансцендентни функции на комплексна променлива.

Област на сходимост. Формула на Коши-Адамар

Дефиниция 5.1. Степенен ред около точката $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича формален ред от вида

(5.1) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_n(z-z_0)^n + \ldots,$$

където коефициентите $a_n \in \mathbb{C}$ са фиксирани, а z е комплексна променлива.

Очевидно редът (5.1) е сходящ в точката $z = z_0$. Той може да е сходящ за всяко $z \in \mathbb{C}$, или може да е сходящ за някои стойности на z, а за други да е разходящ.

Вътрешността на множеството от точките на сходимост на (5.1) наричаме област на сходимост. Първата задача, която възниква е да се определи областта на сходимост на степенният ред. От тук нататък, за удобство ще считаме $z_0 = 0$. и ще разглеждаме степенни редове от вида

(5.2) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

Общият случай се свежда до този чрез смяна на променливата $w = z - z_0$.

Примери 5.1.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$. От $|n^n z^n| = |nz|^n > 2^n$ за $n > 2/|z|$ следва, че този ред е разходящ за всяко $z \neq 0$, т.е. областта му на сходимост е празното множество.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$. От $\left|\frac{z^n}{n^n}\right| = \left|\frac{z}{n}\right|^n < \frac{1}{2^n}$ за $n > 2|z|$, следва, че редът е сходящ за всяко $z \in \mathbb{C}$, т.е. областта му на сходимост е цялата комплексна равнина.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Парциалните суми на геометричната прогресия са $S_n = \frac{1-z^n}{1-z}$. Тъй като $z^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при $|z|<1$ и $|z^n| \geq 1$ при $|z| \geq 1$, редът е сходящ за $|z|<1$ и сумата му е $1/(1-z)$,и е разходящ за $|z| \geq 1$, т.е. областта на сходимост на геометричният ред е единичният кръг $|z|<1$.

Ако приемем, че празното множество е кръг с нулев радиус, а комплексната равнина – кръг с безкраен радиус, то общото в тези редове е, че областта им на сходимост е кръг. Сега ще се убедим, че това е вярно за всеки степенен ред.

Терема 5.1. (Формула на Коши-Адамар) Нека е даден степенният ред (5.2) и $R=\dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, $0\le R\le\infty$. Тогава редът (5.2) е абсолютно сходящ в кръга $K(0,R)=\{z:|z|<R\}$ и е разходящ за $|z|>R$.

Доказателство. Имаме $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|}=|z|\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{|z|}{R}$ и от критерият на Коши следва, че редът (5.2) е абсолютно сходящ за $\left|\dfrac{z}{R}\right|<1$, т.е. за $|z|<R$ и е разходящ за $\left|\dfrac{z}{R}\right|>1$, т.е. за $|z|>R$.■

Теорема 5.2. Областта на сходимост на степенния ред (5.2) е кръгът $K(0,R)$, където R е числото определено във формулата на Коши-Адамар.

Доказателство. От формулата на Коши-Адамар следва, че множеството от точките, в които е сходящ редът (5.2) е обединение на кръга $K(0,R)$ и на някакво множество от точки от окръжността $\{z:|z|=R\}$. Вътрешността на това множество е точно $K(0,R)$.■

Кръгът $K(0,R)$ ще наричаме *кръг на сходимост*, а R - *радиус на сходимост* на степенния ред (5.2). Предвид абсолютната сходимост на реда в $K(0,R)$, за определяне на радиуса на сходимост можем да прилагаме всички известни критерии за редове с положителни членове. Така например от критерият на Даламбер следва $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (ако границата съществува).

Теорема 5.3. (Абел) Ако степенният ред (5.2) е сходящ в точката $z_0\ne 0$, то той е абсолютно сходящ в кръга $|z|<|z_0|$.

Доказателство. От това, че редът е сходящ в $z_0\ne 0$, следва че той има положителен радиус на сходимост R и $|z_0|\le R$. Поради това кръгът $|z|<|z_0|$ се съдържа (може да съвпада) в кръга на сходимост на реда, откъдето и следва абсолютната сходимост на реда в този кръг.■

Формулата на Коши-Адамар определя областта на сходимост на един степенен ред , но не и множеството от точки , в които е сходящ. Тя не дава информация за поведението на степенния ред върху границата на кръга на сходимост. Там той може да е разходящ, сходящ в някои точки и разходящ в други.

Пример 5.2. Редовете

$$\text{(а) } \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ ; (б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{ ; (в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

имат една и съща област на сходимост-единичният кръг. Но върху единичната окръжност редът (а) е разходящ; редът (в) е абсолютно сходящ, а редът (б) е сходящ за $z=-1$ и разходящ за $z=1$.

Теорема за диференциране на степенните редове. Теорема за единственост

Лема 5.1. Редовете $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $f_k(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)a_n z^{n-k}$, $k=1,2...$ имат един и същи радиус на сходимост.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че редовете f и f_1 имат един и същи радиус на сходимост, защото f_{k+1} се получава от f_k , $k=1,2...$ по същият начин, по който f_1 се получава от f - чрез почленно диференциране, и общото твърдение се получава по индукция. Нека радиусът на сходимост на f е R, а на f_1 е R_1. Ясно е, че умножението със $z \neq 0$ не променя радиуса на сходимост и редът zf_1 има радиус на сходимост R_1. Сега, тъй като $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$, от задача 1.5 (вж. Лекция 1) имаме

$$\frac{1}{R_1}=\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|}=\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}.$$

Така от формулата на Коши-Адамар получаваме, че $R_1=R$.■

Забележка 5.1. Редовете f и f_1 може да нямат едно и също множество на сходимост. Така например $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ е сходящ за всяко $z \neq 1, |z| \leq 1$ (вж. задача 5.2), докато $f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ е сходящ само за $|z|<1$.

Теорема 5.4. (Теорема за диференциране на степенните редове) Нека редът $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ има положителен радиус на сходимост R. Тогава функцията $f(z)$ е холоморфна в кръга $|z|<R$ и производната ѝ е

$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ (получена чрез почленно диференциране на първоначалния ред).

Доказателство. Нека $\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$. От Лема 5.1 знаем, че този ред има радиус на сходимост R. Да фиксираме $z_0, |z_0|<R$. Ще докажем, че $f'(z_0)=\varphi(z_0)$ като оценим разликата между диференчното частно $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ и $\varphi(z_0)$, когато $z\to z_0$. Ще използваме следното стандартно алгебрично тъждество, изпълнено за всеки две комплексни числа a и b, $a\neq b$ и всяко естествено число n:

(5.3) $$\frac{a^n-b^n}{a-b}-nb^{n-1}=(a-b)\sum_{k=1}^{n-1} kb^{k-1}a^{n-k-1}.$$

Докажете го (например по индукция).

Да фиксираме положително число r, такова че $|z_0|<r<R$. Тъй като $z\to z_0$ може да считаме, че $|z|<r$. Имаме, предвид (5.3),

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\varphi(z_0)\right|=\left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n\left[\frac{z^n-z_0{}^n}{z-z_0}-nz_0{}^{n-1}\right]\right|=|z-z_0|\left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n\sum_{k=1}^{n-1} kz_0{}^{k-1}z^{n-k-1}\right|$$
$$\leq |z-z_0|\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\sum_{k=1}^{n-1} k|z_0|^{k-1}|z|^{n-k-1}$$
$$\leq |z-z_0|\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\sum_{k=1}^{n-1} kr^{n-2}=\frac{|z-z_0|}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|r^{n-2}.$$

От Лема 5.1 и Теорема 5.1 следва, че редът $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|r^{n-2}$ е сходящ и ако означим сумата му с M, то получаваме следната оценка

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\varphi(z_0)\right|\leq\frac{M}{2}|z-z_0|,$$

откъдето следва

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\varphi(z_0),$$

т.е. $f(z)$ е $\mathbb{C}$-диференцируема в z_0 и $f'(z_0)=\varphi(z_0)$. С това теоремата е доказана.■

Прилагайки тази теорема многократно (имайки предвид и Лема 5.1) непосредствено получаваме:

Следствие 5.1. Ако степенният ред $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ има положителен радиус на сходимост R, то функцията $f(z)$ е безкрайно диференцируема и за всяко $z\in K(0,R)$ имаме

$$f^{(\kappa)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)...(n-k+1)a_n z^{n-k}, \kappa=1,2,...$$

В частност $f^{(\kappa)}(0)=k!a_k$ и следователно $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$.

Теорема 5.5. (Теорема за единственост) Ако степенният ред $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ има положителен радиус на сходимост R и точката $z=0$ е точка на сгъстяване на множеството $\{z\in K(0,R): f(z)=0\}$ от нулите на функцията $f(z)$, то $f(z)\equiv 0, z\in K(0,R)$, т.е. $a_n=0,\ n=0,1,2,...$

Доказателство. Да допуснем, че $f(z)$ не е тъждествено нула и нека $a_0=a_1=...=a_{s-1}=0,\ a_s\neq 0$, т.е. $f(z)=a_s z^s+a_{s+1}z^{s+1}+...$ Тогава $f(z)=z^s\varphi(z)$, където $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+s}z^n$. Този ред има същият радиус на сходимост R и значи (Теорема 5.4) функцията $\varphi(z)$ е холоморфна, в частност непрекъсната в кръга $K(0,R)$. Тъй като $\varphi(0)=a_s\neq 0$, от непрекъснатостта следва, че съществува $\delta>0, \delta\le R$, така че $\varphi(z)\neq 0$ за $|z|<\delta$. От тук и от $f(z)=z^s\varphi(z)$ следва $f(z)\neq 0$ за $0<|z|<\delta$. Това означава, че точката $z=0$ не е точка на сгъстяване на нулите на $f(z)$ - противоречие.■

Следствие 5.2. (Теорема за идентичност) Ако степенните редове $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ и $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ имат един и същи радиус на сходимост $R>0$ и точката $z=0$ е точка на сгъстяване на множеството $\{z\in K(0,R): f(z)=g(z)\}$, то $f(z)\equiv g(z), z\in K(0,R)$, т.е. $a_n=b_n,\ n=0,1,2,...$

Доказателство. Прилагаме теоремата за единственост към реда $f(z)-g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)z^n$.■

Гранична теорема на Абел

До тук се занимавахме с поведението на един степенен ред в кръга му на сходимост. Сега ще изложим един резултат на Абел, който касае поведението на сумата на степенен ред, когато се приближаваме към границата на кръга му на сходимост.

За удобство ще възприемем следната терминология: Нека z_0 е точка от границата на кръга $K(0,R)$. *Област на Щолц* на z_0 ще наречем сечението на кръга $K(0,R)$ и ъгъла с връх в z_0, с разтвор $2\theta<\pi$, симетричен относно радиуса $[0,z_0]$, т.е. това е областта зададена с неравенствата:

$$|z|<R, |\arg_0(z_0-z)-\arg_0 z_0|\le\theta<\frac{\pi}{2}.$$

Ако z клони към z_0 оставяйки вътре в негова област на Щолц, ще казваме, че z клони към z_0 *по недопирателни пътища*.

Теорема 5.6. (Гранична теорема на Абел–Щолц) Нека степенният ред $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ има положителен радиус на сходимост R и е сходящ в точката $z_0, |z_0|=R$, така че $f(z_0)=a$. Тогава $\lim_{z\to z_0} f(z)=a$, когато z клони към z_0 по недопирателни пътища.

Доказателство. Преди всичко ще отбележим, използвайки субституцията $z=wz_0$, че без ограничение можем да считаме, че $R=1=z_0$. Освен това заменяйки, ако е необходимо, a_0 с $a_0-f(1)$ можем да предполагаме, че $a=\sum_{n=0}^{\infty}a_n=0$. Нека $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$ и $\sigma_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$. Ключов момент в доказателството е следното преобразование на Абел:

$$\begin{aligned}\sigma_n(z)&=S_0+(S_1-S_0)z+\dots+(S_n-S_{n-1})z^n=S_0(1-z)+S_1(z-z^2)+\dots+S_{n-1}(z^{n-1}-z^n)+S_nz^n\\&=(1-z)(S_0+S_1z+\dots+S_{n-1}z^{n-1})+S_nz^n.\end{aligned}$$

По предположение имаме $\lim_{n\to\infty}S_n=0$, което означава, че ако $\varepsilon>0$ е произволно, то съществува естествено число ν, така че $|S_n|<\varepsilon$ за всяко $n\ge\nu$. Тогава

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(z)=(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}S_nz^n=(1-z)\sum_{n=0}^{\nu-1}S_nz^n+(1-z)\sum_{n=\nu}^{\infty}S_nz^n,\quad |z|<1$$

и

$$|f(z)| \le \left|(1-z)\sum_{n=0}^{\nu-1} S_n z^n\right| + \left|(1-z)\sum_{n=\nu}^{\infty} S_n z^n\right| \le |1-z|\sum_{n=0}^{\nu-1}|S_n||z|^n + |1-z|\sum_{n=\nu}^{\infty}|S_n||z|^n$$
$$< |1-z|m\nu + |1-z|\frac{|z|^\nu}{1-|z|}\varepsilon < |1-z|m\nu + \frac{|1-z|}{1-|z|}\varepsilon < \left(1+\frac{|1-z|}{1-|z|}\right)\varepsilon$$

за всяко z, за което $|1-z| < \dfrac{\varepsilon}{m\nu}$, където $m = max\{|S_n|, n = 0,1,...\nu-1\}$. Така, ако докажем, че $\dfrac{|1-z|}{1-|z|} \le M < +\infty$, когато $z \to 1$ по недопирателни пътища, ще имаме

$$|f(z)| < (M+1)\varepsilon,$$

което означава, че

$$\lim_{z\to 1} f(z) = 0 = f(1),$$

т.е. твърдението ще е доказано.

Остава да покажем, че $\dfrac{|1-z|}{1-|z|} \le M < +\infty$, когато z се изменя в множеството $\Delta(\theta) = \left\{ z : |z| < 1, |1-z| \le \cos\theta, |\arg_0(1-z)| \le \theta < \dfrac{\pi}{2} \right\}$. Нека $1-z = re^{i\varphi}$. От косинусовата теорема за триъгълника с върхове в точките $0,1,z$ имаме:

$$|z|^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\varphi \Leftrightarrow 1-|z|^2 = 2r\cos\varphi - r^2,$$

откъдето

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} = \frac{r(1+|z|)}{1-|z|^2} < \frac{2r}{2r\cos\varphi - r^2} = \frac{2}{2\cos\varphi - r} \le \frac{2}{2\cos\theta - \cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}, z \in \Delta(\theta).$$

С това теоремата е доказана.■

Забележки 5.2.

(1). В оригиналната теорема на Абел се твърди, че $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ когато z клони към z_0 по радиуса $[0.z_0]$. Приложенията на този резултат в анализа са добре известни. Така например редовете $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{z^{2n-1}}{2n-1}$ имат радиус на сходимост $R=1$, като и двата са сходящи за $z=1$. Освен това за реални $x \in (-1,1)$ имаме

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \text{ и } arctgx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Тогава от сходимостта на тези редове при $z=1$ и граничната теорема на Абел, (както и от непрекъснатостта на функциите $\ln(1+x)$ и $arctgx$ в $x=1$) следват равенствата:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

и

$$\frac{\pi}{4} = arctg 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

(За обобщение на тези равенства вж. зад.6.3 от Лекция 6)
(2) Изложеното обобщение на теоремата на Абел е на Щолц. Известно е, че ако z клони към z_0 по допирателни пътища, т.е. z клони към z_0 по някакъв път, който не се съдържа в никоя област на Щолц на z_0, то сумата на степенният ред може изобщо да няма граница. (Харди, Литълуд,1912г.).
(3) Обратната на теоремата на Абел, не е вярна без допълнителни предположения за коефициентите. Така например редът $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n$ има радиус на сходимост $R = 1$, сумата му е $f(z) = 1/(1+z)$ и $\lim_{z\to 1} f(z) = 1/2$, но редът $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ е разходящ.

Задачи

5.1. Нека редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ има радиус на сходимост $R > 0$. Да се докаже, че функцията

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$$

е холоморфна в $\mathbb{C}$ и за всяко $0 < r < R$ съществува константа $M > 0$, така че $|f(z)| \le M e^{|z|/r}$, $z \in \mathbb{C}$.
5.2. (Критерий на Лайбниц) Да се докаже, че ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща и клони към нула, то редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ е сходящ за всяко $z, |z| \le 1$, с евентуално изключение на $z = 1$.
Упътване. Изследвайте $(1-z)(S_{n+p} - S_n)$, където $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.)
5.3. Да се докаже, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\ln n}}$ и всички редове получени от него чрез почленно диференциране са абсолютно сходящи в затворения единичен кръг.

5.4. (Теорема на Таубер) Да се докаже, че ако степенният ред $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ има радиус на сходимост 1, $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ и $\lim_{x\to 1} f(x)=0$, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$.

Упътване. Покажете, че за всяко $x\in[0,1)$ и всяко естествено число m

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n - f(x)\right| \le (1-x)\sum_{n=1}^{m} n\,|a_n| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|\,x^n$$

и

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n|\,x^n \le \frac{1}{m(1-x)}\max\{n\,|a_n| : n>m\}.$$

След това разгледайте редицата $x_m = 1-\dfrac{1}{m}$ и използвайте зад.1.4 от Лекция 1.

Лекция 6
Елементарни функции на комплексна променлива

В тази лекция ще дефинираме и изложим основните свойства на елементарните трансцендентни функции на комплексна променлива- $e^z, \sin z, \cos z, \log z, z^\alpha, (\alpha \in \mathbb{C})$ и $arctgz$. Те ще бъдат дефинирани така, че върху реалната ос да съвпадат със съответните елементарни функции на реална променлива. Поради това те запазват много от техните свойства. Но има и изненади: така e^z е периодична, $\sin z$ не е ограничена и може да приема всяка комплексна стойност. Освен това, докато в реалния анализ тези функции не са свързани помежду си, в комплексната равнина те се превръщат във функции от един и същи тип – всички те се изразяват чрез експоненциалната и логаритмичната функции.

Функциите $e^z, \sin z, \cos z$

Дефиниция 6.1.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

От формулата на Коши-Адамар непосредствено следва, че и трите реда имат безкраен радиус на сходимост и са абсолютно сходящи в цялата равнина. Така функциите $e^z, \sin z, \cos z$ са цели функции. За z реално те съвпадат със съответните функции на реална променлива. Диференцирайки почленно получаваме:

$$(e^z)' = e^z, (\sin z)' = \cos z, (\cos z)' = -\sin z, \ z \in \mathbb{C}.$$

Освен това $\sin z$ е нечетна функция, а $\cos z$ е четна функция, т.е. $\sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z$. Разглеждани като функции на реална променлива, тези три функции не са свързани, но ако заместим z с iz (и вземем предвид, че в един абсолютно сходящ ред можем да разместваме членовете без да променяме сумата му) получаваме:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

От тук следва

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ и } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

В частност, ако $z = x \in \mathbb{R}$, то

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x\,,\ \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\ ,\ \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Всички тези формули се наричат *формули на Ойлер*.

Твърдение 6.1. Функцията e^z има следните свойства:

1) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2},\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

2) $e^z \neq 0,\ z \in \mathbb{C}$;

3) $e^z = e^x(\cos y + i\sin y), |e^z| = e^x, \arg e^z = y + 2k\pi,\ z = x+iy \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$;

4) e^z е периодична с основен период $2\pi i$;

5) Уравнението $e^z = c,\ c \neq 0,\ c \in \mathbb{C}$ има изброимо много решения.

Доказателство. 1) Да фиксираме $a \in \mathbb{C}$ и нека $f(z) = e^z e^{a-z}$. Това е цяла функция и за всяко $a \in \mathbb{C}$ имаме:

$$f'(z) = (e^z)'e^{a-z} + e^z(e^{a-z})' = e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} = 0\,.$$

От тук следва, че f е константа (вж.Т.3.4 от Лекция 3) и значи $f(z) = f(0) = e^a$, т.е. $e^z e^{a-z} = e^a$ за всеки $a, z \in \mathbb{C}$. Сега полагаме $z = z_1,\ a = z_1 + z_2$ и получаваме 1).

2) Следва от $e^z e^{-z} = e^0 = 1$.

3) Имаме $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ и това е тригонометричният запис на числото e^z. В частност при $z = i\pi$ получаваме забележителното равенство $e^{i\pi} = -1$, свързващо четири от най-известните константи в математиката: e, π, i и -1;

4) От 1) и 3) следва $e^{z+2\pi i} = e^z e^{i2\pi} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z$. Обратно, ако $\omega = u + iv$ е един период на e^z, т.е. $e^{z+\omega} = e^z \Leftrightarrow e^\omega = 1$, то

$$e^\omega = 1 \Leftrightarrow e^u(\cos v + i\sin v) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} e^u\cos v = 1 \\ e^u \sin v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u\cos v = 1 \\ \sin v = 0 \end{cases},$$

откъдето $u = 0, v = 2k\pi$, т.е. $\omega = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

5) Нека $z = x + iy$ и $c = re^{i\varphi}$. Тогава

$$e^z = c \Leftrightarrow e^x e^{iy} = re^{i\varphi} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = r \\ y = \varphi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln r \\ y = \varphi + 2k\pi \end{cases}\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

и решенията на уравнението са $z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln|c| + i(\arg c + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.■

За да добием и нагледна представа за свойствата на експоненциалната функция, ще разгледаме накратко и изображението $w = e^z$. Преди всичко да отбележим, че то е конформно в цялата равнина, тъй като $(e^z)' = e^z \neq 0$, но не е еднолистно, защото $e^{z_1}=e^{z_2}\Leftrightarrow z_1-z_2=2k\pi i,\, k\in\mathbb{Z}$. Оттук следва, че изображението $w=e^z$ е еднолистно в една област, само ако тя не съдържа нито една двойка точки $z_1\neq z_2$, за които $z_1-z_2=2k\pi i,\, k\in\mathbb{Z}$. Такава област е например всяка хоризонтална ивица $H(a,b)=\{z\in\mathbb{C}: a<\operatorname{Im} z<b,\, b-a\leq 2\pi\}$ с ширина най-много 2π. Нека $z=x+iy$. Тъй като $|e^z|=e^x$ и $\arg e^z=y$, то функцията $w=e^z$ изобразява вертикалната отсечка $\{z=x_0+iy,\, a<y<b\}$ в дъгата $\{|w|=e^{x_0},\, a<\arg w<b\}$ от окръжността с център 0 и радиус e^{x_0}, а хоризонталната права $y=y_0$ - в лъча $\arg w=y_0$ с начало 0 и сключващ ъгъл y_0 с положителната част на реалната ос. (При това, когато z описва отсечката отдолу на горе w описва дъгата в посока обратна на движението на часовниковата стрелка, а когато z описва правата отляво на дясно, то w описва лъча отдалечавайки се от координатното начало.) Така изображението $w=e^z$ преобразува декартовата координатна мрежа на равнината (z) в полярната координатна мрежа на равнината (w). Следователно образът на ивицата $H(a,b)$ при $w=e^z$ е ъгълът $\{w\in\mathbb{C}: a<\arg w<b\}$ и изображението е еднолистно и конформно. В частност образът на ивицата $H(0,2\pi)$ е цялата комплексна равнина без положителната част на реалната ос. За удобство, а и за да е валиден принципът за съответствие на границите, ще си мислим че сме разрязали равнината по положителната част на реалната ос, като горният бряг на разреза е образ на правата $y=0$, а долният бряг – на правата $y=2\pi$. Накратко ще казваме, че образът на ивицата $H(0,2\pi)$ е цялата равнина разрязана по положителната част на реалната ос. Два пъти по тясната ивица $H(0,\pi)$ се изобразява в горната полуравнина $\operatorname{Im} w>0$.

Твърдение 6.2. Функциите $\sin z, \cos z$ имат следните свойства:

1) Функциите $\sin z, \cos z$ са периодични с основен период 2π;

2) Уравненията $\sin z=c, \cos z=c, c\in\mathbb{C}$ имат изброимо много решения;

3) Нулите на $\sin z$ в $\mathbb{C}$ са всички реални числа от вида $n\pi, n\in\mathbb{Z}$,а нулите на $\cos z$ в $\mathbb{C}$ са всички реални числа от вида $\frac{\pi}{2}+n\pi, n\in\mathbb{Z}$;

4) $\sin^2 z+\cos^2 z=1,\, z\in\mathbb{C}$.

Доказателство. 1) От периодичността на e^z и формулите на Ойлер следва $\sin(z+2k\pi)=\sin z, \cos(z+2k\pi)=\cos z$, т.е. $2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ е период и на двете функции. Обратно, нека ω е един период на $\cos z$, т.е. $\cos(z+\omega)=\cos z$ за всяко $z\in\mathbb{C}$. В частност при $z=0$ имаме:

$$\cos\omega=1\Leftrightarrow e^{i\omega}+e^{-i\omega}=2\Leftrightarrow (e^{i\omega})^2-2e^{i\omega}+1=0\Leftrightarrow (e^{i\omega}-1)^2=0\Leftrightarrow e^{i\omega}=1,$$

откъдето $\omega=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Аналогично за $\sin z$.

2) Имаме

$$\sin z=c\Leftrightarrow e^{iz}-e^{-iz}=2ic\Leftrightarrow (e^{iz})^2-2ice^{iz}-1=0\Leftrightarrow e^{iz}=ic\pm\sqrt{1-c^2}\ ;$$

$$\cos z = c \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2c \Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 2ce^{iz} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = c \pm \sqrt{c^2 - 1}.$$

Тъй като $ic \pm \sqrt{1 - c^2} \neq 0$ и $c \pm \sqrt{c^2 - 1} \neq 0$ за всяко $c \in \mathbb{C}$, твърдението следва от свойство 5) (Твърдение 6.1) на експоненциалната функция.

От това, че $\sin z$ и $\cos z$ приемат всяка комплексна стойност, в частност следва, че те не са ограничени в комплексната равнина (за разлика от поведението им върху реалната права, където и двете функции са реалнозначни и $-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1$). Така например върху имагинерната ос за $y > 0$,

$$i \sin iy = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2} < -y \quad , \quad \cos iy = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} > 1 + \frac{y^2}{2}.$$

3) Имаме

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{i2z} = 1 \Leftrightarrow i2z = i2k\pi \Leftrightarrow z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

и, предвид $e^{i\pi} = -1$,

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Leftrightarrow e^{iz} = e^{i(\pi - z)} \Leftrightarrow e^{i(2z-\pi)} = 1 \Leftrightarrow i(2z - \pi) = i2k\pi \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4) От формулите на Ойлер $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ и $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$, след почленно умножение получаваме $1 = e^{iz}e^{-iz} = \cos^2 z + \sin^2 z$.■

Забележка 6.1. Лесно се проверяват и други подобни тригонометрични тъждества. Нещо повече в Лекция 12 (Теорема за единственост) ще се убедим, че всяко тригонометрично тъждество, което е вярно върху реалната права, е изпълнено и в комплексната равнина.

Както и в случая на реална променлива, със $\sin z$ и $\cos z$ са свързани още две тригонометрични функции:

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{и} \quad \cot gz = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

И двете са дефинирани и холоморфни съответно в областите:

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \ldots \right\} \quad \text{и} \quad \mathbb{C} \setminus \{ k\pi, k = 0, \pm 1, \ldots \}.$$

От формулите на Ойлер имаме:

$$tgz = \frac{e^{i2z} - 1}{i(e^{i2z} + 1)}, \; z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \; \text{ и } \; \cot gz = i\frac{e^{i2z} + 1}{e^{i2z} - 1}, \; z \neq k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Оттук в частност следва, че и двете функции са периодични с основен период π.

Функцията $\log z$

Дефиниция 6.2. Под логаритъм, $\log z$ на комплексното число $z \neq 0$ се разбира всяко решение на уравнението $e^w = z$.

Както вече се убедихме (Твърдение 6.1) при $z = 0$, това уравнение няма решение, а за $z \neq 0$ има изброимо много решения, които се задават с формулата

$$w = \log z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z},$$

където $\arg z$ е един аргумент на z. Така $\log z$, не е функция в обичайния смисъл, който влагаме в това понятие. Тя е многозначна функция. Например:

$$\log 1 = 2k\pi i\ ,\ \log(-1) = (2k+1)\pi i\ ,\ \log i = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i\ ,\ \log(-i) = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i\ ,\ k = 0, \pm 1, \ldots$$

Твърдение 6.3. Функцията $\log z$ има следните свойства:

1) $e^{\log z} = z$;
2) $\log e^z = z + 2k\pi i,\ k = 0, \pm 1, \ldots$;
3) $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$;
4) $\log \dfrac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$.

Доказателство. 1) $e^{\log z} = e^{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)} = |z| e^{i \arg z} e^{i 2k\pi} = |z| e^{i \arg z} = z$.

2) $\log e^z = \ln|e^z| + i(\arg e^z + 2k\pi) = \ln e^{\operatorname{Re} z} + i(\operatorname{Im} z + 2k\pi) = z + 2k\pi i,\ k = 0, \pm 1, \ldots$

3) $\log z_1 z_2 = \ln|z_1 z_2| + i(\arg z_1 z_2 + 2k\pi) = \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi) = \log z_1 + \log z_2$.

Това не е числово равенство. То е равенство между множества и трябва да се тълкува така: Каквато и стойност на $\log z_1 z_2$ да вземем можем да намерим стойности на $\log z_1$ и $\log z_2$, така че $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$. И обратно, каквито и стойности на $\log z_1$ и $\log z_2$ да вземем, тяхната сума е стойност на $\log z_1 z_2$.

Аналогично следва 4).■

Функцията $\log z$ е първият ни пример на многозначна функция. Нейната многозначност се дължи на това, че всяко комплексно число има безбройно много аргументи. Методите на математическия анализ разработени за изследване на свойствата на еднозначните функции не са приложими към многозначните функции. За щастие една многозначна функция може, при това по съвсем естествен начин, да се разглежда като съвкупност от различни еднозначни функции, които ще наричаме *еднозначни клонове*. Така свойствата на многозначните функции могат да се изследват от гледната точка на техните еднозначни клонове.

Дефиниция 6.3. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област не съдържаща нулата. Еднозначен клон на $\log z$ в D се нарича непрекъсната функция $f : D \to \mathbb{C}$, такава че $e^{f(z)} = z,\ z \in D$.

Както ще се убедим, в зависимост от геометрията на областта D, в D може да е възможно, а може и да не е възможно да отделим еднозначен клон на

$\log z$. Ясно е обаче, че еднозначен клон на $\log z$ в D има, точно когато в D има еднозначен клон на функцията $\arg z$.

Теорема 6.1. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област и $0 \notin D$. Нека f_0 е един еднозначен клон на $\log z$ в D. Тогава f е еднозначен клон на $\log z$ в D, точно когато съществува $n \in \mathbb{Z}$, така че $f(z) = f_0(z) + i2\pi n$ за всяко $z \in D$.

Доказателство. Очевидно $f(z) = f_0(z) + i2\pi n$ е непрекъсната в D и $e^{f(z)} = e^{f_0(z)} e^{i2\pi n} = e^{f_0(z)} = z, z \in D$, т.е. f е еднозначен клон на $\log z$ в D. Обратно нека f е еднозначен клон на $\log z$ в D. Тогава функцията $g(z) = \dfrac{f(z) - f_0(z)}{2\pi i}$ е непрекъсната в D и $e^{2\pi i g(z)} = e^{f(z)} e^{-f_0(z)} = z\dfrac{1}{z} = 1$, откъдето следва, че за всяко $z \in D$ съществува $n \in \mathbb{Z}$, така че $g(z) = n$. Следователно $g(z)$ приема само цели стойности. Тъй като D е област (свързано множество) и $g(z)$ е непрекъсната в D, това е възможно, само ако $g(z)$ е константа, т.е. $g(z) = n, z \in D$, за някое фиксирано $n \in \mathbb{Z}$.■

Теорема 6.2. Всеки еднозначен клон f на $\log z$ в област $D \subset \mathbb{C} \setminus 0$ е холоморфна функция и $f'(z) = \dfrac{1}{z}$, $z \in D$.

Доказателство. Нека $z_0 \in D$, $w = f(z), w_0 = f(z_0)$. По условие $e^w = z, e^{w_0} = z_0$. Оттук и от непрекъснатостта на f следва, че $w \to w_0, w \neq w_0$, когато $z \to z_0, z \neq z_0$. Тогава

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{w \to w_0 \\ w \neq w_0}} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = 1 / \lim_{\substack{w \to w_0 \\ w \neq w_0}} \frac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0},$$

т.е. $f'(z_0) = \dfrac{1}{z_0}$.■

Сега ще дадем пример на област, в която можем да отделим еднозначен клон на $\log z$. Нека $z \neq 0$. Главният аргумент на z, $\arg_0 z$ се мени в интервала $(-\pi, \pi]$. Функцията $\arg_0 z$ е прекъсната във всяка точка от отрицателната част на реалната ос. Действително, за всяко $x < 0$ имаме $\arg_0 x = \pi$ и ако се приближаваме към x със стойности от долната полуравнина, т.е ако $z \to x, \operatorname{Im} z < 0$, то $\arg_0 z \to -\pi \neq \arg_0 x$. Но, както ще се убедим след малко, тя е непрекъсната във всички други точки на $\mathbb{C}$. Да означим с $\mathbb{C}^-$ комплексната равнина разрязана по отрицателната част на реалната ос, т.е. $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg_0 z < \pi\}$. Като имаме предвид връзката между функциите $\arg z$ и $\log z$ достигаме до следното естествено твърдение:

Твърдение 6.4. Функцията $\log_0 z = \ln|z| + i\arg_0 z$ е еднозначен клон на $\log z$ в $\mathbb{C}^-$.

Доказателство. Преди всичко да отбележим, че

$$e^{\log_0 z} = e^{(\ln|z| + i\arg_0 z)} = e^{\ln|z|} e^{i\arg_0 z} = |z| e^{i\arg_0 z} = z,$$

за всяко $z \in \mathbb{C}^-$. За да докажем че $\log_0 z$ е непрекъсната в $\mathbb{C}^-$, достатъчно е да докажем, че $\arg_0 z$ е непрекъсната в $\mathbb{C}^-$. Нека $z = |z| e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^-$, $z_n = |z_n| e^{i\varphi_n} \in \mathbb{C}^-$ и $z_n \to z$, където $\varphi, \varphi_n \in (-\pi, \pi)$, и да допуснем, че φ_n не клони към φ. Тъй като редицата $\{\varphi_n\}$ е ограничена, то (Теорема на Болцано-Вайерщрас), тя има сходяща подредица $\{\varphi_{n_k}\}$ $\varphi_{n_k} \to \theta, \theta \in [-\pi, \pi], \theta \neq \varphi$. Имаме $z_{n_k} = |z_{n_k}| e^{i\varphi_{n_k}} \to z$, а от друга страна от непрекъснатостта на експоненциалната функция следва, че $z_{n_k} = |z_{n_k}| e^{i\varphi_{n_k}} \to |z| e^{i\theta}$, откъдето получаваме $e^{i\varphi} = e^{i\theta}$, т.е. $e^{i(\theta - \varphi)} = 1$. Тъй като $0 < |\varphi - \theta| < 2\pi$, това не е възможно – противоречие. Това доказва твърдението.■

Дефиниция 6.4. Функцията $\log_0 z = \ln|z| + i\arg_0 z$, $z \in \mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg_0 z < \pi\}$ се нарича главен клон (главна стойност) на $\log z$ в $\mathbb{C}^-$.

Според Т.6.1 и Т.6.2 всички еднозначни клонове на $\log z$ в $\mathbb{C}^-$ са $\log_n z = \log_0 z + i2n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и те са холоморфни функции, като $(\log_n z)' = \dfrac{1}{z}$.
Функцията $w = \log_n z$ изобразява еднолистно и конформно $\mathbb{C}^-$ в ивицата $(2n-1)\pi < \operatorname{Im} w < (2n+1)\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Тези ивици не се препокриват и заедно покриват цялата комплексна равнина (без правите $\operatorname{Im} w = (2n+1)\pi$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Поради това, за да фиксираме един еднозначен клон, достатъчно е да зададем стойността му в определена точка $z \in \mathbb{C}^-$, например в $z = 1$. Така , ако $\log 1 = i2n\pi$, то $\log z = \log_n z$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Твърдение 6.5. За всяко $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$

$$\log_0(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots .$$

Доказателство. Нека $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{n}$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{n}{n+1} \right| = 1$, то радиусът на сходимост на този степенен ред е 1. Тогава $f(z)$ е холоморфна в единичният кръг и след почленно диференциране получаваме

$$f'(z) = 1 - z + z^2 - \cdots = \frac{1}{1+z}, \ |z| < 1.$$

От друга страна $\left(\log_0(1+z)\right)' = \dfrac{1}{1+z}$ и значи $\left(\log_0(1+z)\right)' = f'(z)$, $|z|<1$. От тук следва $\log_0(1+z) = f(z)+c$, $|z|<1$. Понеже $\log_0 1 = f(0) = 0$, то $c=0$ и

$$\log_0(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots,\ |z|<1. \blacksquare$$

Функцията $z^\alpha, z\in\mathbb{C}\setminus 0, \alpha\in\mathbb{C}$. Бином на Нютон

Дефиниция 6.5. $z^\alpha = e^{\alpha\log z}, z\in\mathbb{C}\setminus 0, \alpha\in\mathbb{C}$.

От самата дефиниция следва, че това е многозначна функция, като във всяка област, в която може да се отдели еднозначен клон на $\log z$, можем да отделим и еднозначен клон на z^α. Така за $z\in\mathbb{C}^- = \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ имаме

$$z^\alpha = e^{\alpha(\log_0 z + i2n\pi)} = e^{\alpha\log_0 z}e^{i2n\alpha\pi} = \left(z^\alpha\right)_0 e^{i2\pi\alpha n}, n = 0\pm1,\pm2,\dots$$

Така различните стойности на функцията z^α се получават от главната стойност $\left(z^\alpha\right)_0 = e^{\alpha\log_0 z}$ чрез умножение с целочислените степени на $e^{i2\pi\alpha}$ и тя приема толкова стойности, колкото приема множителят $e^{i2n\alpha\pi}, n=0\pm1,\pm2,\dots$ В зависимост от α имаме:

1) ако $\alpha = m\in\mathbb{Z}$, то $e^{i2nm\pi} = 1$ и z^α е еднозначна функция, като $z^m = \underbrace{z.z\dots z}_{m\ пъти}$, ако $m>0$ и $z^m = \dfrac{1}{z^{-m}}$, ако $m<0$;

2) ако $\alpha = \dfrac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$, $q>0$, $(p,q)=\pm1$, т.е α е рационално число, то $e^{i2n\frac{p}{q}\pi}$ приема само q на брой различни стойности, които съответстват на $n=0,1,\dots,q-1$ и $z^{\frac{p}{q}}$ е q-значна функция;

3) ако $\alpha\in\mathbb{C}$ не е рационално число, то $e^{i2n\alpha\pi}$ приема безбройно много стойности. Действително ако допуснем противното, то ще съществуват цели числа m и n, така че $e^{i2m\alpha\pi} = e^{i2n\alpha\pi} \Leftrightarrow e^{i2(m-n)\alpha\pi} = 1$, Оттук следва, че $(m-n)\alpha$ трябва да е цяло число, което означава,че α трябва да е рационално число – противоречие! Така в този случай z^α е безкрайно-значна функция.

Примери 6.1.

(1) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log 1} = e^{i2\sqrt{2}n\pi}, n=0,\pm1,\dots$;

(2) $i^i = e^{i\log i} = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}, k=0,\pm1,\dots$;

(3) $i^{-i} = e^{-i\log i} = e^{\frac{\pi}{2}+2m\pi}, m=0,\pm1,\dots$

Внимание: $(i^i)(i^{-i}) \neq i^0 = 1$, $(i^i)(i^{-i})$ приема безбройно много стойности $e^{2n\pi}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$

Твърдение 6.6. Функцията z^α има следните свойства:

1) $(z_1 z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha$ в смисъл на равенство на множества;
2) $z^\alpha z^\beta \supset z^{\alpha+\beta}$ в смисъл на включване на множества;
3) $(z^\alpha)^\beta \supset z^{\alpha\beta}$ в смисъл на включване на множества;
4) функцията $\left(z^\alpha\right)_0 = e^{\alpha \log_0 z}$ е холоморфна в $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и

$$\left(z^\alpha\right)_0' = \alpha e^{(\alpha-1)\log_0 z} = \alpha z^{\alpha-1}. \tag{6.1}$$

Доказателство. 1) По дефиниция $(z_1 z_2)^\alpha = e^{\alpha \log z_1 z_2}$, $z_1^\alpha z_2^\alpha = e^{\alpha \log z_1} e^{\alpha \log z_2} = e^{\alpha(\log z_1 + \log z_2)}$ и равенството следва от равенството (в смисъл на равенство на множества) $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$.

2) Имаме

$$z^\alpha z^\beta = e^{\alpha(\log_0 z + i2k\pi)} e^{\beta(\log_0 z + i2l\pi)} = e^{(\alpha+\beta)\log_0 z} e^{i(k\alpha + l\beta)2\pi}, \; k, l = 0, \pm 1, \ldots$$

и

$$z^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)(\log_0 z + i2m\pi)} = e^{(\alpha+\beta)\log_0 z} e^{im(\alpha+\beta)2\pi}, \; m = 0, \pm 1, \ldots.$$

Оттук, при $k = l = m$, следва, че всяка стойност на $z^{\alpha+\beta}$ е стойност и на $z^\alpha z^\beta$, т.е. $z^\alpha z^\beta \supset z^{\alpha+\beta}$, в смисъл на включване на множества. Обратното включване не е вярно, както показва следният пример: $1^{\frac{1}{2}} 1^{\frac{1}{2}} = \{-1, 1\}$, докато $1^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \{1\}$.

3) Следва аналогично на 2), като съответният пример показващ, че обратното включване не е вярно е следният: $(1^2)^{\frac{1}{2}} = \{-1, 1\}$, докато $1^{\frac{1}{2}2} = \{1\}$.

4) Имаме

$$\left(z^\alpha\right)_0' = \left(e^{\alpha \log_0 z}\right)' = \alpha e^{\alpha \log_0 z} (\log_0 z)' = \alpha \frac{e^{\alpha \log_0 z}}{z} = \alpha \frac{e^{\alpha \log_0 z}}{e^{\log_0 z}} = \alpha e^{(\alpha-1)\log_0 z} = \alpha z^{\alpha-1},$$

където $z^{\alpha-1}$ е главна стойност.■

Забележка 6.2. Формулата (6.1) следва да се разбира така: $\left(z^\alpha\right)_0' = \alpha \frac{\left(z^\alpha\right)_0}{z}$, където и от двете страни на равенството стои една и съща главна стойност на z^α.

Дефиниция 6.6. За всяко $\alpha \in \mathbb{C}$ дефинираме биномни коефициенти

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \; n = 1, 2 \ldots$$

Разбира се ако α е естествено число, то $\binom{\alpha}{n} = 0$ за всяко $n > \alpha$ и тогава е в сила добре известната биномна формула (формула на Нютон)

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} z^n, \text{ за всяко } z \in \mathbb{C}, \ \alpha \in \mathbb{N}.$$

Твърдение 6.7. За всяко $\alpha \in \mathbb{C}$ и за $|z| < 1$

$$(1+z)^{\alpha} = e^{\alpha \log_0 (1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n .$$

Доказателство. Нека $f(z) = (1+z)^{\alpha} = e^{\alpha \log_0 (1+z)}$, а $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$. Функцията $f(z)$ е холоморфна в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$, в частност и в единичния кръг, и $f'(z) = \alpha \dfrac{(1+z)^{\alpha}}{1+z} = \alpha \dfrac{f(z)}{1+z}$, т.е. (6.2) $(1+z) f'(z) = \alpha f(z)$. От друга страна степенният ред $\varphi(z)$ има радиус на сходимост $R = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\left|\binom{\alpha}{n}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n+1}{|\alpha - n|} = 1$, откъдето функцията $\varphi(z)$ е холоморфна в единичния кръг и $\varphi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} z^{n-1}$. Освен това $\varphi(z)$ удовлетворява диференциалното уравнение (6.2). Действително

$$(1+z)\varphi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n \binom{\alpha}{n} + (n+1) \binom{\alpha}{n+1} \right) z^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = \alpha \varphi(z)$$

Тогава $\dfrac{\varphi'}{\varphi} = \dfrac{\alpha}{1+z} = \dfrac{f'}{f} \Leftrightarrow \varphi' f - \varphi f' = 0$ за $|z| < 1$, откъдето $\left(\dfrac{\varphi(z)}{f(z)} \right)' = 0, |z| < 1$. Оттук следва $\dfrac{\varphi(z)}{f(z)} = const = \dfrac{\varphi(0)}{f(0)} = 1, |z| < 1$. Така $f(z) = \varphi(z), |z| < 1$, т.е. $(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n, |z| < 1$.■

Обратни тригонометрични функции-функцията $arctgz$

Тъй като тригонометричните функции са периодични, то техните обратни функции са многозначни. Както вече се убедихме, в комплексната равнина тригонометричните функции и експоненциалната функция са тясно свързани. Затова не е изненадващо, че същото се отнася и за техните обратни функции.

Тук ще разгледаме накратко само обратната функция на tgz ,функцията $arctgz$.
Дефиниция 6.7. Всяко решение на уравнението $tgw = z,\ z \in \mathbb{C}$, се нарича $arctgz$.

Нека z е комплексно число. Искаме да намерим всички комплексни числа w, такива че $tgw = z$. Имаме

$$tgw = z \Leftrightarrow \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = z \Leftrightarrow \frac{e^{i2w} - 1}{e^{i2w} + 1} = iz \Leftrightarrow e^{i2w}(1 - iz) = 1 + iz.$$

Оттук, тъй като $e^{i2w} \neq 0$ за всяко w, за $z \neq \pm i$ получаваме (при $z = \pm i$ равенството няма смисъл)

$$e^{i2w} = \frac{1 + iz}{1 - iz} \Leftrightarrow 2iw = \log\frac{1 + iz}{1 - iz},$$

откъдето намираме

$$w = arctgz = \frac{1}{2i}\log\frac{1 + iz}{1 - iz},\ z \neq \pm i.$$

Така установихме, че многозначната функция $arctgz$ е дефинирана за всяко $z \neq \pm i$ и я изразихме експлицитно чрез логаритъма. За да отделим еднозначен клон на тази функция трябва да отделим еднозначен клон на функцията $\log\frac{1 + iz}{1 - iz}$. За да определим област в която това е възможно, достатъчно е да намерим прообраза на областта $\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ при дробно-линейната трансформация $\zeta = \frac{1 + iz}{1 - iz}$, т.е. да намерим образа на $\mathbb{C}^-$ при трансформацията $z = i\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}$. По стандартния начин определяме, че това е областта $\mathbb{C} \setminus \{[i.1, i\infty) \cup [-i.1, i\infty)\}$, т.е. равнината разрязана по лъчите от имагинерната ос: $z = iy, y \geq 1,\ z = iy, y \leq -1$. Тогава в тази област функцията

$$arctg_0 z = \frac{1}{2i}\log_0\frac{1 + iz}{1 - iz}$$

е един еднозначен клон на $arctgz$, ще го наречем главен клон, и всички останали еднозначни клонове се задават с равенството $arctg_n z = arctg_0 z + n\pi,\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Също така всички те са холоморфни функции в посочената област. За да намерим производната на $arctg_0 z$ ще използваме следното елементарно твърдение:

Твърдение 6.8. $\log_0\frac{1 + iz}{1 - iz} = \log_0(1 + iz) - \log_0(1 - iz)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{[i.1, i\infty) \cup [-i.1, i\infty)\}$.

Доказателство. От свойствата на многозначната логаритмична функция имаме, че $\log_0 \frac{1+iz}{1-iz} = \log_0(1+iz) - \log_0(1-iz) + i2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Специално за $z=0$ получаваме $0 = 0 - 0 + i2n\pi$, откъдето намираме $n=0$ и твърдението е доказано.■

От него следва

$$(arctg_0 z)' = \frac{1}{2i}\left(\frac{i}{1+iz} - \frac{-i}{1-iz}\right) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Твърдение 6.9. За всяко $z \in \mathbb{C}$, $|z|<1$

$$arctg_0 z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots$$

Доказателство. Нека $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, където $a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2n+1}, k = 2n+1 \\ 0, k = 2n, n = 0,1\dots \end{cases}$. Тъй като $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, то радиусът на сходимост на този степенен ред е 1. Тогава $f(z)$ е холоморфна в единичния кръг и след почленно диференциране получаваме

$$f'(z) = 1 - z^2 + z^4 - \cdots = \frac{1}{1+z^2}, \ |z|<1.$$

От друга страна $\left(arctg_0 z\right)' = \frac{1}{1+z^2}$ и значи $\left(arctg_0 z\right)' = f'(z)$, $|z|<1$. От тук следва $arctg_0 z = f(z) + c$, $|z|<1$. Понеже $arctg_0 0 = f(0) = 0$, то $c = 0$ и

$$arctg_0 z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots, \ |z|<1. \blacksquare$$

По аналогичен начин се установяват и връзките на останалите обратни тригонометрични функции с логаритъма. В сила са формулите:

$$\arcsin z = -i\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right), \ z \neq \pm 1$$
$$\arccos z = -i\log\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \ z \neq \pm 1$$
$$arc\cot gz = \frac{1}{2i}\log\frac{z+i}{z-i}, \ z \neq \pm i.$$

(Вж. [16], зад.6.42,6.43,6.44,6.45.)

Задачи

6.1. Нека $f(z)$ е коя да е от функциите $e^z, \sin z, \cos z$. Да се намерят всички $z \in \mathbb{C}$, за които:
а) $f(z) \in \mathbb{R}$; б) $f(z) < 0$; в) $f(z) \in i\mathbb{R}$,

6.2*. Да се докажат неравенствата:
а) $|e^z - 1| \le e^{|z|} - 1 \le |z|e^{|z|},\ z \in \mathbb{C}$;
б) $|e^z - 1| \le 2|z|e^{|z|},\ z \in \mathbb{C}, |z| \le 1$;
в) $|1 - (1-z)e^z| \le |z|^2,\ z \in \mathbb{C}, |z| \le 1$.

6.3. Да се докаже, че за всяко $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\pi - \varphi}{2},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n} = -\ln 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Упътване. Приложете граничната теорема на Абел към реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log_0(1-z)$.

6.4. Да се докаже, че за $|z| = 1$ биномният ред $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ е абсолютно сходящ при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ и е разходящ при $\operatorname{Re}\alpha < -1$.
Упътване. Използвайте критерия на Раабе-Дюамел.

Лекция 7
Линеен интеграл от функция на комплексна променлива. Теорема на Лайбниц-Нютон

В тази лекция ще дефинираме линеен интеграл, т.е. интеграл по крива от функция на комплексна променлива, приемаща комплексни стойности, и ще изложим основните му свойства. Ще се ограничим с интегриране на непрекъснати функции върху частично гладки криви, за които дефиницията на линеен интеграл е изключително проста. Това от една страна е напълно достатъчно за целите на един начален курс по Комплексен анализ, а от друга ще ни позволи по-бързо да преминем към основните резултати в теорията. Нашият подход ще се базира на понятието Риманов интеграл, изградено в курса по реален анализ. Ще започнем с дефинирането на интеграл от комплекснозначна функция на реална променлива.

Дефиниция на линеен интеграл. Свойства

Дефиниция 7.1. Една комплекснозначна функция $f:[a,b]\to\mathbb{C}\ \ (a,b\in\mathbb{R}, a<b)$, се нарича интегруема (в смисъл на Риман), ако функциите $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f:[a,b]\to\mathbb{R}$ са интегруеми върху интервала $[a,b]$ в смисъл на Риман и тогава

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i\int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt\,.$$

Ясно е, че тази естествена дефиниция пренася обичайните правила за пресмятане на Римановия интеграл от реалнозначни функции и върху комплекснозначни функции на реална променлива (в това число и формулата на Лайбниц-Нютон, теоремата за смяна на променливата и т.н.).

Дефиниция 7.2. Нека $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ е гладка крива и $f:\gamma^*\to\mathbb{C}$ е непрекъсната функция, т.е. функцията $f(\gamma(t))$ е непрекъсната в интервала $[a,b]$. Тогава линеен интеграл от f по кривата γ се нарича числото

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\,.$$

Ако γ е частично гладка, то съществуват точки $a=a_0<a_1<\ldots<a_n=b$, така че γ е гладка във всеки от интервалите $[a_k,a_{k+1}],\ k=0,1,\ldots,n-1$. В този случай дефинираме

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(z)dz := \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\,.$$

Преди всичко ще покажем, че тази дефиниция е коректна, като докажем, че интегралът не зависи от параметризацията на кривата. Действително, нека $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$, са две параметризации на гладката крива γ (т.е. $\gamma_1 \sim \gamma_2$ са два еквивалентни гладки пътя), $\tau = \lambda(t) : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$, $\lambda(a_1) = a_2$, $\lambda(b_1) = b_2$, $\gamma_2(\lambda(t)) = \gamma_1(t)$ за всяко $t \in [a_1, b_1]$, $\lambda(t)$ е непрекъснато диференцируема и $\lambda'(t) > 0$ за всяко t. Тогава, ако f е непрекъсната върху $\gamma_1^* = \gamma_2^*$, от теоремата за смяна на променливите в Римановия интеграл следва

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)dz &= \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(\tau))\gamma_2'(\tau)d\tau = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(\lambda(t))\gamma_2'(\lambda(t))\lambda'(t)dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int_{\gamma_1} f(z)dz.\end{aligned}$$

Това ни дава право при пресмятането на интеграла по кривата γ да използваме коя и да е нейна параметризация и поради това оттук нататък, няма да правим разлика между кривата и пътят, който я представя.

Забележка 7.1. Може да се дефинира интеграл на Риман (по-точно това е интеграл на Риман-Стилтес) от комплекснозначна функция и по всяка ректифицируема (не е необходимо да е гладка)) крива, като се следва стандартната схема с Риманови суми (вж, например [2]). Ще припомним, че дължина на крива се нарича точната горна граница на дължините на всички вписани в нея начупени линии и една крива е ректифицируема, ако има крайна дължина. Всяка гладка крива $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ е ректифицируема и дължината ѝ е

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt .$$

Ако γ е само частично гладка, нейната дължина е сумата от дължините на нейните гладки части. Ще отбележим още, че дължината на ректифицируема крива не зависи от параметризацията ѝ.

Без да навлизаме в детайли ще скицираме този по-общ подход към линейния интеграл от комплекснозначна функция. Нека $z = \gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ е ректифицируема крива и $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ е функция дефинирана върху γ^*. Нека $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ е произволно подразделяне на интервала $[a, b]$ и $z_k = \gamma(t_k), k = 0,1..., n$ са съответните му точки върху γ. Да изберем по произволен начин точки $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k], k = 1,..., n$ и нека $\zeta_k = \gamma(\tau_k)$. На всяко такова подразделяне P да съпоставим сумата

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\tau_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) .$$

Казваме, че функцията f е интегруема върху γ, ако съществува $\lim\limits_{\delta\to 0} S(P)$, където $\delta = \delta(P) = \max\limits_{1\le k\le n} |t_k - t_{k-1}|$, и полагаме

$$\int_\gamma f := \int_\gamma f(z)dz := \lim_{\delta\to 0} S(P).$$

Всяка непрекъсната функция е интегруема и ако γ е частично гладка тази дефиниция съвпада с възприетата от нас. Освен това интеграл по произволна ректифицируема крива може да се апроксимира с произволна точност с интеграл по начупена линия, вписана в нея. По-точно в сила е следната:

Лема за апроксимация ([2]) Нека $f : D \to \mathbb{C}$ е функция непрекъсната в област D и $\gamma \subset D$ е ректифицируема крива. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува начупена линия $\Gamma \subset D$ с върхове върху γ, така че

$$\left| \int_\gamma f - \int_\Gamma f \right| < \varepsilon .$$

Този важен резултат ни мотивира в изложението си да се ограничим с интегриране само по частично гладки криви. От тук нататък под крива ще разбираме частично гладка крива, освен ако не е казано друго.

Примери 7.1. Ще разгледаме два важни интеграла, които ще присъстват нееднократно в изложението.

(1) Да се пресметне $\int_C (z-a)^n dz$ където C е окръжност с център $a \in \mathbb{C}$ и радиус $r > 0$, а n е цяло число.

Една параметризация на C е $z = a + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Имаме

$$\int_C (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} r^n e^{\mathrm{int}} i r e^{it} dt = i r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt .$$

Оттук, при $n \neq -1$ от формулата на Лайбниц-Нютон следва

$$\int_C (z-a)^n dz = r^{n+1} \frac{e^{i(n+1)2\pi} - 1}{n+1} = 0 ,$$

а при $n = -1$ получаваме

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

Така

$$\int_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}.$$

(2) Да се пресметне $\int_\gamma z^n dz$,където $\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ е крива с начало точката $A=\gamma(a)$ и край точката $B=\gamma(b)$, а $n \geq 0$ е цяло число.

Пак от формулата на Лайбниц-Нютон имаме

$$\int_\gamma z^n dz = \int_a^b \gamma^n(t)\gamma'(t)dt = \frac{1}{n+1}\int_a^b [\gamma^{n+1}(t)]'dt = \frac{\gamma^{n+1}(b)-\gamma^{n+1}(a)}{n+1} = \frac{B^{n+1}-A^{n+1}}{n+1}.$$

Това означава, че за всяко цяло число $n \geq 0$, $\int_\gamma z^n dz$ зависи само от началото и от края на кривата γ (т.е не зависи от кривата, която свързва точките A и B от комплексната равнина). В частност, ако γ е затворена крива, стойността на този интеграл е нула.

Твърдение 7.1. Интегралът по крива притежава следните свойства:

(1) *Линейност*: Ако $f:\gamma \to \mathbb{C}$ и $g:\gamma \to \mathbb{C}$ са непрекъснати функции върху кривата γ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, то

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\gamma f + \beta \int_\gamma g.$$

(2) *Адитивност*: Нека $\gamma_1:[a,b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2:[b_1,b] \to \mathbb{C}$ са криви за които $\gamma_1(b_1)=\gamma_2(b_1)$. Тогава

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 := \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a,b_1] \\ \gamma_2(t), t \in [b_1,b] \end{cases}$$

е също крива и ако f е непрекъсната функция върху $\gamma_1 \cup \gamma_2$, то

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

(3) Ако $f:\gamma \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функция върху кривата γ , то

$$\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f.$$

(4) *Оценка на интеграла*: Ако f е непрекъсната функция върху кривата $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, то в сила е неравенството:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f(z)||dz|,$$

където

$$\int_\gamma |f(z)||dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt$$

е криволинейният интеграл от първи род от функцията $|f|$ по кривата γ.
В частност, ако $M = \max_{z\in\gamma}|f(z)|$, то

$$\int_\gamma |f(z)||dz| \le Ml(\gamma),$$

където $l(\gamma)$ е дължината на кривата γ.

Доказателство. Първите две свойства следват непосредствено от дефиницията и съответните свойства на Римановият интеграл.

(3) Ако $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, то $\gamma^- = \gamma(b+a-t)$ и

$$\int_{\gamma^-} f = -\int_a^b f(\gamma(b+a-t))\gamma'(b+a-t)dt .$$

Правим смяна на променливата $\tau = b+a-t$ и получаваме

$$\int_{\gamma^-} f = \int_b^a f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)d\tau = -\int_a^b f(\gamma(\tau))\gamma'(\tau)d\tau = -\int_\gamma f .$$

(4) Нека $\lambda = \int_\gamma f(z)dz \ne 0$ и $\lambda = |\lambda|e^{i\varphi}$ е тригонометричният запис на това число. Тогава $|\lambda| = \lambda e^{-i\varphi}$ и

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= \operatorname{Re}\left(\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\right) = \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi}\int_\gamma f(z)dz\right) = \operatorname{Re}\left(\int_\gamma e^{-i\varphi} f(z)dz\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\int_a^b e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)dt\\
&\le \int_a^b | e^{-i\varphi} f(\gamma(t))\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b | f(\gamma(t))|| \gamma'(t)| \, dt,
\end{aligned}
$$

защото $\operatorname{Re} w \le |\operatorname{Re} w| \le |w|$ за всяко $w \in \mathbb{C}$. Втората част на твърдението е непосредствено следствие от тази оценка, тъй като $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.■

Забележка 7.2. Ако в (2) кривите γ_1 и γ_2 не са свързани (т.е. $\gamma_1 \cup \gamma_2$ не е крива) по дефиниция ще считаме, че

$$
\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f := \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f \, .
$$

По-общо

$$
\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_n} f := \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \ldots + \int_{\gamma_n} f
$$

Твърдение 7.2. (Връзка с криволинейните интеграли от II род от реалнозначни функции) Ако функцията $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ е непрекъсната върху кривата $\gamma : z = \gamma(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$, то

$$
\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy \, .
$$

Доказателство. Следвайки дефиницията имаме

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b [u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))][x'(t) + iy'(t)]dt\\
&= \int_a^b [ux' - vy']dt + i\int_a^b [vx' + uy']dt = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy.
\end{aligned}
$$

■

Примитивна. Теорема на Лайбниц-Нютон

Дефиниция 7.3. Примитивна на функцията $f : D \to \mathbb{C}$ в областта D се нарича функция F , която е холоморфна в D и $F'(z) = f(z), z \in D$.

Както ни е добре известно, в реалния случай всяка непрекъсната функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ има примитивна, например $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. В комплексния случай нещата са по-различни. Ще се окаже, в това ще се убедим по-нататък, че за да има една функция примитивна, самата тя трябва да е холоморфна. Ще конструираме примитивна F на $f:D\to\mathbb{C}$ като имитираме реалния случай, а именно:ще дефинираме $F(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$, където $z_0\in D$ е фиксирана точка, като интегрирането е по крива от D свързваща точките z_0 и z. Но изобщо казано, съществуват безброй криви в D които свързват двете точки и за разлика от реалният случай, този интеграл зависи не само от началната и крайната точка, но и от кривата, която ги свързва. Да разгледаме следният пример:

Пример 7.2. Нека $z_0=1$, $z=-1$ и $f(z)=\dfrac{1}{z}$. Нека $\gamma_1: z=e^{it}, t\in[0,\pi]$ е горната половина на единичната окръжност, а $\gamma_2: z=e^{-it}, t\in[0,\pi]$ - долната ѝ половина. Тогава

$$\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z}=\int_0^\pi\frac{ie^{it}}{e^{it}}dt=i\pi,$$

докато

$$\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z}=\int_0^\pi\frac{-ie^{-it}}{e^{-it}}dt=-i\pi.$$

Така получихме две различни стойности на интеграла, когато интегрирахме по две различни криви, свързващи точките $z_0=1$ и $z=-1$.

По-рано (вж. Примери 7.1) видяхме, че $\int_\gamma z^n dz$ зависи само от началото и от края на кривата γ. Естествен е въпросът: При какви условия интегралът $\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$, не зависи от избора на кривата, свързваща точките z_0 и z? Ще се убедим, че този въпрос е тясно свързан с въпроса за съществуване на примитивна.

Теорема 7.1. (Формула на Нютон-Лайбниц) Нека $D\subseteq\mathbb{C}$ е област и $f:D\to\mathbb{C}$ е непрекъсната функция. Ако f има примитивна F в D, то за всеки две точки $z_0, z\in D$ и всяка крива $\gamma\subset D$, която ги свързва

$$\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_0).$$

Доказателство. Ако $\gamma : \zeta = \gamma(t) : [a,b] \to D$, $\gamma(a) = z_0, \gamma(b) = z$ е гладка крива, следвайки дефиницията на линеен интеграл и използвайки правилото за диференциране на съставна функция ще сведем доказателството до стандартната формула на Лайбниц-Нютон за реалнозначни функции на реална променлива. Действително имаме

$$\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{a}^{b} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$
$$= \int_{a}^{b} \frac{dF(\gamma(t))}{dt}dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z) - F(z_0).$$

Ако γ е частично гладка, по дефиниция съществуват точки $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$, така че γ_k, рестрикцията на γ върху интервала $[a_k, a_{k+1}]$ е гладка за $k = 0,1,...,n-1$. Тогава

$$\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(\zeta)d\zeta = \sum_{k=0}^{n-1} [F(\gamma(a_{k+1})) - F(\gamma(a_k))]$$
$$= F(\gamma(a_n)) - F(\gamma(a_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z) - F(z_0).$$

■

Така, ако f има примитивна в D то интегралът от f по γ не зависи от кривата и в частност, ако тя е затворена стойността му е нула. Вярно е и обратното.

Теорема 7.2. (Лайбниц-Нютон) Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f : D \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функция. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) f има примитивна в D;

(2) $\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta = 0$ за всяка затворена крива $\gamma \subset D$;

(3) $\int_{\gamma} f(\zeta)d\zeta$ не зависи от кривата γ, т.е. ако $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ са криви с общи начало и край, то $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

Доказателство. (1)$\Rightarrow$(2):Следва от формулата на Лайбниц-Нютон (Т.7.1).

(2)$\Rightarrow$(3): Тъй като γ_1 и γ_2 имат едни и същи начало и край, то $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ е затворена крива и

$$0 = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f .$$

(3) $\Rightarrow$(1): Да фиксираме $z_0 \in D$. За всяко $z \in D$ дефинираме $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, където интегрирането е по произволна крива $\gamma \subset D$, свързваща точките z_0 и z. От (3) следва, че тази функция е добре дефинирана. Нека $h \in \mathbb{C}$ е такова,че отсечката $[z, z+h]$ се съдържа в D. Имаме

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{\gamma \cup [z,z+h]} f - \int_{\gamma} f\right] = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta$$

и

$$f(z) = f(z)\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} 1 d\zeta = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(z)d\zeta .$$

Оттук следва

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta .$$

Нека сега $\varepsilon > 0$ е произволно. Тъй като f е непрекъсната в $z \in D$, то съществува $\delta > 0$, така че $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ за всяко $\zeta : |\zeta - z| < \delta$. Понеже дължината на отсечката $[z, z+h]$ е $|h|$, то ако $|h| < \delta$ имаме, че за всяко $\zeta \in [z, z+h] : |\zeta - z| \le |h| < \delta$. Тогава, предвид оценката на интеграла (Твърдение 7.1.(4))

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta\right| \le \frac{1}{|h|}\varepsilon |h| = \varepsilon .$$

Следователно $F'(z) = f(z)$ за всяко $z \in D$, т.е. F е примитивна на f в D.■

Като следствие получаваме още едно доказателство на Т.3.4 от Лекция 3.

Следствие 7.1. Ако F е холоморфна в област D и $F'(z) = 0$ за всяко $z \in D$, то F е константа в D.

Доказателство. По условие F е примитивна на функцията тъждествено равна на нула в D. Нека $z_0 \in D$ е фиксирана точка. Тъй като D е линейно свързано множество, то всяко $z \in D$ може да се свърже със z_0 чрез крива $\gamma \subset D$ и от формулата на Лайбниц-Нютон следва

$$F(z)-F(z_0)=\int_\gamma 0d\zeta=0,$$

т.е. $F(z)=F(z_0)$ за всяко $z\in D$.■

Оттук непосредствено получаваме

Следствие 7.2. Ако F и G са примитивни на f в D, то $F-G$ е константа в D, т.е., ако F е примитивна на f в D, то всички примитивни на f имат вида $F(z)+const.$

Теоремата и формулата на Лайбниц-Нютон са важен инструмент за пресмятане на интеграли върху криви. Ако подинтегралната функция f има примитивна F не е необходимо да параметризираме кривата, по която интегрираме и да пресмятаме съответните реални интеграли, а само пресмятаме разликата между две стойности на F. Така например функцията $f(z)=z^n, n\in\mathbb{Z}$, $n\neq -1$, е холоморфна в $\mathbb{C}\setminus 0$ (в $\mathbb{C}$ при $n\geq 0$) има примитивна в $\mathbb{C}\setminus 0$, $F(z)=\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ и тогава $\int_\gamma z^n dz=0$, за всяка затворена крива $\gamma\subset\mathbb{C}\setminus 0$ и за всяко $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq -1$. По-нататък ще се убедим, че за да има една функция примитивна е необходимо тя да е холоморфна. Но не всяка холоморфна функция има примитивна. Тъй като $\int_\gamma \dfrac{dz}{z-a}=2\pi i\neq 0$, където γ е окръжност с център a, от теоремата на Лайбниц-Нютон става ясно, че за всяка околност U на a функцията $f(z)=\dfrac{1}{z-a}$, холоморфна в $U\setminus a$, няма примитивна в $U\setminus a$. Специално при $a=0$, това означава , че в $U\setminus 0$ не може да се отдели еднозначен клон на $\log z$. Освен това не винаги е лесно да се определи дали една функция има примитивна, например функцията e^{z^2}.Така това, че сведохме въпроса за независимост на интеграла от пътя по който интегрираме до въпроса за съществуване на примитивна, не дава отговор на основния въпрос: При какви условия стойността на интеграла се определя само от началото и края на кривата, по която се интегрира?

Задачи

7.1. Нека $p(z)$ е полином. Да се докаже, че:

а) $\int_\gamma p(z)dz=0$ за всяка затворена крива $\gamma\subset\mathbb{C}$;

б) Функцията $f(z)=\dfrac{1}{z}$ не може да се апроксимира равномерно върху единичната окръжност с полиноми.

7.2. (Лема на Жордан) Нека функцията $f(z)$ е непрекъсната в горната полуравнина $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $\gamma_R = \{z : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и $M(R) = max\{|f(z)| : z \in \gamma_R\} \to 0$ при $R \to \infty$. Да се докаже, че за всяко $\lambda > 0$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} = 0 .$$

7.3. Нека комплексните числа $a_n, n = 2, 3, \ldots$ са такива, че $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| < 1$. Да се докаже, че функцията $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ е холоморфна и еднолистна в единичния кръг.

Упътване. За всеки $z_1 \neq z_2$ от единичния кръг имаме

$$f(z_1) - f(z_2) = \int_{[z_1, z_2]} f'(z) dz ,$$

където $[z_1, z_2]$ е отсечката, свързваща z_1 и z_2.

Лекция 8
Основна теорема на Коши (класическа форма)

В предната лекция показахме, че една функция, дефинирана и непрекъсната в област D има примитивна в D, точно когато $\int_\gamma f(z)dz = 0$ за всяка затворена крива $\gamma \subset D$. Също така, (вж. Примери 7.1.(1)) видяхме, че дори f да е холоморфна в D това условие може да не е изпълнено. Така естествено възниква въпроса: За кои области D, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ за всяка холоморфна в D функция f и всяка затворена крива $\gamma \subset D$? (По-нататък ще се убедим, че холоморфността на f е необходимо условие.) Отговор на този въпрос дава теоремата на Коши. Този забележителен резултат е сърцевината на комплексния анализ и почти всички основни резултати в този курс са следствие от него. В тази лекция ще изложим едно класическо доказателство на теоремата на Коши в най-простата ѝ форма.

Едносвързана област. Теорема на Жордан

Дефиниция 8.1. Една област $D \subseteq \mathbb{C}$ се нарича едносвързана, ако $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ е свързано множество.

Примери 8.1.

(1) Всеки кръг и всяка полуравнина са едносвързани области.
(2) Всеки продупчен кръг и всеки венец $\{z : 0 < r < |z - z_0| < R\}$ не са едносвързани области-допълненията им до разширената комплексна равнина имат по две компоненти на свързаност.
(3) Всяка ивица, заключена между две успоредни прави е едносвързана област. Ще отбележим, че този пример показва, че една област може да е едносвързана, но допълнението ѝ до крайната комплексна равнина да не е свързано множество. Затова в дефиницията е важно да се разглежда допълнението до разширената комплексна равнина.

Едносвързаните области и затворените жорданови криви са взаимно свързани. Интуитивно е ясно, че всяка затворена жорданова крива разделя равнината на две области. Формално, в сила е следната теорема на Жордан:

Теорема 8.1. (Жордан) Ако γ е затворена жорданова крива, то допълнението ѝ $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ до разширената комплексна равнина е обединение на две непресичащи се едносвързани области, едната от които е ограничена.

Макар и наглед очевиден, това е дълбок и изключително труден за доказване резултат. Ние ще го използваме наготово. Ограничената област се нарича *вътрешност на* γ и ще я бележим с $\mathrm{int}\gamma$, а неограничената се нарича *външност на* γ и ще я бележим с $\mathrm{ext}\gamma$. Ако жордановата крива γ е ориентирана така, че вътрешността ѝ остава отляво, когато се движим по γ, ще казваме, че γ е *положително ориентирана* (т.е. γ е ориентирана в посоката обратна на движението на часовниковата стрелка), в противен случай – *отрицателно ориентирана*. Като следствие от теоремата на Жордан се получава следната характеристика на едносвързаните области:

Теорема 8.2. (Жордан) Една област е едносвързана, точно когато заедно със всяка затворена жорданова крива съдържа и нейната вътрешност.

Теорема на Коши (класическа форма)

Ще започнем с един основен резултат от теорията на функциите на няколко променливи.

Теорема на Грийн. Нека γ е частично гладка затворена жорданова крива с вътрешност $int\gamma = D$ и P и Q са реалнозначни функции с непрекъснати частни производни в околност на $\overline{D}$. Тогава

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

Нека сега $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ е холоморфна функция, с непрекъсната производна, в околност на $\overline{D}$. Тогава

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u + iv)(dx + idy) = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy$$

и от теоремата на Грийн получаваме

$$\int_\gamma f(z)dz = \iint_D (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_D (u_x - v_y)dxdy .$$

Тъй като f е холоморфна в D, то u и v удовлетворяват уравненията на Коши-Риман и следователно

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 .$$

Така, като следствие от теоремата на Грийн и уравненията на Коши-Риман получихме първоначалния вариант на теоремата на Коши:

Теорема 8.3. (Коши-първоначален вариант) Ако $D \subseteq \mathbb{C}$ е едносвързана област, то $\int_\gamma f(z)dz = 0$ за всяка частично гладка затворена жорданова крива

$\gamma \subset D$ (тогава и $int\gamma \subset D$) и за всяка холоморфна и с непрекъсната производна в D функция f.

Изложеното доказателство е близко до оригиналното доказателство на Коши. То има сериозен недостатък - използва непрекъснатост на производната на f. Гурса пръв доказва, че условието за непрекъснатост на f' може да се изпусне. Отстраняването на това условие е важно. Така например като следствие, по-нататък ще получим, че производната на холоморфна функция е също холоморфна функция. (Удивително!-Непрекъснатостта на f' следва автоматично, но това далеч не е очевидно.)

Теорема 8.4. (Основна теорема на Коши-Гурса) Ако $D \subseteq \mathbb{C}$ е едносвързана област, то $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$ за всяка затворена крива $\gamma \subset D$ и за всяка холоморфна в D функция f.

Доказателство. Доказателството за произволна (ректифицируема) затворена крива включва следните три стъпки:

Стъпка 1. Ако $\gamma = \partial\Delta$ е границата на триъгълник Δ, то $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$;

Стъпка 2. Ако γ е произволна затворена начупена линия, то $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$;

Стъпка 3. . Ако γ е произволна затворена крива, то $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Тук ще изложим доказателството само на първата стъпка. За останалите ще отбележим, че Стъпка 2 следва от Стъпка 1 и от следните топологични факти:

● всяка затворена начупена линия е обединение на краен брой еднакво ориентирани, затворени жорданови начупени линии и краен брой отсечки описвани два пъти в противоположни посоки;

● всяка затворена жорданова начупена линия се разделя на краен брой еднакво ориентирани триъгълници.

Стъпка 3 следва от Стъпка 2 и лемата за апроксимация (вж. Лекция 7).

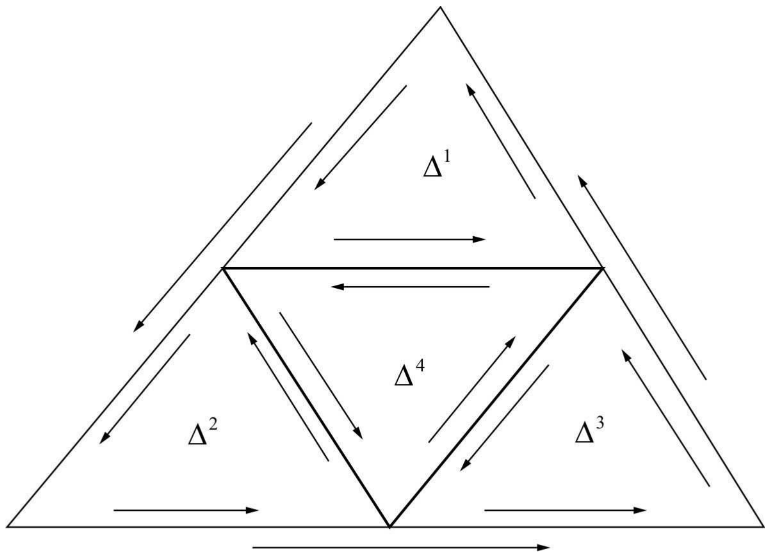
Доказателство на Стъпка 1. Преди всичко ще отбележим, че с Δ ще означаваме затворен триъгълник, т.е. затворената област ограничена от $\gamma = \partial\Delta$, с $d(\Delta)$ - диаметърът на Δ, а с P_Δ - неговият периметър, т.е дължината на $\gamma = \partial\Delta$. Ще използваме следните елементарни планиметрични факти:

1. $d(\Delta) < P_\Delta$;

2. Ако $\Delta^k, k = 1,2.3,4$ са триъгълниците на които Δ се разделя от средните си отсечки, то $P_{\Delta^k} = \frac{1}{2} P_\Delta,\ k = 1,2,3,4$.

За определеност ще считаме, че $\gamma = \partial\Delta$ е положително ориентирана. Тъй като D е едносвързана област и $\gamma = \partial\Delta$ е затворена жорданова крива, то $\Delta \subset D$.

Нека $\alpha = \int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz$. Прекарваме средните отсечки на Δ и го разделяме на четири триъгълника $\Delta^k, k = 1,2.3,4$. Ориентирайки ги положително имаме (фиг.8.1)



фиг.8.1

$$\alpha = \int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int\limits_{\partial\Delta^k} f(z)dz .$$

Оттук и от неравенството на триъгълника следва

$$|\alpha| \le \sum_{k=1}^{4} \left| \int\limits_{\partial\Delta^k} f(z)dz \right| .$$

Тогава съществува k, така че

$$\left| \int\limits_{\partial\Delta^k} f(z)dz \right| \ge \frac{1}{4} |\alpha| .$$

Избираме един триъгълник, за който това неравенство е изпълнено и го означаваме с Δ_1. Повтаряме същата конструкция с триъгълника Δ_1 и получаваме триъгълник Δ_2, за който

$$\left| \int\limits_{\partial\Delta_2} f(z)dz \right| \ge \frac{1}{4} \left| \int\limits_{\partial\Delta_1} f(z)dz \right| \ge \frac{1}{4^2} |\alpha| .$$

Продължавайки по същият начин, получаваме редица от триъгълници $\Delta_n, n = 1,2,\dots$, такива че:

$$\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots,$$

(8.1) $$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \geq \frac{1}{4^n} |\alpha|$$

и

(8.2) $$d(\Delta_n) < P_{\Delta_n} = \frac{1}{2^n} P_\Delta \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

Така получихме редица $\Delta_n, n = 1,2,\ldots$ от компактни множества, вложени едно в друго, чиито диаметри клонят към нула. От теоремата на Кантор (вж.Лекция 2,Т.2.5) следва, че съществува единствена точка $z_0 \in D$, така че $z_0 \in \Delta_n$ за всяко n. Тъй като $f(z)$ е холоморфна в z_0, то

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0),$$

където $\lim_{z\to z_0} \alpha(z) = 0$. Тогава, предвид $\int_{\partial\Delta_n} 1.dz = \int_{\partial\Delta_n} (z - z_0)dz = 0$, имаме:

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0)dz .$$

Условието $\lim_{z\to z_0} \alpha(z) = 0$ означава, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че $|\alpha(z)| < \varepsilon$ за всяко $z \in D$, за което $|z - z_0| < \delta$. Също така, понеже $d(\Delta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ съществува индекс n_0, така че $\Delta_n \subset K(z_0,\delta)$, за всяко $n > n_0$. Накрая от стандартната оценка на интеграла по крива и от (8.2) получаваме:

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)dz \right| \leq \int_{\partial\Delta_n} |\alpha(z)||z - z_0||dz| \leq \varepsilon d(\Delta_n) P_{\Delta_n} < \varepsilon P_{\Delta_n}^2 = \varepsilon \frac{P_\Delta^2}{4^n}, \; n > n_0 .$$

От тук и от (8.1) следва $|\alpha| < \varepsilon P_\Delta^2$. Тъй като $\varepsilon > 0$ е произволно, това е възможно, само ако $\alpha = 0$. С това теоремата е доказана.■

Забележка 8.1. Коши формулира теоремата си в 1825 г. и я доказва за правоъгълен контур, допълнително предполагайки, че производната на f е непрекъсната. Доста по-късно, Гурса (1899 г) и Прингсхейм(1901) публикуват доказателства, в които това ограничение отпада. Тук изложихме тяхното доказателство.

Непосредствено от теоремата на Коши (Т.8.4) и теоремата на Лайбниц-Нютон (Т.7.2) получаваме следните еквивалентни формулировки на теоремата на Коши:

Теорема 8.5. (Коши) Ако $D \subseteq \mathbb{C}$ е едносвързана област, то

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f ,$$

за всеки две криви $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ с общи начало и край, и всяка холоморфна в D функция.

Теорема 8.6. (Коши) Ако $D \subseteq \mathbb{C}$ е едносвързана област, то всяка холоморфна в D функция има примитивна.

В частност в сила е:

Следствие 8.1. Във всяка едносвързана област, не съдържаща нулата може да се отдели еднозначен клон на $\log z$.

Доказателство. Функцията $f(z) = \dfrac{1}{z}$ е холоморфна в D и значи има примитивна, т.е. съществува функция $F(z)$, холоморфна в D, такава че $F'(z) = f(z), z \in D$. Тогава функцията $ze^{-F(z)}$ е холоморфна в D и

$$\left(ze^{-F(z)}\right)' = e^{-F(z)} - zF'(z)e^{-F(z)} = e^{-F(z)} - e^{-F(z)} = 0 .$$

Следователно $ze^{-F(z)} \equiv const = e^c \neq 0, z \in D \Leftrightarrow e^{F(z)+c} = z, z \in D$. Това означава, че $F(z)+c$ е един еднозначен клон на $\log z$ в D. Така, ако $z_0 \in D$ е фиксирана точка, и $\log z$ е еднозначен клон на логаритъма, то

$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \log z - \log z_0 ,$$

за всяко $z \in D$. ■

Ще използваме и следната по-практична версия на теоремата на Коши:

Теорема 8.7. Ако γ затворена жорданова крива, то

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 ,$$

за всяка холоморфна в околност на $\gamma \cup int\gamma$ функция f.

Забележка 8.2. Теоремата остава в сила и при по-слаби предположения за f: холоморфност в $int\gamma$ и непрекъснатост върху γ.

Задачи

8.1. Нека γ е частично гладка затворена жорданова крива с вътрешност $\operatorname{int}\gamma = D$ и $f \in C^1(\overline{D})$. Да се докаже, че

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2i\iint_{D} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy.$$

8.2. Да се докаже, че основната теорема на Коши-Гурса не е вярна, ако условието $D \subset \mathbb{C}$ заменим с $D \subset \overline{\mathbb{C}}$.

8.3. Да се докаже, че ако $D \subset \mathbb{C}$ е едносвързана област и u е хармонична функция в D, то съществува холоморфна в D функция f, така че $\operatorname{Re} f = u$.

Упътване. Ако такава функция f съществува, то производната ѝ $f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y$ е напълно определена от u.

Лекция 9
Теорема на Коши за сложен контур. Формула на Коши. Безкрайна диференцируемост на холоморфните функции

Теоремата на Коши не е вярна, ако областта не е едносвързана. Така например функцията $f(z)=\dfrac{1}{z}$ е холоморфна в областта $D=\left\{z:\dfrac{1}{2}<|z|<2\right\}$, но (вж. Примери 7.1. (1)) $\int\limits_{|z|=1} f(z)dz=2\pi i\neq 0$. В тази лекция ще изложим обобщение на теоремата на Коши за един клас от не едносвързани области.

Теорема на Коши за сложен контур. Формула на Коши

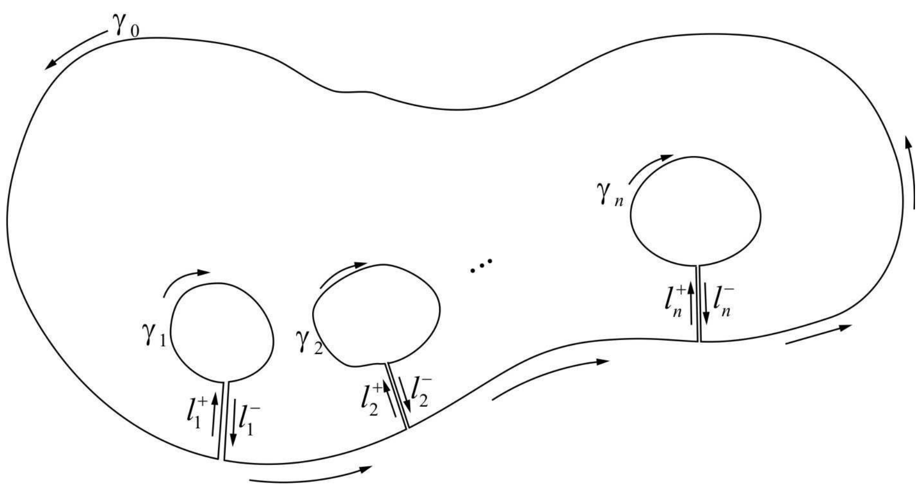
Дефиниция 9.1. Областта $D\subset\mathbb{C}$ се нарича крайно-свързана ако $\overline{\mathbb{C}}\setminus D$ има краен брой свързани компоненти.

Теорема 9.1. (Коши, за сложен контур). Нека $D\subset\mathbb{C}$ е ограничена, крайно-свързана област, чиято граница е съставена от краен брой непресичащи се затворени жорданови криви. Тогава

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz=0\,,$$

за всяка холоморфна в околност на $\overline{D}$ функция f.

Идея за доказателство.



фиг.9.1

Нека контурът (границата) на D е съставен от непресичащите се затворени жорданови криви $\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_n$, като за определеност, нека γ_0 отделя D от безкрайната точка и съдържа във вътрешността си $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$. В D

прекарваме краен брой „разрези” $l_1^{\pm}, l_2^{\pm}, \dots, l_n^{\pm}$, свързващи γ_0, съответно с $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (фиг.9.1), така че кривата $\Gamma = \partial D \cup l_1^{\pm} \cup l_2^{\pm} \cup \dots \cup l_n^{\pm}$ да е затворена и жорданова. Тогава от теоремата на Коши (Теорема 8.7) имаме

$$0 = \int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \left[\int_{l_k^+} f(z)dz + \int_{l_k^-} f(z)dz \right] = \int_{\partial D} f(z)dz \, ,$$

защото интегралите по l_k^+ и l_k^- се унищожават.■

Това обобщение на теоремата на Коши ни дава възможност да пресмятаме интеграли по криви, заграждащи области, в които подинтегралната функция има краен брой особени точки (т.е. точки, в които подинтегралната функция не е холоморфна).

Пример 9.1. Нека γ е затворена жорданова крива и $z_0 \in int\gamma$. Тогава

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \, .$$

Действително съществува $r > 0$, така че кръгът $|z - z_0| \le r$ се съдържа във вътрешността на γ и функцията $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ е холоморфна в двусвързаната област, оградена от γ и окръжността $C = \{z : |z - z_0 = r\}$. Следователно

$$0 = \int_{\gamma \cup C^-} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{C^-} \frac{dz}{z - z_0}$$

Тогава

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = -\int_{C^-} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{C} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$$ (вж. Примери 7.1.(1)).

Сега ще изведем интегралната формула на Коши, която всъщност е обобщение на този пример.

Теорема 9.2. (**Формула на Коши**) Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена, крайно-свързана област, чиято граница е съставена от краен брой непресичащи се затворени жорданови криви. Тогава

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \, ,$$

за всяка холоморфна в околност на $\overline{D}$ функция f и всяко $z \in D$.

Доказателство. За всяко $z \in D$ съществува $r > 0$, така че кръгът $\overline{K(z,r)} = |z - z_0| \le r$ се съдържа в D и нека $C_r = \{z : |z - z_0| = r\}$. Функцията $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ е холоморфна в околност на ограничената, крайно-свързана област $D_r = D \setminus \overline{K(z,r)}$ и от теоремата на Коши за сложен контур следва

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta ,$$

откъдето получаваме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

В частност оттук следва, че интегралът в дясната част на равенството не зависи от r. Ще покажем, че стойността му е $f(z)$. Имаме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta ,$$

защото

$$\int_{C_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i .$$

Тъй като f е непрекъсната в $z \in D$, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$, за всяко $\zeta \in D$, за което $|\zeta - z| < \delta$. Тогава при $r < \delta$, предвид оценката на интеграла, получаваме

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{C_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \frac{\varepsilon}{2\pi r} 2\pi r = \varepsilon .$$

С това теоремата е доказана.■

Забележки 9.1.

(1) При условията на доказаната теорема

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D} \end{cases}$$

Функцията $\dfrac{1}{\zeta - z}$ се нарича ядро на Коши.

(2) Формулата на Коши изразява стойностите на f в D чрез стойностите, които тя приема върху границата на D. С други думи холоморфната в околност на ограничена област функция напълно се определя от стойностите, които тя приема върху границата на областта. Този резултат няма аналог за функции на реална променлива.
(3) Условието D да е ограничена област е съществено – вж. зад.9.2.

Следствие 9.1. Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и γ е затворена жорданова крива, такава че $int\gamma \subset D$. Тогава

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

за всяка холоморфна в D функция f и всяко $z \in int\gamma$.

Следствие 9.2. (Теорема за средното) Ако $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и f е холоморфна в D, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt ,$$

за всяко $z \in D$ и всяко $0 < r < dist(z, \partial D)$.

Доказателство. От Следствие 9.1 приложено за окръжността $C(z,r) = \{\zeta : \zeta = z + re^{it}, t \in [0,2\pi]\}$ имаме

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt . \blacksquare$$

Безкрайна диференцируемост на холоморфните функции. Теорема на Морера

От интегралната формула на Коши следват три изключително важни свойства на холоморфните функции, които нямат аналог в реалния анализ:

● Всяка холоморфна функция е безкрайно диференцируема;
● Всяка холоморфна функция се развива в ред на Тейлър в околност на всяка точка, в която е холоморфна (вж Лекция 11,Т.11.1**);**
● Всяка холоморфна функция се развива в ред на Лоран в околност на изолирана особена точка (вж. Лекция 13, Т.13.2).

Сега ще докажем първото от тях, а именно:

Теорема 9.3. Ако f е холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$, то f има производни от произволен ред във всяка точка на областта. Нещо повече, ако $\gamma \subset D$ е затворена жорданова крива, такава че $int\gamma \subset D$, то

(9.1) $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta,\ n = 1,2,\dots,$$

за всяко $z \in int\gamma$.

Доказателство. Нека $h \in \mathbb{C}$ е такова, че $z + h \in int\gamma$. Тогава

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \text{ и } f(z+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - h}d\zeta.$$

Следователно за $h \neq 0$

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i h}\int_\gamma \left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z}\right) f(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}d\zeta$$

и

$$\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right) f(\zeta)d\zeta\right|$$

$$= \frac{|h|}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}d\zeta\right|.$$

Нека сега $d = dist(z,\gamma) > 0$ и $|h| < \frac{d}{2}$. Тогава за всяко $\zeta \in \gamma$ имаме $|\zeta - z| \geq d, |\zeta - z - h| \geq |\zeta - z| - |h| > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$. Освен това, тъй като f е непрекъсната върху γ, тя е ограничена, т.е. $|f(\zeta)| \leq M,\ \zeta \in \gamma$. Така

$$\frac{|h|}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2}d\zeta\right| \leq \frac{|h|}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z - h||\zeta - z|^2}|d\zeta|$$

$$\leq \frac{|h|}{2\pi}\frac{2M}{d^3}l(\gamma) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Следователно

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta .$$

Оттук по аналогичен начин получаваме

$$\frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\{2(\zeta - z) - h\} f(\zeta)}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z - h)^2} d\zeta ,$$

откъдето, както по-горе се доказва, че

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta .$$

и т.н. С разсъждения по индукция се доказва, че $f^{(n)}$ съществува за всяко естествено n и е в сила (9.1). Тъй като f е холоморфна в D и всяка точка $z \in D$ може да се загради с окръжност $\gamma \subset D$, такава че $int\gamma \subset D$, то $f(z)$ е безкрайно диференцируема за всяко $z \in D$.■

Забележка 9.3. Връщайки се към доказателството на теоремата виждаме, че в него освен формулата на Коши се използва само непрекъснатостта на f . Това означава, че всъщност е в сила следното по- общо твърдение:

Нека $\gamma \subset \mathbb{C}$ е крива и $\varphi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функция. Дефинираме функцията $F : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$, ще я наречем интеграл от типа на Коши, чрез

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

Тогава F е безкрайно диференцируема в $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ и

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta ,$$

за всяко $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ и всяко естествено число n . Освен това $F(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$.

Следствие 9.3. Ако $f = u + iv$ е холоморфна в областта D , то u и v имат непрекъснати частни производни в D от произволен ред. В частност, хармоничните функции са безкрайно диференцируеми (вж. зад.8.3 от Лекция 8).

Доказателство. Имаме $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$. Тъй като f' е холоморфна, то $f''(z) = u_{xx} + iv_{xx} = (v_x)_y - i(u_x)_y = (v_y)_x - i(u_y)_x$. Продължавайки заключаваме, че u и v имат непрекъснати частни производни от произволен ред, във всяка точка, в която $f = u + iv$ е холоморфна.■

Следствие 9.4. Ако една непрекъсната функция f има примитивна F в областта D, то тя е холоморфна в D.

Доказателство. Тъй като F е холоморфна в D, то тя е безкрайно диференцируема в D. В частност F' е диференцируема във всяка точка на D, т.е. F' е холоморфна в D. Но $F' = f$. Следователно f е холоморфна в D.■

Теоремата на Коши ни казва, че ако една функция е холоморфна в едносвързана област, то интегралът от нея по всяка затворена крива е нула. Сега ще се убедим, че и обратното е вярно.

Теорема 9.4. (Теорема на Морера) Ако $f : D \to \mathbb{C}$ е непрекъсната в областта D и

$$\int_\gamma f = 0$$

за всяка затворена крива $\gamma \subset D$, то f е холоморфна в D.

Доказателство. От условието следва, че f има примитивна в D. Така от Следствие 9.4 получаваме, че f е холоморфна в D.■

Задачи

9.1. Нека γ е затворена Жорданова крива и $f(z)$ е функция холоморфна в околност на $\gamma \cup int\gamma$. Да се докаже, че

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

за всяко $z_0 \notin \gamma$.

9.2. Нека $D \subset \overline{\mathbb{C}}, \infty \in D$ е крайно-свързана област, чиято граница е съставена от краен брой непресичащи се затворени жорданови криви. Тогава

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + f(\infty)$$

за всяка холоморфна в околност на $\overline{D}$ функция f и всяко $z \in D$.

9.3. (Формула на Ермит) Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена, крайно-свързана област, чиято граница е съставена от краен брой непресичащи се затворени жорданови криви, $f(z)$ е функция холоморфна в околност на $\overline{D}$, $z_k \in D, k = 1, 2, \ldots, n$ и $\omega_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$. Да се докаже, че

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\omega_n(\zeta)}\frac{\omega_n(\zeta)-\omega_n(z)}{\zeta-z}d\zeta$$

е полином от степен най много $n-1$ и $P(z_k)=f(z_k), k=1,2,\dots,n$.

9.4. (Формула на Шварц) Нека $f(z)$ е функция холоморфна в околност на единичния кръг $U=\{|z|<1\}$. Да се докаже, че

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\operatorname{Re}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt$$

за всяко $z\in U$.

Упътване. От теоремата и от формулата на Коши следва, че за всяко $z\in U$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-\frac{1}{\overline{z}}}\right)d\zeta\ .$$

9.5. Нека $D\subseteq\mathbb{C}$ е област, $\gamma\subset\mathbb{C}$ е крива и $f(z,\zeta):D\times\gamma\to\mathbb{C}$ е непрекъсната функция, която при фиксирано $\zeta\in\gamma$ е холоморфна за всяко $z\in D$. Да се докаже, че функцията $F(z)=\int_\gamma f(z,\zeta)d\zeta$ е холоморфна в D и $F'(z)=\int_\gamma f_z(z,\zeta)d\zeta$, където $f_z(z,\zeta)$ е производната на f по z при фиксирано $\zeta\in\gamma$.

Упътване. Използвайте теоремата на Фубини.

Лекция 10
Редици и редове от холоморфни функции.
Теорема на Вайерщрас

В тази лекция ще използваме формулата на Коши за да определим:

● Кога границата на сходяща редица, или ред от холоморфни функции е холоморфна функция?

● Кога производната на границата е граница на производните на членовете на редицата или реда?

●Кога интегралът от границата е граница на интегралите от членовете на редицата или реда?

Ще започнем с някои основни понятия и дефиниции.

Равномерна сходимост на редици и редове от функции

Дефиниция 10.1. Една редица от функции $f_n : M \to \mathbb{C}$, $n = 1,2\ldots$, дефинирани в произволно множество $M \subseteq \mathbb{C}$, се нарича поточково сходяща в M към функцията f, ако за всяко $\varepsilon > 0$ и за всяко $z \in M$ съществува число $\nu = \nu(z,\varepsilon)$, така че $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, за всяко $n > \nu$. Ще бележим поточковата сходимост с $f_n \to f$.

Поточковата сходимост на редицата $\{f_n\}$ е еквивалентна на това, числовата редица $\{f_n(z)\}$ да е сходяща за всяко $z \in M$. Тогава граничната функция f се дефинира с равенството $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), z \in M$. От реалния анализ е известно, че поточковата сходимост не запазва свойствата на функциите от редицата и има още редица недостатъци. Така например границата на поточково сходяща редица от непрекъснати функции може да не е непрекъсната функция. Ето защо се въвежда по-силен тип сходимост, т.н. равномерна сходимост.

Дефиниция 10.2. Една редица от функции $f_n : M \to \mathbb{C}$ $n = 1,2\ldots$ дефинирани в произволно множество $M \subseteq \mathbb{C}$ се нарича равномерно сходяща в M към функцията f, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $\nu = \nu(\varepsilon)$, така че $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, за всяко $n > \nu$ и за всяко $z \in M$. Ще бележим равномерната сходимост с $f_n \rightrightarrows f$.

Очевидно, от равномерна сходимост следва поточкова сходимост. Разликата между двата типа сходимост е, че при поточковата сходимост за дадено $\varepsilon > 0$, съответното число ν може да се мени от точка в точка, докато при равномерната сходимост съществува число ν, което върши работа за всички точки от множеството. Равномерната сходимост зависи не само от функциите, но и от множеството. Така една редица от функции може да е само поточково сходяща върху цялото множество, а върху негово подмножество да е равномерно сходяща. Ще илюстрираме това със следния:

Пример 10.1. Нека $f_n(z)=\dfrac{1}{nz}, n=1,2\dots$ и $M=\{z:0<|z|<1\}$. Очевидно $f_n(z)\to 0$ за всяко $z\in M$. За $\varepsilon>0$, неравенството $|f_n(z)-0|=\dfrac{1}{n|z|}<\varepsilon$ е изпълнено само при $n>\nu=\dfrac{1}{\varepsilon|z|}$ и при фиксирано n то не е изпълнено за никое z от кръга $|z|<\dfrac{1}{\varepsilon n}$. Така, че тази редица не е равномерно сходяща в M. Но, ако фиксираме $\varepsilon_0>0$, заменим M с подмножеството $M_0=\{z:\varepsilon_0<|z|<1\}$ и изберем $\nu=\dfrac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}$,то за всяко $n>\nu$ и всяко $z\in M_0$ имаме

$$|f_n(z)|=\frac{1}{n|z|}<\frac{1}{\nu|z|}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{|z|}<\varepsilon\ .$$

Следователно $f_n\rightrightarrows 0$ в M_0.

Дефиниция 10.3. Нека $u_n:M\to\mathbb{C}\ \ n=1,2\dots$ е редица от функции дефинирани в произволно множество $M\subseteq\mathbb{C}$. Функционният ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ е поточково, съответно равномерно сходящ в M, ако редицата $S_n(z)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(z)$ от парциалните му суми е поточково, съответно равномерно сходяща в M.

За нашите цели обикновено ще бъде достатъчно редицата (или редът), да е равномерно сходяща не върху цялото множество, а само локално. Следният тип сходимост се оказва много полезна в комплексния анализ.

Дефиниция 10.4. Редицата $f_n:M\to\mathbb{C}\ \ n=1,2\dots$ се нарича локално равномерно сходяща в M, ако за всяко $z\in M$ съществува околност $K(z,r)$, така че $\{f_n\}$ е равномерно сходяща в $K(z,r)\cap M$.

Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ се нарича локално равномерно сходящ в M, ако редицата от парциалните му суми е локално равномерно сходяща в M.

Ясно е, че ако една редица е равномерно сходяща във всяко от краен брой множества тя е равномерно сходяща и в тяхното обединение. Оттук, предвид теоремата на Хайне-Борел (вж. Лекция 2, Т.2.4), непосредствено получаваме:

Твърдение 10.1. Ако редицата $\{f_n\}$ е локално равномерно сходяща в M, то тя е равномерно сходяща върху всеки компакт $K\subset M$.

Ако $M \subset \mathbb{C}$ е отворено множество е вярно и обратното, защото за всяка точка $z \in M$ съществува затворен кръг (компакт) с център z, който се съдържа в M.

Ясно е също така, че ако една редица е равномерно сходяща, тя е и локално равномерно сходяща. Обратното не е вярно.

Пример 10.2. Редицата $f_n(z) = z^n, n = 1, 2\dots$ не е равномерно сходяща в единичния кръг $|z| < 1$, но тя е локално равномерно сходяща в него, защото за всяко $0 < r < 1$, $f_n \rightrightarrows 0$ в кръга $|z| < r$.

Ще приведем няколко резултата, които ще са ни необходими по-нататък. Доказателства на повечето от тях няма да излагаме, тъй като те са аналогични на реалния случай.

Теорема 10.1. (Критерий на Вайерщрас) Нека $u_n : M \to \mathbb{C}$ $n = 1, 2\dots$ е редица от функции дефинирани в произволно множество $M \subseteq \mathbb{C}$. Ако съществува редица от реални числа $\lambda_n \geq 0$, такива че

$$|u_n(z)| \leq \lambda_n, n = 1, 2\dots \text{ за всяко } z \in M \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty,$$

то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ е равномерно сходящ в M.

Следствие 10.1. Всеки степенен ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ с ненулев радиус на сходимост R е равномерно сходящ върху компактните подмножества на кръга си на сходимост.

Доказателство. Тъй като всяко компактно подмножество на кръга $|z| < R$ се съдържа в кръга $|z| < r$, за някое $0 < r < R$, достатъчно е да покажем равномерна сходимост във всеки кръг $|z| < r < R$. Действително степенният ред е абсолютно сходящ в $|z| < R$ и значи е сходящ числовият ред $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Тъй като той мажорира степенния ред в $|z| < r$, то твърдението следва от критерия на Вайерщрас.■

Теорема 10.2. Нека $f_n \rightrightarrows f$ локално равномерно в $M \subset \mathbb{C}$ и f_n са непрекъснати функции в M. Тогава функцията f е също непрекъсната в M.

Следствие 10.2. Сумата на всеки локално равномерно сходящ ред от непрекъснати функции е също непрекъсната функция.

Теорема 10.3. (Граничен преход под знака на интеграла) Нека $\gamma \subset \mathbb{C}$ е ректифицируема крива и $f_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$ е редица от непрекъснати функции. Ако $f_n \rightrightarrows f$ върху γ^*, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz \ .$$

Доказателство. От Т.10.2 следва, че f е непрекъсната върху γ^* и значи е интегруема. Тъй като $f_n \rightrightarrows f$ върху γ^*, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu = \nu(\varepsilon)$, така че $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, за всяко $n > \nu$ и за всяко $z \in \gamma^*$. Сега твърдението следва непосредствено от оценката

$$\left|\int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right| \le \int_\gamma |f_n(z) - f(z)||dz| < \varepsilon l(\gamma), n > \nu \ .\blacksquare$$

Следствие 10.3. (Почленно интегриране на редове) Нека $\gamma \subset \mathbb{C}$ е ректифицируема крива и $u_n : \gamma^* \to \mathbb{C}$ $n = 1,2\ldots$, е редица от непрекъснати функции. Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ е равномерно сходящ върху γ^*, то

$$\int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma u_n(z)dz \, ,$$

т.е. редът може да се интегрира почленно.

Теорема на Вайерщрас

Теорема 10.4. (Вайерщрас) Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $f_n : D \to \mathbb{C}$ $n = 1,2\ldots$ е редица от функции холоморфни в D. Ако $f_n \rightrightarrows f$ върху компактните подмножества на D, то

(1) f е холоморфна в D;

(2) $f_n^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}$ върху компактните подмножества на D, за всяко $k = 1,2,\ldots$

Доказателство. (1) Достатъчно е да докажем, че f е холоморфна в произволна точка $z_0 \in D$. Съществува кръг $K_0 = K(z_0, \delta)$, така че $\overline{K_0} \subset D$. От равномерната сходимост на $\{f_n\}$ върху $\overline{K_0}$ и от Т.10.2 следва, че f е непрекъсната в K_0. За да докажем, че f е холоморфна в K_0 ще използваме теоремата на Морера. Нека $\gamma \subset K_0$ е произволна затворена крива. Имаме (Т.10.3)

$$\lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz \, .$$

Тъй като f_n е холоморфна в K_0 и K_0 е едносвързана област, то (Т.Коши) за всяко n

$$\int_\gamma f_n(z)dz = 0\,.$$

Тогава и

$$\int_\gamma f(z)dz = 0\ \ .$$

Сега от теоремата на Морера следва, че f е холоморфна в K_0, т.е. тя е холоморфна в z_0.

(2) За да докажем, че редицата от k-тите производни на f_n е равномерно сходяща върху компактните подмножества на D към k-тата производна на f ще използваме формулата на Коши. Достатъчно е (Твърдение.10.1) да покажем, че $f_n^{(k)} \Rightarrow f^{(k)}$ локално равномерно в D. Нека $z_0 \in D$ и $r > 0$ е такова, че $\overline{K(z_0,2r)} \subset D$. Ще докажем, че $f_n^{(k)} \Rightarrow f^{(k)}$ върху $\overline{K(z_0,r)}$.

Нека $k \in \mathbb{N}$, $z \in \overline{K(z_0,r)}$, $\gamma = \partial K(z_0,2r)$ и $\varepsilon > 0$ е произволно. От формулата на Коши имаме:

$$|\, f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\,| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right|.$$

Тъй като $f_n \Rightarrow f$ върху компакта γ^*, то съществува $\nu = \nu(\varepsilon)$ така че $|\, f_n(\zeta) - f(\zeta)\,| < \varepsilon$, за всяко $n > \nu$ и за всяко $\zeta \in \gamma^*$. Освен това $|\,\zeta - z\,| = |\,(\zeta - z_0) - (z - z_0)\,| \geq |\,\zeta - z_0\,| - |\,z - z_0\,| \geq 2r - r = r$ за всяко $\zeta \in \gamma^*$ и всяко $z \in \overline{K(z_0,r)}$. Тогава от стандартната оценка за интеграла следва, че за $n > \nu$

$$|\, f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\,| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_\gamma \frac{|\, f_n(\zeta) - f(\zeta)\,|}{|\,\zeta - z\,|^{k+1}} |\,d\zeta\,| \leq \frac{k!\,4\pi r}{2\pi r^{k+1}} \varepsilon\,,$$

за всяко $z \in \overline{K(z_0,r)}$. С това теоремата е доказана.■

Забележка 10.1. Това е забележителен резултат, който не е верен за функции на реална променлива: равномерната граница на редица от безкрайно диференцируеми реалнозначни функции може да не е диференцируема. Така например според класическата теорема на Вайерщрас всяка непрекъсната реалнозначна функция в интервала $[a,b]$ е равномерна граница на редица от полиноми. Освен това дори граничната функция да е диференцируема, редицата от производните може да не клони към нейната производна:

например редицата $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \Rightarrow 0$ равномерно в $\mathbb{R}$, докато редицата $f_n'(x) = \cos nx$ е разходяща за всяко $x \neq 2k\pi$, а при $x = 2k\pi$ е сходяща, но границата и е $1 \neq 0$.

Следствие 10.4. Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $u_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1,2\ldots$ е редица от функции холоморфни в D. Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ е равномерно сходящ върху компактните подмножества на D, то сумата му $S(z)$ е холоморфна в D и

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z),\ z \in D,\ k = 1,2,\ldots,$$

като редът е равномерно сходящ върху компактните подмножества на D.

Задачи

10.1. Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област, $f_n : D \to \mathbb{C}$ $n = 1,2\ldots$ е редица от функции холоморфни в D и $f_n(z) \Rightarrow f(z)$, $f \neq const$ равномерно върху компактните подмножества на D. Да се докаже, че за всяко $a \in D$ съществува индекс n_a и редица $a_n \in D$, $n \geq n_a$, така че $\lim a_n = a$ и $f_n(a_n) = f(a)$.

10.2. Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област, $f : D \to \mathbb{C}$ е функция холоморфна в D и съществува точка $a \in D$, такава че редът $f(a) + f'(a) + f''(a) + \ldots + f^{(n)}(a) + \ldots$ е сходящ. Да се докаже, че $f(z)$ е цяла функция и редът е равномерно сходящ върху компактните подмножества на $\mathbb{C}$.

10.3. Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област, $f_n : D \to \mathbb{C}$ $n = 1,2\ldots$ е редица от функции холоморфни в D, такава че $f_n(z) \to f(z)$, $z \in D$. Да се докаже, че съществува навсякъде гъсто в D отворено множество U, така че $f_n(z) \Rightarrow f(z)$ равномерно върху компактните подмножества на U.

Упътване. Нека V е отворено подмножество на D, такова че $\overline{V} \subset D$ и $S_n = \{z \in \overline{V} : |f_k(z)| \leq n, k = 1,2\ldots\}$. Докажете, че $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \overline{V}$ и използвайте теоремата на Бер за да заключите, че някое S_n съдържа кръг Δ. След това докажете, че $f_n(z) \Rightarrow f(z)$ равномерно върху компактните подмножества на Δ. Множеството U е обединението на всички кръгове $\Delta \subset D$, такива че $f_n(z) \Rightarrow f(z)$ равномерно върху компактните подмножества на Δ.

10.4. Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област, $f_n : D \to \mathbb{C}$ $n = 1,2\ldots$ е редица от функции холоморфни в D и $f_n \Rightarrow f$ върху компактните подмножества на D. Нека F_n е примитивна на f_n, за всяко $n \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че ако съществува $c \in D$ за което редицата $\{F_n(c)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, то редицата $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща върху компактните подмножества на D и границата ѝ F е примитивна на f.

Лекция 11
Развитие на холоморфна функция в ред на Тейлър. Неравенства на Коши за коефициентите. Теорема на Лиувил

Както вече знаем, сумата на всеки степенен ред е холоморфна функция в кръга му на сходимост. В тази лекция ще докажем, че е вярно и обратното: всяка холоморфна в кръг функция се развива в степенен ред сходящ в този кръг.

Ред на Тейлър

Теорема 11.1. Нека функцията $f(z)$ е холоморфна в кръга $K(z_0,R)=\{z:|z-z_0|<R\}$. Тогава за всяко $z\in K(z_0,R)$

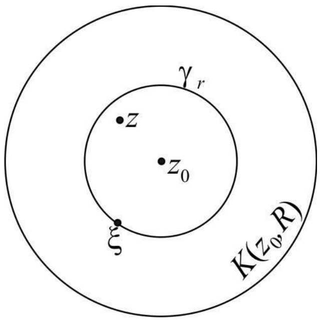
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

с еднозначно определени коефициенти a_n от формулата

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n\geq 0,$$

където $\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho, 0<\rho<R\}$.

Доказателство. Нека $z\in K(z_0,R)$ и $r>0$ е такова,че $|z-z_0|<r<R$. Ще използваме формулата на Коши (фиг.11.1)



фиг.11.1

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

и ще развием ядрото на Коши $\frac{1}{\zeta - z}$ в степенен ред около z_0. Тъй като за $z \in K(z_0, r)$ и $\zeta \in \gamma_r$ имаме (фиг.11.1) $\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$, то

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

При това, за фиксирано $z \in K(z_0, r)$, този ред е равномерно (относно ζ) сходящ върху γ_r (критерий на Вайерщрас). Функцията f е ограничена върху γ_r, бидейки непрекъсната там, и затова редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

е равномерно сходящ върху γ_r към $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Тогава можем да интегрираме този ред почленно и получаваме

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\right)(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^r (z - z_0)^n,$$

където

$$a_n^r = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \; n = 0, 1, \ldots$$

Тъй като функцията $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ е холоморфна в околност на венеца заграден от γ_r и γ_ρ, за всяко $0 < \rho < R$, то от теоремата на Коши за сложен контур следва, че $a_n^r = a_n^\rho$, т.е. коефициентите $a_n^r := a_n$ не зависят от r. Освен това, от формулата на Коши за производните имаме $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n \geq 0$.

Така получихме разлагането на холоморфната в $K(z_0, R)$ функция f в степенен ред (ред на Тейлър). Тъй като точката $z \in K(z_0, R)$ бе произволно избрана, той е сходящ в $K(z_0, R)$, т.е. неговият радиус на сходимост е поне R. Освен това (както всеки степенен ред) редът на Тейлър е абсолютно и равномерно сходящ върху компактните подмножества на $K(z_0, R)$.■

Следствие 11.1. Нека $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна в областта $D \subseteq \mathbb{C}$. Тогава f се развива в ред на Тейлър около всяка точка $z_o \in D$, сходящ в кръга $K(z_0, R)$, където $R = dist(z_0, \partial D)$, т.е локално f се представя от реда си на Тейлър.

Забележки 11.1.

(1) Тъй като степенните редове са безкрайно диференцируеми, то Т.11.1 ни дава друго доказателство, че холоморфните функции са безкрайно диференцируеми и за производните им е в сила формулата на Коши.

(2) Следствие 11.1 ни дава друг метод за определяне на радиуса на сходимост на един степенен ред: той е равен на разстоянието до най-близката точка, в която сумата на реда не е холоморфна**.**

(3) За функции на реална променлива Т.11.1 не вярна. Например функцията

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

е безкрайно диференцируема в $\mathbb{R}$, редът ѝ на Тейлър около 0 е сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$ ($f^{(n)}(0) = 0, n \geq 0$), но представя функцията само в нулата.

Неравенства на Коши за коефициентите. Теорема на Лиувил

Теорема 11.2. (Неравенства на Коши) Нека функцията $f(z)$ е холоморфна в кръга $K(z_0, R)$ и $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, n \geq 0$ е редът ѝ на Тейлър. Тогава за всяко r, $0 < r < R$

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, n = 0,1,\dots,$$

където $M(r) = max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_r\}$.

Доказателство. От формулата за коефициентите и стандартната оценка за модула на интеграла имаме:

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n}, n = 0,1,\dots \blacksquare$$

Теорема 11.3. (Теорема на Лиувил) Ако функцията f е цяла и ограничена, то тя е константа.

Доказателство. Тъй като f е цяла, то (Следствие 11.1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ за всяко $z\in\mathbb{C}$. Нека $|f(z)|\le M, z\in\mathbb{C}$. От неравенствата на Коши имаме

$$|a_n|\le\frac{M}{r^n},\ n=0,1,\dots$$

за всяко $r>0$. Оттук при $r\to\infty$ получаваме, че $a_n=0, n=1,2,\dots$ Следователно $f(z)=a_0=const$, $z\in\mathbb{C}$.■

Като следствие от теоремата на Лиувил ще получим едно елегантно доказателство на основната теорема на алгебрата.

Следствие 11.2. (Основна теорема на алгебрата) Всеки неконстантен полином с комплексни коефициенти има комплексна нула.

Доказателство. Да допуснем противното и нека $P(z)$ е неконстантен полином, който няма нули в $\mathbb{C}$, т.е. $P(z)\ne 0$, $z\in\mathbb{C}$. Тогава функцията $f(z)=\dfrac{1}{P(z)}$ е цяла и $\lim\limits_{|z|\to\infty}|f(z)|=0$. Това означава, че съществува R_0, така че $|f(z)|<1$ за $|z|>R_0$. От друга страна, тъй като f е непрекъсната, то съществува константа M_0, така че $|f(z)|\le M_0$ за $|z|\le R_0$. Тогава $|f(z)|\le M_0+1$, $z\in\mathbb{C}$ и от теоремата на Лиувил следва, че $f(z)$, а значи и $P(z)$ е константа. Това противоречи на предположението, че $P(z)$ е неконстантен полином и доказва теоремата.■

Ще завършим лекцията с една теорема, съдържаща вече изложени резултати, в която са събрани три еквивалентни характеристики на това една функция да е холоморфна в точката $z\in\mathbb{C}$.

Теорема 11.4. Нека $f(z)$ е дефинирана в околност U на z_0. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) (Коши-Риман) f е $\mathbb{C}$-диференцируема в U;

(2) (Коши) f е непрекъсната в U и $\int_\gamma f=0$ за всяка затворена крива $\gamma\subset U$;

(3) (Вайерщрас) f се развива в степенен ред около z_0, сходящ в U.

Доказателство.
(1)$\Rightarrow$(2):теорема на Коши (Лекция 8);
(2)$\Rightarrow$(1):теорема на Морера (Лекция 9);
(1)$\Rightarrow$(3):теорема за развитие в ред на Тейлър (Лекция11);
(3)$\Rightarrow$(1): теорема за диференциране на степенни редове (Лекция 5).■

В зависимост от това кое от тези три твърдения се положи в основата (т.е. се приеме за дефиниция), в историческото развитие на комплексния анализ са се утвърдили три подхода в построяването на теорията на холоморфните функции. Прието е функциите удовлетворяващи условието (1) да се наричат холоморфни в смисъл на Риман, условието (2) - в смисъл на Коши и условието (3) – в смисъл на Вайерщрас.

Забележка 11.2. Списъкът в Т.11.4 с еквивалентни твърдения може без затруднение да бъде разширен. Ние сме включили само най-важните и исторически значими характеристики на понятието „холоморфност”. Сред разнообразието от характеристики на това понятие, безспорно най-важна роля в историческото развитие на комплексния анализ е изиграла еквивалентността на „комплексна диференцируемост” и „локално представяне чрез степенен ред”. Ако в основата положим концепцията за диференцируемост, говорим за подход на Коши-Риман, ако тръгнем от степенните редове, говорим за подход на Вайерщрас. В нашия курс по комплексен анализ ние следваме подхода на Коши-Риман. За нас той е по-естествен. Изборът ни е повлиян и от това, че той е най близък до начина, по който обикновено се излага диференциалното и интегрално смятане на функциите на реална променлива. Това ни позволява да въведем основните понятия за граница, диференцируемост и интегруемост като естествено разширение на съответните им понятия в реалния случай. и опирайки се на съответните резултати, по-бързо да достигнем до сърцевината на комплексния анализ, там където са съществените разлики със ситуацията в реалния случай.

Задачи

11.1. Нека функцията $f(z)$ е холоморфна в кръга $K(z_0,R)=\{z:|z-z_0|<R\}$ и

$$R_n(z)=f(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}(z-z_0)^k .$$

Да се докаже,че

а)

$$R_n(z)=\frac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta ,$$

за всяко $z\in K(z_0,r), r<R$, където $\gamma_r=\partial K(z_0,r)$;

б)

$$|R_n(z)|\leq\frac{M(r)r}{r-\rho}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1}$$

за всяко $z\in\overline{K(z_0,\rho)}, \rho<r$, където $M(r)=max\{|f(\zeta)|:\zeta\in\gamma_r\}$.

11.2. Нека $f(z)$ и $g(z)$ са функции холоморфни в околност на $z_0\in\mathbb{C}$ и $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(n-1)}(z_0)=0, g(z_0)=g'(z_0)=\cdots=g^{(n-1)}=0, g^{(n)}(z_0)\neq 0, n\in\mathbb{N}$. Да се докаже, че

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)}.$$

11.3. Нека $f(z)$ е цяла функция, за която съществуват константи $M, R>0$ и естествено число m, такива че $\left|f(z)\right|\le M\,|z|^m$ при $\left|z\right|>R$. Да се докаже, че $f(z)$ е полином от степен ненадминаваща m.

11.4. Нека функцията $f(z)$ е холоморфна в кръга $K(z_0,R)=\{z:|z-z_0|<R\}$ и

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

е развитието ѝ в ред на Тейлър в $K(z_0,R)$. Да се докаже, че за всяко $0<r<R$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\,r^{2k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\,f(z_0+re^{i\varphi})|^2\,d\varphi\le M^2(r),$$

където $M(r)=max\{|\,f(\zeta)|:\zeta\in\gamma_r\}$.

Забележка. В частност оттук следват неравенствата на Коши за коефициентите. При това, ако за някои $n\in\mathbb{N}$ и $0<r<R$, $|a_n|\,r^n=M(r)$ то $f(z)=a_n(z-z_0)^n$.

11.5. Нека $f(z)$ е цяла функция и за всяко $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ е в сила неравенството $\left|f(z)\right|\le\left|\log_0 z\right|$. Да се докаже, че $f(z)\equiv 0$.

11.6. Нека $f(z)$ и $g(z)$ са цели функции , такива че $\operatorname{Re}f(z)\le a\operatorname{Re}g(z), a\in R, z\in\mathbb{C}$.Да се докаже, че $f(z)=ag(z)+b, z\in\mathbb{C}, b\in\mathbb{C}$.

11.7. Нека функцията f е холоморфна в околност на ивицата $S=\{z\in\mathbb{C}:0\le\operatorname{Im}z\le 1\}$, изобразява S в себе си и $f(x)=f(x+i)$ за всяко $x\in\mathbb{R}$. Да се докаже, че f е константа.

Лекция 12
Нули на холоморфни функции. Теорема за единственост

В тази лекция ще използваме развитието в ред на Тейлър за да изучим поведението на една холоморфна функция в околност на нейна нула. Ще видим, че нулите на холоморфните функции могат да се третират подобно на нулите на полиномите.

Теорема за единственост

В Лекция 5 ние видяхме, че ако един степенен ред с положителен радиус на сходимост се анулира в множество от точки, които се сгъстяват към центъра на кръга му на сходимост, то той е тъждествено нула. По-точно доказахме следната

Теорема 5.5. (Теорема за единственост на степенните редове) Ако степенният ред $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ има положителен радиус на сходимост R и точката $z=z_0$ е точка на сгъстяване на множеството $\{z\in K(z_0,R): f(z)=0\}$ от нулите на функцията $f(z)$, то $f(z)\equiv 0, z\in K(z_0,R)$, т.е. $a_n=0,\ n=0,1,2,...$

Тъй като всяка холоморфна в област функция локално се представя от реда си на Тейлър, не е изненадващо, че теоремата за единственост се разширява и за функции холоморфни в област.

Теорема 12.1. (Теорема за единственост на холоморфните функции) Ако f е холоморфна в област $D\subseteq\mathbb{C}$ и множеството $\{z: z\in D, f(z)=0\}$ от нулите на f има точка на сгъстяване в D, то $f(z)\equiv 0, z\in D$.

Доказателство. Нека $z_0\in D$ е точка на сгъстяване на множеството от нулите на $f(z)$ и $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ е развитието ѝ в ред на Тейлър около z_0, сходящ в кръга $K(z_0,R)$, където $R=dist(z_0,\partial D)$. От теоремата за единственост на степенните редове следва, че $f(z)\equiv 0, z\in K(z_0,R)$. Нека $A=\{z\in D: z \text{ е точка на сгъстяване на нули на } f\}$ и $B=D\setminus A$. Ясно е, че $D=A\cup B$ и $A\cap B=\varnothing$. Освен това от предното следва, че за всяко $z_0\in A$ съществува кръг $K(z_0,R)$, в който $f(z)\equiv 0$ и значи $K(z_0,R)\subset A$. Следователно A е отворено множество. Ще покажем, че и B е отворено. Действително, ако $z_1\in B$, то съществува продупчена околност $K'(z_1,\delta)=\{z\in D: 0<|z-z_1|<\delta\}$ на z_1 в която няма нули на f. Следователно $K(z_1,\delta)\subset B$. И така показахме, че $D=A\cup B$, където A и B са непресичащи се отворени множества. Тъй като D е област (свързано множество!), това е възможно само ако или $A=\varnothing$, или $B=\varnothing$. По условие $A\neq\varnothing$. Тогава $B=\varnothing$ и $D=A$, т.е. всяка точка на D е точка на сгъстяване на нули на f. От непрекъснатостта на f следва, че $f(z)\equiv 0, z\in D$.■

Забележки 12.1.

(1) Ако D не е свързано множество, теоремата не е вярна. Например, ако $D = K(0,1) \cup K(3,1)$, функцията $f(z) = \begin{cases} 0, & z \in K(0,1) \\ 1, & z \in K(3,1) \end{cases}$ се анулира в цял кръг, но не е тъждествено нула.
(2) Условието точката на сгъстяване да принадлежи на областта, в която е холоморфна функцията е съществено. Например функцията $f(z) = \sin\dfrac{\pi}{z}$ е холоморфна в $\mathbb{C}\setminus 0$, анулира се в точките $z_n = \dfrac{1}{n}, n = 1,2,\dots$ и $z_n \to 0$, но $f(z)$ не е тъждествено нула. Това е така, защото функцията не е холоморфна в точката на сгъстяване.

Следствие 12.1. (Нулите на холоморфните функции са изолирани точки) Нека $f(z)$ е холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и не е тъждествено нула. Ако $z_0 \in D$ е нула на f, т.е. $f(z_0) = 0$, то съществува продупчена околност $K'(z_0, \delta) \subset D$ на z_0, в която няма нули на f.

Забележка 12.2. Този резултат няма аналог в реалния случай. Например функцията $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ е диференцируема за всяко $x \in \mathbb{R}$, не е тъждествено нула, $f(0) = 0$ и $x = 0$ е точка на сгъстяване на нули на f, защото $f(1/n) = 0$ за всяко $n = 1,2,\dots$

Следствие 12.2. Ако f е холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и съществува $z_0 \in D$, така че $f^{(n)}(z_0) = 0$ за всяко $n = 0,1,\dots$, то $f(z) \equiv 0, z \in D$.

Доказателство. Съществува околност $K(z_0, R)$ на z_0, такава че $K(z_0, R) \subset D$ и $f(z) \equiv 0, z \in K(z_0, R)$, защото всички коефициенти в тейлъровото развитие на f, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $z \in K(z_0, R)$, където $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, са нули. От теоремата за единственост следва, че $f(z) \equiv 0, z \in D$.■

Забележка 12.3. С други думи казано, холоморфните в област функции могат да имат нула от безкраен ред, само ако са тъждествено нула. За разлика от тях, една безкрайно диференцируема в $\mathbb{R}$ функция може да има нула от безкраен ред и да не е тъждествено нула. Например такава е функцията

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Следствие 12.3. (Теорема за идентичност) Нека f и g са функции холоморфни в област $D \subseteq \mathbb{C}$. Ако множеството $\{z : z \in D, f(z) = g(z)\}$ от точките, в които f и g съвпадат, има точка на сгъстяване в D, то $f(z) \equiv g(z), z \in D$.

Доказателство. Следва от теоремата за единственост, защото нулите на функцията $f - g$ имат точка на сгъстяване в D.■

Забележки 12.4.

(1) Теоремата за идентичност е удивителен резултат. Той ни казва, че една холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$ функция е напълно определена чрез стойностите си върху едно „рядко" подмножество на D, например чрез стойностите си в редица от точки, която има точка на сгъстяване в D. Това означава, че не можем да променяме локално функцията, без това да се отрази на поведението ѝ в цялата област.

(2) Тази теорема има редица полезни следствия. Например, чрез нея тъждества отнасящи се за реални числа могат да се обобщят и за комплексни числа. Да илюстрираме това със свойството на показателната функция: $e^w e^z = e^{w+z}$, $w, z \in \mathbb{C}$. Знаем, че това тъждество е в сила за реални стойности на z и w. Първо да фиксираме $x \in \mathbb{R}$ и да дефинираме функциите $f(z) = e^x e^z$ и $g(z) = e^{x+z}$. Тогава f и g са цели функции и стойностите им съвпадат върху реалната ос. От теоремата за идентичност следва, че те съвпадат в цялата равнина, т.е. $e^x e^z = e^{x+z}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ и всяко $z \in \mathbb{C}$. Затова за всяко фиксирано $z \in \mathbb{C}$ целите функции $F(w) = e^w e^z$ и $G(w) = e^{w+z}$ съвпадат за всяко $w \in \mathbb{R}$ и значи съвпадат за всяко $w \in \mathbb{C}$.

По общо, в сила е следното твърдение: Нека $P(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ е полином на n-те променливи $f_k, k = 1,2,\ldots n$, където f_k са функции холоморфни в област D, която съдържа интервала $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Ако за всяко $x \in [a,b]$

$$P(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) = 0$$

то

$$P(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)) = 0$$

за всяко $z \in D$.

(3) Елементарните функции $e^x, \sin x, \cos x$ на реална променлива, могат да се продължат в комплексната равнина по един единствен начин. Това е така, защото, ако $D \subseteq \mathbb{C}$, $D \cap \mathbb{R} \neq \varnothing$ е област, f и g са функции холоморфни в D и $f(z) = g(z), z \in D \cap \mathbb{R}$, то $f(z) \equiv g(z), z \in D$.

Представяне в околност на нула

Нека сега f е функция холоморфна в околност на z_0 и $f(z_0)=0$. Ако $f^{(n)}(z_0)=0$ за всяко $n=1,2,\dots$, то $f(z)\equiv 0$. В противен случай съществува най-малко естествено число m, за което $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

Дефиниция 12.1. Точката z_0 се нарича m-кратна нула на f, ако $f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$, но $f^{(m)}(z_0)\neq 0$. Точката z_0 се нарича проста нула на f, ако $m=1$.

От алгебрата ни е известно, че ако z_0 е m-кратна нула на един полином то $(z-z_0)^m$ е делител на този полином. Аналогична е ситуацията и при холоморфните функции.

Теорема 12.2. Нека f е функция холоморфна в околност на z_0 и z_0 е m-кратна нула на f. Тогава в околност U на z_0 е в сила представянето

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),$$

където $\varphi(z)$ е функция холоморфна и различна от нула в U.

Доказателство. Нека $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ е развитието на f в ред на Тейлър около z_0 с кръг на сходимост $K(z_0,R)$. Тъй като z_0 е m-кратна нула на f, то

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots=(z-z_0)^m(a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots),\ a_m\neq 0$$

Редът $\varphi(z)=a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\cdots$ има същият радиус на сходимост като f и значи сумата му $\varphi(z)$ е функция холоморфна в кръга $K(z_0,R)$. Освен това

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),\ z\in K(z_0,R).$$

Тъй като $\varphi(z)$ е непрекъсната в $K(z_0,R)$ и $\varphi(z_0)=a_m\neq 0$, то съществува околност $U\subseteq K(z_0,R)$ на z_0, така че $\varphi(z)\neq 0$ за всяко $z\in U$.■

Задачи.

12.1. Съществува ли функция $f(z)$ холоморфна в $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ и такава, че за всяко $n=2,3,\dots$:

а) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{i^n}{n}$; б) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2^n}$? Обосновете отговора си.

12.2. Нека $\Omega \subset \mathbb{C}$ е отворено множество и $f(z)$ и $g(z)$ са холоморфни в Ω. Да се докаже, че Ω е област, тогава и само тогава когато от $f(z)g(z)=0,\, z\in\Omega$ следва, че или $f(z)\equiv 0,\, z\in\Omega$ или $g(z)\equiv 0,\, z\in\Omega$.

12.3. Нека f е холоморфна в област $D\subseteq\mathbb{C}$ и за всяко $z\in D$ съществува $n=n(z)$, така че $f^{(n)}(z)=0$. Да се докаже, че $f(z)$ е полином.

12.4. Нека $f(z)$ и $g(z)$ са цели функции и $|f(z)|\le|g(z)|,\, z\in\mathbb{C}$. Да се докаже, че $f(z)=\lambda g(z), |\lambda|\le 1,\, z\in\mathbb{C}$.

Лекция 13
Развитие в ред на Лоран. Теорема на Лоран.

Ние знаем, че всяка функция f холоморфна в точката z_0 се развива в ред на Тейлър около z_0, чийто радиус на сходимост (в повечето случаи) е равен на разстоянието от z_0 до най-близката особена точка на f (т.е. точка в която f не е холоморфна). Затова, когато z_0 се приближава към особената точка, кръгът в който е в сила развитието в ред на Тейлър става все по-малък, като в особената точка то не е валидно. В тази лекция ще изучим развитие в един друг тип степенни редове, които са сходящи в сравнително голямо множество даже когато особените точки на функцията са близко до точката z_0 или съвпадат с нея. Това са степенни редове, които включват както положителни, така и отрицателни степени на променливата. Наричат се редове на Лоран.

Дефиниция 13.1. Ред на Лоран около точката $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича формален ред от вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

където коефициентите $a_n \in \mathbb{C}$ са фиксирани, а z е комплексна променлива.

Редът е сходящ в точката z, ако и двата реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}$ са сходящи и тогава сумата му е равна на сбора от сумите на двата реда.

Теорема 13.1. Областта на сходимост на реда $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ е

$$D = \{ z : r < |z-z_0| \quad u \quad |z-z_0| < R \},$$

където

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad , \qquad r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} .$$

Ако $r \geq R$, то $D = \varnothing$, а ако $r < R$, то $D = V(z_0, r, R) = \{ z : r < |z-z_0| < R \}$ е венец и f е холоморфна в него.

Доказателство. От формулата на Коши-Адамар следва, че редът $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ е сходящ за $|z-z_0| < R$ и аналогично редът

$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n$ е сходящ за $\frac{1}{|z-z_0|}<\frac{1}{r}$, т.е. за $|z-z_0|>r$. Следователно $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ е сходящ в сечението на двете области. Също така, тъй като f_1 и f_2 са степенни редове (f_2 е степенен ред около нулата на променливата $(z-z_0)^{-1}$), то f_1 и f_2 са функции холоморфни в съответните области на сходимост. Следователно f е холоморфна в сечението на тези области.■

Теорема 13.2. (Лоран) Нека $z_0\in\mathbb{C}$ и f е холоморфна във венеца $V=V(z_0,r,R)=\{z:0\le r<|z-z_0|<R\le\infty\}$. Тогава

(13.1) $$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

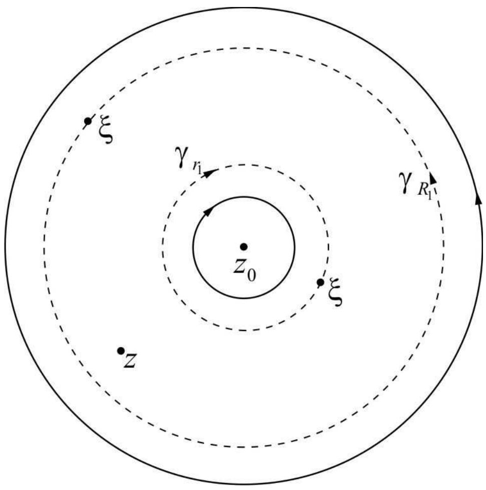
за всяко $z\in V$, като редът е абсолютно сходящ във V, равномерно върху компактните подмножества на V и коефициентите са еднозначно определени от формулата

(13.2) $$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,\pm1,\pm2,\dots,$$

където

$$\gamma_\rho=\{\zeta:|\zeta-z_0|=\rho,\ r<\rho<R\}.$$

Доказателство. Нека $z\in V$ и нека r_1 и R_1 са такива, че $r<r_1<|z-z_0|<R_1<R$. От формулата на Коши имаме (фиг.13.1)



фиг.13.1

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R_1}\cup\gamma_{r_1}^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\ .$$

Процедирайки както в теоремата на Тейлър, за първия интеграл от дясно (на второто равенство) получаваме

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{R_1}(z-z_0)^n\ ,$$

където

$$a_n^{R_1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\ n=0,1,2,\dots\quad .$$

Този ред е абсолютно сходящ в кръга $K(z_0,R_1)$, равномерно върху компактните му подмножества.

Във втория интеграл, тъй като (фиг.13.1)

$$\frac{|\zeta-z_0|}{|z-z_0|}=\frac{r_1}{|z-z_0|}<1 \text{ за всяко } \zeta\in\gamma_{r_1}\ ,$$

геометричният ред

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{z-z_0-(\zeta-z_0)}=\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)}$$

$$=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

е равномерно сходящ върху γ_{r_1}. Функцията f е ограничена върху γ_{r_1} бидейки непрекъсната там, и затова редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$$

е равномерно сходящ върху γ_{r_1} към $-\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$. Следователно можем да интегрираме почленно и получаваме

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_1}}f(\zeta)(\zeta-z_0)^{n-1}d\zeta\right)\frac{1}{(z-z_0)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{r_1}\frac{1}{(z-z_0)^n}\ ,$$

където

$$b_n^{r_1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta \ .$$

Това е степенен ред на $\frac{1}{z-z_0}$, сходящ за $|z-z_0|>r_1$, при това равномерно върху компактните подмножества на $\{z:|z-z_0|>r_1\}$. Доказателството на частта от теоремата, касаеща въпроса за съществуване на развитие на f в лоранов ред, ще бъде завършено, като отбележим следните два факта. Първо, ако $r<\rho<R$ и $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, то от теоремата на Коши за сложен контур следва

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \ ,$$

т.е. $a_n^{R_1} = a_n$ и $b_n^{r_1} = a_{-n}$. Второ, всяко компактно подмножество на V се съдържа във венеца $\{z: r_1<|z-z_0|<R_1\}$ за някои r_1 и R_1, за които $r<r_1<R_1<R$.

Да се заемем сега с въпроса за единственост на развитието. Нека $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ z\in V$. Този ред е равномерно сходящ върху компактните подмножества на V. Тогава, ако k е произволно цяло число и $r<\rho<R$, то

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\zeta-z_0)^{n-k-1}\right]d\zeta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}(\zeta-z_0)^{n-k-1}d\zeta \\ &= c_k,\end{aligned}$$

защото

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}(\zeta-z_0)^{n-k-1}d\zeta = \begin{cases} 1, & \text{ако} \quad n-k-1=-1 \\ 0, & \text{ако} \quad n-k-1\neq -1 \end{cases}.$$

С това теоремата е доказана.■

Редът (13.1) , коефициентите на който се пресмятат по формулата (13.2) се нарича *ред на Лоран на функцията* f около точката z_0. Редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ по неотрицателните степени на $z-z_0$ се нарича *правилна част* на реда на Лоран, а редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ по отрицателните степени на $z-z_0$ - *главна част*. Сумата $f^+(z)$ на първият ред е функция холоморфна в кръга $|z-z_0|<R$,

а сумата $f^{-}(z)$ на втория, е холоморфна в областта $|z-z_0|>r$. Така функцията f холоморфна във венеца $r<|z-z_0|<R$ се представя във вида

$$f(z)=f^{+}(z)+f^{-}(z).$$

За коефициентите в реда на Лоран са в сила неравенствата на Коши, които установихме за коефициентите в реда на Тейлър. При това се запазва не само вида им, но и доказателството им.

Теорема 13.3. (Неравенства на Коши) Нека функцията $f(z)$ е холоморфна във венеца $\{z: 0\le r<|z-z_0|<R\le\infty\}$ и $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ е редът ѝ на Лоран. Тогава за всяко ρ, $r<\rho<R$

$$|a_n|\le\frac{M(\rho)}{\rho^n},\ n=0,\pm1,\dots,$$

където $M(\rho)=max\{|f(\zeta)|:\zeta\in\gamma_\rho\}$.

Забележка 13.1. (Връзка с редовете на Фурие) Всеки сходящ ред на Лоран може да се разглежда като ред на Фурие. Например, ако функцията f е холоморфна във венеца $r<|z|<R$, където $r<1<R$, то n-тият коефициент в лорановото ѝ развитие около нулата има вида

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{it})e^{-int}dt,\ n=0,\pm1,\pm2,\dots$$

С други думи, той съвпада с n-тият коефициент в реда на Фурие на функцията $\varphi(t)=f(e^{it})$, дефинирана в интервала $[0,2\pi]$. При това от теоремата на Вайерщрас следва, че редът на Фурие на функцията $\varphi(t)$ е равномерно сходящ в интервала $[0,2\pi]$.

Пример 13.1. Да се развие в ред на Фурие функцията

$$f(t)=\frac{a\sin t}{1-2a\cos t+a^2},\ |a|<1.$$

Полагаме $z=e^{it}$ и получената функция

$$f(z)=\frac{1-z^2}{2i\left(z^2-(a+1/a)z+1\right)}$$

развиваме в ред на Лоран. Тъй като нулите на знаменателя са a и $1/a$, то

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left(-1+\frac{1}{1-z/a}+\frac{1}{1-az}\right)=\frac{1}{2i}\left(-1+\frac{-a}{z(1-a/z)}+\frac{1}{1-az}\right).$$

Развиваме в геометричен ред, сходящ за $|z|=1$, предвид $|a|<1$ и получаваме

$$f(z)=\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty}a^n\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right).$$

Оттук ($z=e^{it}$) намираме $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin nt$.

Задачи

13.1. Нека $K_1,K_2,\dots K_n$ са непресичащи се кръгове в $\mathbb{C}$ и f е функция холоморфна в $\mathbb{C}\setminus\bigcup_{j=1}^{n}K_j$. Да се докаже, че съществуват функции f_j холоморфни в $\mathbb{C}\setminus K_j$, $j=1,2,\dots n$, такива че $f(z)=\sum_{j=1}^{n}f_j(z),\ z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{j=1}^{n}K_j$.

13.2. За $n\in\mathbb{Z}$ и $w\in\mathbb{C}$ да означим с $J_n(w)$ коефициента пред z^n в реда на Лоран на функцията

$$f(z)=\exp\left(\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)w\right),\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\},$$

т.е.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(w)z^n,\ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Да се докаже,че:

а) $J_n(-w)=J_{-n}(w)=(-1)^nJ_n(w)$ за всяко $n\in\mathbb{Z}$ и $w\in\mathbb{C}$;

б) $J_n(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt-w\sin t)dt$;

в) За всяко $n\in\mathbb{Z}$, $J_n(w)$ е цяла функция и развитието ѝ в ред на Тейлър около нулата за $n\geq 0$ е

$$J_n(w)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{w}{2}\right)^{n+2k}.$$

г) Функциите $J_n(w)$ удовлетворяват диференциалното уравнение на Бесел

$$w^2f''(w)+wf'(w)+(w^2-n^2)f(w)=0.$$

Функцията $J_n(w)$ се нарича функция на Бесел от ред n.

Лекция 14
Изолирани особени точки на холоморфна функция.
Теореми на Риман и на Сохоцки-Вайерщрас

В предната лекция показахме, че холоморфните функции се развиват в ред на Лоран, около особените си точки. В тази лекция ще използваме това развитие за да класифицираме и характеризираме изолираните особени точки на холоморфните функции и ще анализираме поведението на холоморфните функции в близост до тях.

Изолирани особени точки

Дефиниция 14.1. Точката $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича особена точка на една функция f, ако f не е холоморфна в z_0, но във всяка околност на z_0 има точка, в която f е холоморфна.

Основно ще различаваме два типа особени точки: изолирани и не-изолирани.

Дефиниция 14.2. Точката $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича изолирана особена точка на функцията f, ако f е холоморфна в продупчена околност на z_0. Ще наричаме тази точка не-изолирана особеност на f, ако във всяка продупчена околност на z_0 има особена точка на f.

Пример 14.1. Функцията $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}$ има изолирана особеност в $z = 0$, защото тя е холоморфна в продупчения кръг $\{0 < |z| < 1\}$. От друга страна за функцията $f(z) = \log_0 z$, същата точка $z = 0$ е не-изолирана особеност, защото всяка нейна околност съдържа точки от отрицателна част на реалната ос, в които тази функция не е холоморфна (всъщност всяка точка $z \le 0$ е не-изолирана особеност за $f(z) = \log_0 z$).

Тук ще разглеждаме само изолирани особени точки. Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ е изолирана особена точка на f и $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ е развитието ѝ в ред на Лоран около z_0, валидно в пробита околност $\{0 < |z - z_0| < R\}$ на z_0.

Дефиниция 14.3. Точката z_0 се нарича:

- отстранима особена точка на f, ако $a_{-n} = 0$ за всяко $n \ge 1$;
- m-кратен полюс на f, $m \ge 1$, ако $a_{-m} \ne 0$ и $a_{-n} = 0$ за всяко $n > m$ (при $m = 1$ ще казваме, че z_0 е прост полюс на f);
- съществена особена точка на f, ако $a_{-n} \ne 0$ за безбройно много n.

Пример 14.2. Да разгледаме функциите $f_1(z)=\frac{\sin z}{z}$, $f_2(z)=\frac{\cos z}{z}$ и $f_3(z)=e^{\frac{1}{z}}$. За всяка от тях $z=0$ е изолирана особена точка. Ще определим вида ѝ и ще изследваме поведението на функциите, когато $z\to 0$. Предвид тейлъровите развития на съответните функции имаме:

1) $f_1(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots)=1-\frac{z^2}{3!}+\cdots$

Следователно $z=0$ е отстранима особеност на $f_1(z)$. Освен това $\lim\limits_{z\to 0} f_1(z)=1$;

2) $f_2(z)=\frac{\cos z}{z}=\frac{1}{z}(1-\frac{z^2}{2!}+\cdots)=\frac{1}{z}-\frac{z}{2!}+\cdots$

Следователно $z=0$ е прост полюс на $f_2(z)$. Освен това $\lim\limits_{z\to 0} f_2(z)=\infty$;

3) $f_3(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots$

Следователно $z=0$ е съществена особена точка на $f_3(z)$. Ще покажем, че в този случай границата не съществува. Действително $\pm\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_3\left(\frac{1}{n}\right)=+\infty$, докато $\lim\limits_{n\to\infty} f_3\left(-\frac{1}{n}\right)=0$.

Сега ще приведем различни характеристики на трите вида изолирани особени точки и ще изучим поведението на една холоморфна функция в околност на всяка от тях.

Отстранима особена точка. Теорема на Риман

Теорема 14.1. (Риман) Нека $f(z)$ е холоморфна в $0<|z-z_0|<R$. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) z_0 е отстранима особена точка;

(2) f се продължава до холоморфна функция в $|z-z_0|<R$, т.е. съществува функция g холоморфна в $|z-z_0|<R$, така че $g(z)=f(z)$ в $0<|z-z_0|<R$;

(3) Съществува $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;

(4) f е ограничена в продупчена околност на z_0, т.е. съществуват $M>0, R_1\le R$, такива че $|f(z)|\le M$ в $0<|z-z_0|<R_1$.

Доказателство. (1)$\Rightarrow$(2) В този случай, главната част в лорановото развитие на f около z_0 е тъждествено нула и $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, $0<|z-z_0|<R$. Това е степенен ред и следователно е сходящ не само в пробития, но и в целия кръг $|z-z_0|<R$, като сумата му $g(z)$ е холоморфна функция в този кръг. Очевидно $g(z)=f(z)$ за $0<|z-z_0|<R$ и $g(z_0)=a_0$. Следователно ние можем да

направим $f(z)$ холоморфна в z_0, като положим $f(z_0)=a_0$. Така z_0 от особена точка на $f(z)$ се превръща в „правилна” точка на $f(z)$. От тук и името – отстранима особена точка.
(2)$\Rightarrow$(3) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a_0$.
(3)$\Rightarrow$(4) Очевидно.
(4)$\Rightarrow$(1) От неравенствата на Коши за коефициентите в лорановия ред на f имаме $|a_{-n}|\le M\rho^n$ за всяко $n=1,2,\ldots$ и всяко $0<\rho<R_1$. От тук при $\rho\to 0$ получаваме $a_{-n}=0$ за всяко $n=1,2,\ldots$, т.е. z_0 е отстранима особена точка на f.■

Полюс

Теорема 14.2. Нека $f(z)$ е холоморфна в $0<|z-z_0|<R$. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) z_0 е m-кратен полюс на f, $m\ge 1$;

(2) Съществува функция $\varphi(z)$ холоморфна в $|z-z_0|<R$, $\varphi(z_0)\ne 0$, така че
$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}\ ,\ 0<|z-z_0|<R;$$

(3) z_0 е m-кратна нула на функцията $\dfrac{1}{f}$.

Доказателство. (1)$\Rightarrow$(2) Имаме, че
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\cdots+\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}\,,0<|z-z_0|<R\,,$$
където $a_{-m}\ne 0$. Тогава функцията
$$\varphi(z)=(z-z_0)^m f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n+m}+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\cdots+a_{-m}$$
е холоморфна в $0<|z-z_0|<R$ и $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=a_{-m}$. От теоремата на Риман следва, че z_0 е отстранима особена точка на φ и значи φ е холоморфна в $|z-z_0|<R$, като $\varphi(z_0)=a_{-m}\ne 0$.
(2)$\Rightarrow$(3) Тъй като $\varphi(z_0)\ne 0$, от непрекъснатостта следва, че $\varphi(z)\ne 0$ в околност $U=\{z:|z-z_0|<R_1\le R\}$.Тогава функцията $\dfrac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\dfrac{1}{\varphi(z)}$ е холоморфна в U и z_0 е нейна m-кратна нула.

(3)$\Rightarrow$(1) В околност U на z_0 е в сила представянето $\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^m \psi(z)$, където $\psi(z)$ е холоморфна и различна от нула в тази околност. Функцията $\frac{1}{\psi}$ е холоморфна в U и нека редът ѝ на Тейлър в z_0 има вида

$$\frac{1}{\psi(z)} = a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots,$$

където $a_0 = \frac{1}{\psi(z_0)} \neq 0$.Тогава за $z \in U \setminus z_0$

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots,$$

т.е. z_0 е m-кратен полюс на f .■

Следствие 14.1. Точката z_0 е полюс на f тогава и само тогава, когато $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Доказателство. Ако z_0 е полюс на f, то от Т.14.2 (2) следва $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Обратно, ако $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, то съществува пробита околност на z_0, в която f е холоморфна и различна от нула. Тогава функцията $\frac{1}{f}$ също е холоморфна в тази околност, като $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$. Следователно z_0 е отстранима особена точка на $\frac{1}{f}$, като $\left(\frac{1}{f}\right)(z_0) = 0$, т.е. z_0 е нула на $\frac{1}{f}$. Сега твърдението следва от Т.14.2 (3).■

Съществена особена точка. Теорема на Сохоцки-Вайерщрас

Изложеното дотук ни показа, че в околност на отстранима особена точка и на полюс, поведението на функцията е напълно контролируемо. Сега ще се убедим, че в околност на съществена особеност, то е абсолютно непредвидимо.

Теорема 14.3. (Казорати-Сохоцки-Вайерщрас) Нека $f(z)$ е холоморфна в $0 < |z - z_0| < R$. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) z_0 е съществена особена точка на f;

(2) Образът $f(U)$ на всяка пробита околност $U=\{z:0<|z-z_0|<R_1\le R\}$ е навсякъде гъсто в $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. за всяко $w\in\overline{\mathbb{C}}$, съществува редица от точки $z_n\in U,\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, така че $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=w$;

(3) Не съществува границата $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Доказателство. (1)$\Rightarrow$(2) Нека първо $w=\infty$. Тъй като z_0 е съществена особена точка на f, то във всяка пробита околност на z_0, f е неограничена (в противен случай от теоремата на Риман ще следва, че z_0 е отстранима особеност). Следователно съществува $z_1\in U$, такова че $|f(z_1)|>1$. По същата причина съществува z_2 $0<|z_2-z_0|<R_1/2$, такова че $|f(z_2)|>2$ и т.н. съществува z_n, $0<|z_n-z_0|<R_1/n$, такова че $|f(z_n)|>n$. Очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\infty$. Да допуснем сега, че $f(U)$ не е навсякъде гъсто в $\mathbb{C}$, т.е. съществуват $w_0\in\mathbb{C}$, пробита околност $U=\{z:0<|z-z_0|<R_1\le R\}$ на z_0 и $\varepsilon_0>0$, така че $|f(z)-w_0|\ge\varepsilon_0$ за всяко $z\in U$. Тогава функцията

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w_0}$$

е холоморфна и ограничена в U, защото $|g(z)|\le 1/\varepsilon_0$ за всяко $z\in U$, и според теоремата на Риман има отстранима особеност в z_0. При това, очевидно $g(z)$ не е тъждествено нула. Тъй като $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}+w_0$, оттук следва, че или z_0 е отстранима особеност на f, ако $g(z_0)\ne 0$, или z_0 е полюс на f, ако $g(z_0)=0$. Това противоречи на условието, че z_0 е съществена особена точка на f, с което твърдението е доказано.

Импликацията (2)$\Rightarrow$(3) е очевидна, а (3)$\Rightarrow$(1) следва от това, че предвид теоремата на Риман и Следствие 14.1, z_0 не е нито отстранима особеност, нито полюс на f.■

Забележка 14.1. Всъщност в сила е много по-дълбок резултат известен като „Голяма теорема на Пикар” , според който в околност на съществена особена точка, функцията приема всяка комплексна стойност с евентуално изключение на една, при това безбройно често. Този резултат е точен. Функцията $e^{\frac{1}{z}}$ има съществена особеност в $z=0$ и за всяко $c\ne 0$ уравнението $e^{\frac{1}{z}}=c$ има безбройно много корени

$$z_n=\frac{1}{\ln|c|+i(\arg_0 c+2n\pi)}\ ,\ n=0.\pm1,\pm2,\dots,$$

При това всички те са различни и $z_n \xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$, така че във всяка околност на нулата има безбройно много корени на това уравнение.

Безкрайната точка

Въведените дотук понятия и получените за тях резултати могат да се пренесат и за $z_0 = \infty$.

Дефиниция 14.4. Точката $z = \infty$ се нарича изолирана особена точка на функцията f, ако съществува $R > 0$, така че $f(z)$ е холоморфна за $|z| > R$.

Тъй като при трансформацията $\zeta = \frac{1}{z}$ областта $|z| > R$ се изобразява в пробитата околност $0 < |\zeta| < \frac{1}{R}$ на нулата, то $z = \infty$ е изолирана особена точка на $f(z)$ тогава и само тогава, когато $\zeta = 0$ е изолирана особена точка на функцията $g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Поради това е съвсем естествена следната

Дефиниция 14.5. Нека ∞ е изолирана особена точка на $f(z)$. Тя се нарича отстранима, полюс или съществена особеност на $f(z)$, ако 0 е изолирана особеност от съответния вид за функцията $g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$.

Като вземем предвид развитието на $g(\zeta)$ в ред на Лоран около $\zeta = 0$

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\zeta^n}$$

и се върнем към $f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right)$ ще получим лорановото развитие на $f(z)$ около $z = \infty$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \,,$$

където

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) z^{n-1} dz \ , \ b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \ , \ r > R .$$

Тогава, ако:

(1) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$, $|z|>R$, то ∞ е отстранима особеност на f;

(2) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}+b_m z^m+\cdots b_1 z,\quad b_m\neq 0$, то ∞ е полюс на f;

(3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n$, като $b_n\neq 0$ за безбройно много n, то ∞ е съществена особеност на f.

Задачи

14.1. Да се докаже, че всяка холоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ функция е константа.
14.2. Да се докаже, че ако f е цяла функция и в ∞ има полюс, то f е полином.
14.3. Да се докаже, че ако функцията f е холоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ с изключение на краен брой полюси, то тя е рационална функция.
14.4. Нека f и g са цели функции и $\lim_{z\to\infty} f(g(z))=\infty$. Да се докаже, че f и g са полиноми. Упътване: Използвайте теоремата на Сохоцки-Казорати-Вайерщрас.
14.5. Да се докаже, че не съществува функция $f(z)$ холоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и такава, че

$$|f(z)|\geq\frac{1}{\sqrt{|z|}}$$

за всяко $z\neq 0$.

Упътване. Допуснете противното и разсъждавайте за функцията $g=\frac{1}{f}$.

14.6. Да се докаже, че теоремата на Сохоцки-Казорати-Вайерщрас остава в сила, ако особената точка е точка на сгъстяване на полюси и функцията няма други особености в околност на тази точка.

Лекция 15
Теорема за резидуумите. Развитие на функцията $\cot g\pi z$ в ред от елементарни дроби

В тази лекция ще изложим едно естествено обобщение на теоремата на Коши за функции, които имат изолирани особени точки.

Резидуум

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ е изолирана особена точка на f и $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ е развитието на f в ред на Лоран около z_0, валидно в пробита околност $\{0<|z-z_0|<R\}$ на z_0, където $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\ r<R$.

Дефиниция 15.1. Резидуум на f в точката z_0 се нарича коефициентът a_{-1} в лорановото развитие на f около z_0. Ще използваме означението $\operatorname{Res}(f,z_0)=a_{-1}$, или просто $\operatorname{Res}(z_0)=a_{-1}$, когато функцията се подразбира.

Имаме, че $\operatorname{Res}(f,z_0)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)dz$, $r<R$. Така, ако по един или друг начин пресметнем a_{-1} ние ще получим стойността на интеграла от f по всяка затворена жорданова крива, заграждаща z_0 и съдържаща се в пробита околност на z_0, в която f е холоморфна. Ясно е, че ако z_0 е отстранима особена точка на f, т.е f е холоморфна в z_0, то $\operatorname{Res}(f,z_0)=0$. Обратното не е вярно. Например $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2},0\right)=0$, но нулата е двукратен полюс на $f(z)=\frac{1}{z^2}$.

Нека $z_0=\infty$, f е холоморфна за $|z|>R$ и $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ е развитието ѝ в ред на Лоран около безкрайната точка.

Дефиниция 15.2. $\operatorname{Res}(f,\infty)=-a_{-1}$.

Имаме, че

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=-a_{-1}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r^-} f(z)dz,\ r>R,$$

където $\gamma_r=\{z:|z|=r,\ r>R\}$. Знакът минус пред коефициента се взема поради това, че се интегрира по окръжността, ориентирана в посоката на движението на часовниковата стрелка (т.е. в отрицателна посока), така че ∞ да остава отляво на нея, както е в случая на крайна изолирана особеност. Ясно е, че ако

f е холоморфна в ∞ т.е. ∞ е отстранима особеност, то може $\operatorname{Re}s(f,\infty)\neq 0$ (например $f(z)=\frac{1}{z}$) и в този случай $\operatorname{Re}s(f,\infty)=-\lim\limits_{z\to\infty} z(f(z)-f(\infty))$. Ще отбележим още, че $\operatorname{Re}s(f(z),\infty)\neq \operatorname{Re}s\left(f\left(\frac{1}{z}\right),0\right)$, но тъй като, $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ е холоморфна за $|z|>R$, точно когато $f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$ е холоморфна за $0<|z|<\frac{1}{R}$ имаме, че a_{-1} е точно коефициентът пред $\frac{1}{z}$ в развитието около 0 на функцията

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{z^{n+2}}$$

и следователно

$$\operatorname{Re}s(f,\infty)=-\operatorname{Re}s\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right),0\right).$$

Правила за пресмятане на резидууми

(1) Ако $z_0\neq\infty$ е прост полюс на f, то $\operatorname{Re}s(f,z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$. В частност ако $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, където φ и ψ са холоморфни в z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0, \psi(z_0)=0, \psi'(z_0)\neq 0$, то $\operatorname{Re}s(f,z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

Доказателство. Имаме

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n ,$$

$$(z-z_0)f(z)=a_{-1}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+1}$$

и $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=a_{-1}$. Оттук следва и втората формула, защото

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)-\psi(z_0)}$$

■

$$=\lim_{z\to z_0}\varphi(z)\Big/\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \quad .$$

(2) Ако $z_0 \neq \infty$ е m-кратен полюс, $m>1$ **,**на f, то

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}.$$

Доказателство. Съществува функция $\varphi(z)$ холоморфна в околност на z_0 , $\varphi(z_0)\neq 0$, така че

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

в пробита околност на z_0. Тогава, ако

$$\varphi(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_{m-1}(z-z_0)^{m-1}+\ldots$$

е развитието в ред на Тейлър на $\varphi(z)$ около z_0, то коефициентът пред $\dfrac{1}{z-z_0}$ в лорановото развитие на $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ около z_0 е точно $c_{m-1}=\dfrac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$. Следователно

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}.\blacksquare$$

Тази формула не е удобна и често пъти е по-добре да се търси друг начин за пресмятане на резидуума (например чрез намиране на лорановото развитие).

Ако z_0 е съществена особена точка, няма подобни прости правила за пресмятане на резидуума.

Примери 15.1.

(1) Изолираните особени точки на функцията $f(z)=tgz$ в $\mathbb{C}$ са нулите на $\cos z$, т.е. това са точките $z_n=\dfrac{\pi}{2}+n\pi, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ и всички те са прости полюси. Прилагаме правило (1) ($\varphi(z)=\sin z$, $\psi(z)=\cos z$) и получаваме

$$\operatorname{Res}(f,z_n)=\left[\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right]_{z=z_n}=\frac{\sin z_n}{-\sin z_n}=-1.$$

Да отбележим, че $z_n \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} \infty$, така че ∞ е не-изолирана особеност на f.

(2) Изолираните особени точки на функцията $f(z)=\dfrac{z^2+z+1}{z(z+1)^2}$ в $\mathbb{C}$ са 0 и -1, като 0 е прост полюс, а -1 е двукратен полюс. Имаме

$$\operatorname{Res}(f,0)=\left[\frac{(z^2+z+1)/(z+1)^2}{(z)'}\right]_{z=0}=1,$$

$$\operatorname{Res}(f,-1)=\frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2+z+1)}{z}\right]_{z=-1}=\left[\frac{(2z+1)z-(z^2+z+1)}{z^2}\right]_{z=-1}=\left[\frac{z^2-1}{z^2}\right]_{z=-1}=0.$$

Ще отбележим че f е холоморфна в ∞, защото функцията $f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{z(z^2+z+1)}{(z+1)^2}$ е холоморфна в нулата, като $f(\infty)=0$. Тогава $\operatorname{Res}(f,\infty)=-\lim\limits_{z\to\infty} zf(z)=-1$.

(3) Изолираните особени точки на функцията $f(z)=\frac{\sin z}{z^2(1-\cos z)}$ в $\mathbb{C}$ са точките $z_n=2n\pi, n=0,\pm1,\pm2,\dots$, като $z_0=0$ е трикратен полюс ,а останалите са прости полюси. Преди всичко ще отбележим, че тук правилата (1) и (2) не са удобни за пресмятане (в случая на прост полюс се налага двукратно прилагане на теоремата на Лопитал). Затова тук, за да пресметнем коефициента пред $\frac{1}{z-z_n}$ в лорановото развитие на $f(z)$, ще използваме тейлъровите развития на функциите $\sin z$ и $\cos z$. Имаме

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2(1-\cos z)}=\frac{z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)}{z^4\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots\right)}=\frac{1}{z^3}g(z),$$

където функцията $g(z)$ е холоморфна в $z_0=0$. Тогава, ако $g(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$ е тейлъровото ѝ развитие около нулата, то $\operatorname{Res}(f,0)=a_2$. За намирането на a_2 ще използваме тъждеството

$$1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots=\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots\right)(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots).$$

Приравнявайки коефициентите пред съответните степени на z получаваме

$$1=\frac{1}{2!}a_0,\ 0=\frac{1}{2!}a_1,\ -\frac{1}{3!}=-\frac{1}{4!}a_0+\frac{1}{2!}a_2,$$

откъдето намираме $\operatorname{Res}(f,0)=a_2=-\frac{1}{6}$.

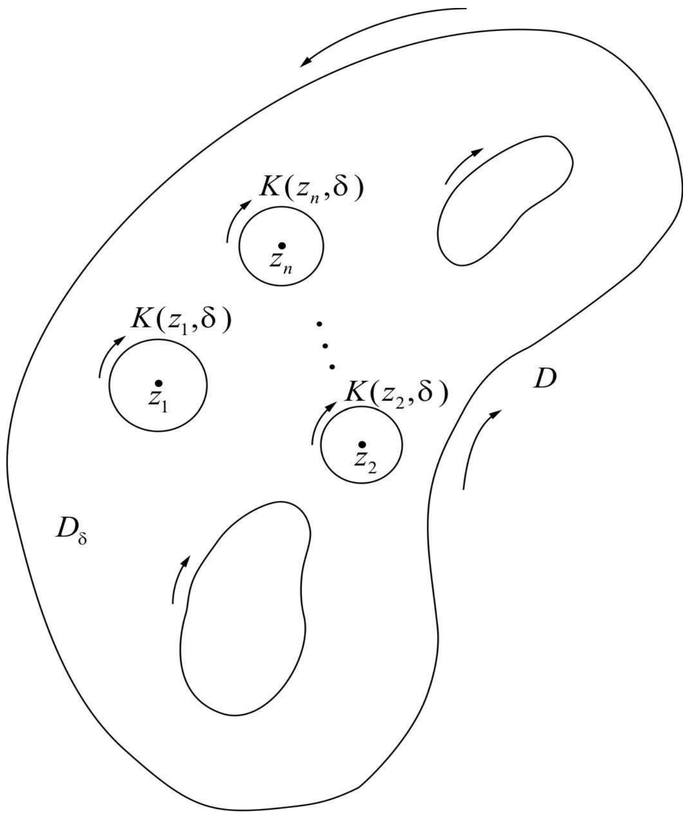
Аналогично се пресмята $\operatorname{Res}(f,z_n)=\frac{2}{z_n^2}, n\neq 0$. Безкрайната точка е неизолирана особеност на f.

Теорема за резидуумите

Теорема 15.1. (Теорема за резидуумите) Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена, крайно-свързана област, чиято граница е съставена от краен брой непресичащи се затворени жорданови криви. Ако f е функция холоморфна в околност на $\overline{D}$ с изключение на краен брой точки $z_k \in D, k = 1,2,\dots,n$, то

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Доказателство. Нека $\delta > 0$ е такова, че затворените кръгове $\overline{K(z_k,\delta)}$ се съдържат в D и нямат общи точки помежду си (фиг,15.1).



фиг.15.1

Областта $D_\delta = D \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{K(z_k,\delta)}$ е ограничена, крайно-свързана и от теоремата на Коши за сложен контур (Т.9.1) имаме

$$0 = \int_{\partial D_\delta} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial K(z_k,\delta)} f(z)dz = \int_{\partial D} f(z)dz - 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

С това теоремата е доказана.■

Тази теорема обобщава не само теоремата на Коши, но и формулата на Коши. Действително, нека f е функция холоморфна в околност на $\overline{D}$ и $z_0 \in D$, Функцията $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - z_0}$ има прост полюс в z_0, $\operatorname{Re}s(g, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) g(z) = f(z_0)$ и от теоремата за резидуумите следва

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} g(z) = f(z_0).$$

Теоремата за резидуумите е забележителна с това, че свежда пресмятането на една глобална величина $\int\limits_{\partial D} f(z) dz$ до пресмятане на локални величини-резидуумите в особените точки, което често става чрез по-елементарни операции като диференциране и намиране на граница. Така тя ни дава възможност да пресмятаме интеграли без да интегрираме.

Следствие 15.1. Ако f е холоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ с изключение на изолирани особени точки (те очевидно са краен брой) $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$, то сумата от всички резидууми е нула, т.е.

$$\operatorname{Re}s(f, \infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}s(f, a_k) = 0.$$

Доказателство. Нека $R > 0$ е такова, че $|a_k| < R, k = 1, 2, \ldots, n$. От дефиницията за резидуум в безкрайната точка и от теоремата за резидуумите имаме

$$-\operatorname{Re}s(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}s(f, a_k).$$

С това твърдението е доказано.■

Полезността на този вариант на теоремата за резидуумите за разширената комплексна равнина ще илюстрираме със следния

Пример 15.2. Нека $f(z) = \dfrac{z^n}{(z-3)(z^n - 1)}$, където n е естествено число. Да пресметнем стойността на интеграла

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=2} f(z) dz.$$

Особеностите на f са $z=3$ и n-тите корени на единицата-$z_k,\, k=1,2,\dots n$ и всички те са прости полюси. В безкрайната точка f е холоморфна, като $f(\infty)=0$. От теоремата на резидуумите имаме $I=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k)$. От друга страна

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k)=-(\operatorname{Res}(f,3)+\operatorname{Res}(f,\infty)).$$

Пресмятаме $\operatorname{Res}(f,3)=3^n/(3^n-1),\, \operatorname{Res}(f,\infty)=-\lim_{z\to\infty} zf(z)=-1$ и получаваме $I=1/(1-3^n)$.

Разлагане на $\cot g\pi z$ в ред от елементарни дроби

Теоремата за резидуумите е един от основните резултати в класическия комплексен анализ. Тя има многочислени директни приложения, например при пресмятане на реални несобствени интеграли и сумиране на редове (вж. [15] и [16]).Тук ще изложим едно от най-популярните ѝ приложения-развитието на функцията $\cot g\pi z$ в ред от елементарни дроби.

Лема 15.1. Нека $\delta>0$ е такова, че кръговете $K(n,\delta),\, n=0,\pm1,\pm2,\dots$ нямат общи точки помежду си (достатъчно е да изберем $\delta<1/2$). Тогава функцията $\cot g\pi z$ е ограничена в областта $D_\delta=\mathbb{C}\setminus\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}K(n,\delta)$.

Доказателство. Тъй като $\cot g\pi z$ е периодична с основен период 1, достатъчно е да докажем, че тя е ограничена в $D_\delta\cap\{z:0\le\operatorname{Re}z\le1\}$. От неравенството на триъгълника имаме

$$|\cot g\pi z|=|i|\frac{|e^{i2\pi z}+1|}{|e^{i2\pi z}-1|}\le\frac{1+e^{-2\pi y}}{|1-e^{-2\pi y}|}\quad,\ z=x+iy.$$

Оттук при $y>1$

$$|\cot g\pi z|\le\frac{1+e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}}<\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}<2\quad,$$

и аналогично при $y<-1$

$$|\cot g\pi z|\le\frac{1+e^{-2\pi y}}{e^{-2\pi y}-1}=\frac{1+e^{2\pi y}}{1-e^{2\pi y}}<\frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}<2\quad.$$

Освен това, тъй като множеството $\Pi_\delta=D_\delta\cap\{z:0\le\operatorname{Re}z\le1,\,-1\le\operatorname{Im}z\le1\}$ е компактно и $\cot g\pi z$ е непрекъсната функция върху Π_δ, то $|\cot g\pi z|\le m(\delta),\, z\in\Pi_\delta$.

Така $|\cot g\pi z| \le M(\delta),\, z \in D_\delta$, където $M(\delta) = max\big(2, m(\delta)\big)$ е константа, зависеща само от δ.■

Твърдение 15.1. За всяко $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ е в сила представянето

$$\pi \cot g\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right),$$

като редът е абсолютно сходящ, при това равномерно, върху компактните подмножества на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Доказателство. Нека $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, n е естествено число, такова че $|z| < n$, $C_n = \{\zeta : |\zeta| = n + 1/2\}$ и

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\pi \cot g\pi\zeta}{\zeta^2 - z^2} d\zeta\,.$$

Особените точки на подинтегралната функция в кръга заграден от C_n са точките: $\pm z, 0, \pm 1, \ldots, \pm n$ и всички те са прости полюси. От теоремата за резидуумите имаме

$$I_n(z) = \sum_{\kappa=-n}^{n} \operatorname{Re} s(k) + \operatorname{Re} s(z) + \operatorname{Re} s(-z)\,.$$

Последователно пресмятаме

$$\operatorname{Re} s(k) = \left[\frac{\pi \cos \pi\zeta / (\zeta^2 - z^2)}{(si\pi\zeta)'}\right]_{\zeta=k} = \frac{1}{k^2 - z^2}\,,$$

$$\operatorname{Re} s(z) = \operatorname{Re} s(-z) = \left[\frac{\pi \cot g\pi\zeta}{(\zeta^2 - z^2)'}\right]_{\zeta=z} = \frac{\pi \cot g\pi z}{2z}$$

и намираме

$$I_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k^2 - z^2} + \frac{\pi \cot g\pi z}{z} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - z^2} - \frac{1}{z^2} + \frac{\pi \cot g\pi z}{z}\,.$$

От друга страна, избирайки в лемата $\delta = 1/3$, имаме $C_n \in D_{1/3}$ и $|\cot g\pi z| \le M$, $z \in C_n$. Тогава

$$|I_n(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{C_n} \frac{|\pi \cot g\pi z|}{|\zeta^2 - z^2|} |d\zeta| \le \frac{\pi M}{(n+1/2)^2 - |z|^2}(n + 1/2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.$$

Следователно

$$0=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k^2-z^2}-\frac{1}{z^2}+\frac{\pi\cot g\pi z}{z},$$

откъдето получаваме

$$\pi\cot g\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right).$$

Редът е абсолютно и равномерно сходящ върху компактните подмножества на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, защото за достатъчно големи n , например $n>\sqrt{2}\,|z|$,

$$\left|\frac{2z}{z^2-n^2}\right|<\frac{4|z|}{n^2}.\blacksquare$$

Забележка 15.1. Тъй като редовете

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right),\ z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$$

са абсолютно и равномерно сходящи върху компактните подмножества на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ (докажете), то е в сила и представянето

$$\pi\cot g\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right),\ z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

Забележка 15.2. Редовете $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z-n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z+n}$ са разходящи и поради това се налага добавката от $\frac{1}{n}$ съответно $-\frac{1}{n}$, което ни осигурява сходимост .Ще отбележим още, че $\frac{1}{z-n}$ $(n\in\mathbb{Z})$ е главната част в лорановото развитие на $\pi\cot g\pi z$ около $z=n$, и $-\frac{1}{n}$ е свободния член в тейлъровото ѝ развитие около $z=0$ (вж.Лекция 21).

Задачи

15.1. Чрез теоремата за резидуумите да се докаже, че

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}=\sqrt{5}.$$

Упътване. Използвайте, че

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz .$$

Изберете r, така че да можете да размените реда на сумиране и интегриране, и приложете теоремата за резидуумите.

15.2. Нека $P_n(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$. Да се докаже, че $P_n(z)$ има n прости нули $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и за всяко $2 \le j \le n$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k^j} = 0 .$$

Упътване. Нека $0 \le l \le n-2$ и

$$I_l = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{z^l}{P_n(z)} dz,\ R > |\, z_k \,|,\ k = 1, 2 \ldots, n .$$

Пресметнете I_l чрез теоремата за резидуумите и докажете, че $I_l = 0$.

Лекция 16
Логаритмичен индикатор. Принцип за аргумента

В тази лекция ще направим приложение на теоремата за резидуумите от теоретичен характер. Ще изведем формула, чрез която ще броим нулите и полюсите на холоморфните функции.

Логаритмичен индикатор

Дефиниция 16.1. Нека f е холоморфна и различна от нула в околност на $z_0 \in \mathbb{C}$. Логаритмична производна на f в z_0 се нарича числото

$$\frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = \left[\frac{d \log f(z)}{dz}\right]_{z=z_0},$$

където $\log f$ е един еднозначен клон на логаритъма в тази околност.

Ясно е, че логаритмичната производна на f е функция холоморфна там, където f е холоморфна и различна от нула. Тя има някои забележителни свойства, две от които ще приведем и използваме по-нататък.

Нека f и g са функции холоморфни и различни от нула в някаква област. Тогава:

1) Логаритмичната производна на произведението им fg е сумата от логаритмичните производни на f и на g, т.е.

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g};$$

2) Логаритмичната производна на частното им f/g е разликата от логаритмичните производни на f и на g, т.е.

$$\frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Лема 16.1. Нулите и полюсите на f са прости полюси на логаритмичната ѝ производна $\frac{f'}{f}$. При това, ако a е n-кратна нула на f, а b е p-кратен полюс на f, то

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = n \text{ и } \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, b\right) = -p.$$

Доказателство. В околност на a е в сила представянето

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z),$$

където $\varphi(z)$ е функция холоморфна и различна от нула в тази околност. Тогава, предвид свойство 1),

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Тъй като функцията $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ е холоморфна в околност на a, оттук следва, че a е прост полюс на $\dfrac{f'}{f}$ и $\operatorname{Res}\left(\dfrac{f'}{f}, a\right) = n$. Твърдението за полюсите на f следва аналогично, като се има предвид, че в пробита околност на b е в сила представянето $f(z) = \dfrac{\psi(z)}{(z-b)^p}$, където $\psi(z)$ е холоморфна и различна от нула в тази околност.

Както вече отбелязахме в предната лекция, основната философия на теоремата за резидуумите е в това, че стойността на интеграла от f върху контура на област зависи изцяло от особените точки на f в тази област. Сега ще обърнем тази философия, като покажем, че интегралът от логаритмичната производна на f може да се използва за определяне на броя на нулите и полюсите на f в областта.

Теорема 16.1. (Теорема за логаритмичния индикатор) Нека γ е затворена жорданова крива, f е функция холоморфна в околност на $\gamma \cup int\gamma$, с изключение на краен брой полюси в $int\gamma$ и $f(z) \neq 0, z \in \gamma$. Тогава

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f,$$

където N_f е броят на нулите, а P_f -броят на полюсите на f в $int\gamma$, броени с техните кратности.

Интегралът в лявата страна на равенството се нарича *логаритмичен индикатор* на f.

Доказателство. Тъй като нулите на холоморфните функции са изолирани точки и $\gamma \cup int\gamma$ е компакт, от условието следва, че f има краен брой нули в $int\gamma$. Нека те са $a_1, a_2, \ldots, a_m$ от кратности съответно $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Нека полюсите на f в $int\gamma$ са $b_1, b_2, \ldots, b_n$ от кратности съответно $p_1, p_2, \ldots, p_n$. От теоремата за резидуумите и от лемата имаме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(a_k) + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(b_j) = \sum_{k=1}^{m} n_k - \sum_{j=1}^{n} p_j = N_f - P_f. \blacksquare$$

Следствие 16.1. Нека γ е затворена жорданова крива, f е функция холоморфна в околност на $\gamma \cup int\gamma$ и $f(z) \neq 0, z \in \gamma$. Тогава

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_f ,$$

където N_f е броят на нулите на f в $\gamma \cup int\gamma$, броени с техните кратности.

Принцип за аргумента

Сега ще интерпретираме геометрично теоремата за логаритмичния индикатор. Това ще направим като изтълкуваме геометрично логаритмичния индикатор.

Лема 16.2. Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е едносвързана област и f е функция холоморфна и различна от нула в D. Тогава в D може да се отдели еднозначен клон на $\log f(z)$.

Доказателство. Функцията $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ е холоморфна в едносвързаната област D и значи има примитивна, т.е. съществува функция $F(z)$, холоморфна в D и такава, че $F'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}, z \in D$. Тогава функцията $f(z)e^{-F(z)}$ е холоморфна в D и

$$\left(f(z)e^{-F(z)}\right)' = f'(z)e^{-F(z)} - f(z)F'(z)e^{-F(z)} = f'(z)e^{-F(z)} - f'(z)e^{-F(z)} = 0 .$$

Следователно $f(z)e^{-F(z)} \equiv const = e^c \neq 0, z \in D \Leftrightarrow e^{F(z)+c} = f(z), z \in D$. Това означава, че $F(z)+c$ е един еднозначен клон на $\log f(z)$ в D. Така, ако $z_0 \in D$ е фиксирана точка, и $\log f(z)$ е еднозначен клон на логаритъма, то

$$\int_{z_0}^{z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \log f(z) - \log f(z_0)$$

за всяко $z \in D$.■

Теорема 16.2. Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и $\gamma \subset D$ е затворена крива. Ако функцията f е холоморфна в D и $f(z) \neq 0, z \in \gamma$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi} ,$$

където $\Delta_\gamma \arg f(z)$ е изменението на аргумента на $f(z)$, когато z опише веднъж γ.

Доказателство. Преди всичко да поясним какво се разбира под изменение на аргумента на $f(z)$, когато z опише веднъж γ. Нека $z=\gamma(t):[0,1]\to D$ е едно параметрично представяне на кривата γ. Избираме (по-нататък ще покажем, че това е възможно) клон на аргумента, така че $\arg f(\gamma(t))$ да е непрекъсната функция на $t\in[0,1]$ и тогава $\Delta_\gamma \arg f(z)=\arg f(\gamma(1))-\arg f(\gamma(0))$.

Първо ще покажем, че съществува $\delta>0$, такова че за всяко $z\in\gamma$ и за всяко $\zeta\in K(z,\delta)$, $f(\zeta)\neq 0$. Тъй като f е непрекъсната и $f(z)\neq 0, z\in\gamma$, то за всяко $z\in\gamma$ съществува кръг $K(z,\delta_z)\subset D$, така че $f(\zeta)\neq 0, \zeta\in K(z,\delta_z)$. Понеже γ е компакт, то съществуват краен брой кръгове $K(z_k,\delta_k/2), k=1,2,\ldots,m$ ($\delta_k=\delta_{z_k}$), с това свойство, които покриват γ, т.е. $\gamma\subset\bigcup_{k=1}^{m}K(z_k,\delta_k/2)$. Нека $\delta=min\{\delta_1/2,\,\delta_2/2,\ldots,\delta_m/2\}$. Тогава, ако $z\in\gamma$, то $z\in K(z_k,\delta_k/2)$ за някое $k=1,2,\ldots,m$ и за всяко $\zeta\in K(z,\delta)$ имаме $|\zeta-z_k|\leq|\zeta-z|+|z-z_k|<\delta+\delta_k/2\leq\delta_k$, т.е. $K(z,\delta)\subset K(z_k,\delta_k)$, откъдето следва $f(\zeta)\neq 0$, за всяко $\zeta\in K(z,\delta)$.

Тъй като $\gamma(t)$ е равномерно непрекъсната върху $[0,1]$, то съществува подразделяне на интервала $[0,1]: 0=t_0<t_1<\ldots<t_n=1$, така че $|\gamma(t)-\gamma(t_j)|<\delta$ за всяко $t\in[t_j,t_{j+1}], j=0,1,\ldots n-1$. Така точките $z_j=\gamma(t_j), j=0,1,\ldots n$ разделят γ на краен брой дъги $\gamma_j=\gamma([t_j,t_{j+1}])$ с краища в точките z_j и z_{j+1}, като $\gamma_j\subset K(z_j,\delta)$, $j=0,1,\ldots n-1$, т.е. всяка от тях се съдържа в кръг, в който f е различна от нула. Тъй като $K_j=K(z_j,\delta)$ е едносвързана област и $f(z)\neq 0$ за всяко $z\in K(z_j,\delta)$, то (Лема 16.2), в K_j, $j=0,1,\ldots n-1$ могат да се отделят еднозначни клонове $\log_j f(z)$ на $\log f(z)$. Тогава

$$\int_{\gamma_j}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\log_j f(z_{j+1})-\log_j f(z_j).$$

Като имаме предвид, че интегралът по цялата крива γ е сума на интегралите по дъгите $\gamma_j, j=0,1,\ldots,n-1$,за да докажем твърдението трябва така да подберем еднозначните клонове $\log_j f(z)$, че

$$\log_j f(z_j)=\log_{j-1} f(z_j),\ j=1,2\ldots,n-1.$$

Това ще постигнем чрез последователно „слепване” на еднозначни клонове, започвайки от кръговете K_0 и K_1. Действително, ако $\log_0 f(z)$ и $\log^1 f(z)$ са еднозначни клонове на $\log f(z)$, съответно в K_0 и в K_1, в сечението $K_0\cap K_1$ на двата кръга те се различават с константа. По-точно съществува $k_0\in\mathbb{Z}$, така че

$$\log_0 f(z) = \log^1 f(z) + 2k_0\pi i,\ z \in K_0 \cap K_1 .$$

Дефинираме $\log_1 f(z) = \log^1 f(z) + 2k_0\pi i,\ z \in K_1$. Това също е еднозначен клон на $\log f(z)$ в K_1, и той е „слепен" с $\log_0 f(z)$, защото

$$\log_1 f(z) = \log_0 f(z),\ z \in K_0 \cap K_1$$

и в частност ($z_1 \in K_0 \cap K_1$)

$$\log_1 f(z_1) = \log_0 f(z_1) .$$

Аналогично в K_2 избираме еднозначен клон $\log_2 f(z)$ „слепен" с $\log_1 f(z)$, т.е.

$$\log_2 f(z) = \log_1 f(z),\ z \in K_1 \cap K_2$$

и в частност ($z_2 \in K_1 \cap K_2$)

$$\log_2 f(z_2) = \log_1 f(z_2) .$$

Продължавайки по индукция, във всеки кръг K_j, $j = 0,1,\dots n-1$ ще имаме еднозначен клон $\log_j f(z)$, така че

$$\log_j f(z) = \log_{j-1} f(z),\ z \in K_{j-1} \cap K_j,\ j = 1,2\dots,n-1$$

и в частност ($z_j \in K_{j-1} \cap K_j$)

$$\log_j f(z_j) = \log_{j-1} f(z_j),\ j = 1,2\dots,n-1 .$$

Тогава ($z_n = z_0$)

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{\gamma_j}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=0}^{n-1}\left[\log_j f(z_{j+1}) - \log_j f(z_j)\right] = \log_{n-1} f(z_0) - \log_0 f(z_0)\\ &= \ln|f(z_0)| + i\arg_{n-1} f(z_0) - \ln|f(z_0)| - i\arg_0 f(z_0) = i(\arg_{n-1} f(z_0) - \arg_0 f(z_0))\\ &= i[\arg_{n-1} f(\gamma(1)) - \arg_0 f(\gamma(0))] = i\Delta_\gamma \arg f(z).\end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi} .\blacksquare$$

Забележки 16.1.

(1) В доказателството, в резултат от „слепването” на еднозначни клонове се получава непрекъсната функция $\log f(\gamma(t))$ на $t \in [0,1]$, т.е. непрекъснат клон на $\log f$ върху γ (всъщност на $\arg f$, защото $\log f(\gamma(t)) = \ln|f(\gamma(t))| + i\arg f(\gamma(t))$). Но тя може да не е еднозначна функция на $z \in \gamma$, защото в точките на самопресичане на γ стойностите ѝ могат да се различават с константа.

(2) Изменението на аргумента на $f(z)$, когато z опише веднъж γ е целочислено кратно на 2π, защото е разлика от аргументи на едно и също число. Поради това $\Delta_\gamma \arg f(z)/2\pi$ е цяло число. Да си изясним геометричния му смисъл. Нека $\Gamma = f(\gamma)$. Когато z опише веднъж γ, векторът $w = f(z)$ описва затворената крива Γ. Тогава числото $\Delta_\gamma \arg f(z)/2\pi$ е равно на алгебричната сума от броя на оборотите на този вектор около нулата, като в тази сума оборотите в положителна посока (т.е. в посока обратна на движението на часовниковата стрелка) влизат със знак плюс, а тези в отрицателна посока-със знак минус.

Теорема 16.3. (Принцип за аргумента) Нека γ е затворена жорданова крива, f е функция холоморфна в околност на $\gamma \cup int\gamma$, с изключение на краен брой полюси в $int\gamma$ и $f(z) \neq 0, z \in \gamma$. Тогава

$$\frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi} = N_f - P_f,$$

където N_f е броят на нулите, а P_f -броят на полюсите на f в $int\gamma$, броени с техните кратности.

Доказателство. От теоремата за логаритмичният индикатор имаме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f .$$

По условие f е холоморфна в област $G, \gamma \cup int\gamma \subset G$, с изключение на краен брой полюси $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Нека $\Delta_k = K(b_k, \delta), k = 1,2,\ldots,n$ са кръгчета около полюсите, които не се пресичат и изцяло лежат в $int\gamma$. Сега прилагаме Теорема 16.2 за областта $D = G \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{\Delta_k}$ и получаваме

$$\frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi} = N_f - P_f . \blacksquare$$

Забележка 16.2. Предвид геометричното тълкуване на $\Delta_\gamma \arg f(z)/2\pi$ в предната забележка, принципът за аргумента може да се изтълкува и така: всяка нула на f завърта кривата $\Gamma = f(\gamma)$ около нулата в посока обратна на движението на часовниковата стрелка (толкова пъти, колкото е кратността ѝ) а всеки полюс на f я завърта в посока на движението на часовниковата стрелка (толкова пъти, колкото е кратността му).

Следствие 16.2. Нека γ е затворена жорданова крива, f е функция холоморфна в околност на $\gamma \cup int\gamma$ и $f(z) \neq 0, z \in \gamma$. Тогава

$$\frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi} = N_f ,$$

където N_f е броят на нулите, на f в $int\gamma$, броени с техните кратности.

Забележка 16.3. Вместо нулите на f може да се разглеждат корените на уравнението $f(z) = c, c \in \mathbb{C}, z \in int\gamma$. Затова е достатъчно в предните разсъждения да заменим f с $f(z) - c$. Така получаваме

$$N_c - P_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - c} dz = \frac{\Delta_\gamma \arg(f(z) - c)}{2\pi} ,$$

където N_c е броят на корените на уравнението $f(z) = c$ в $int\gamma$, броени с техните кратности.

Задачи

16.1. Докажете твърдение обратно на Лема 16.1: ако f е холоморфна в пробита околност на a и f'/f има прост полюс в a, то f има в тази точка или нула или полюс.

16.2*. Докажете, че при условията на теоремата за логаритмичния индикатор, ако $g(z)$ е холоморфна в околност на $\gamma \cup int\gamma$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) dz = \sum_{k=1}^{m} n_k g(a_k) - \sum_{j=1}^{n} p_j g(b_j) ,$$

където, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ са нулите на f, с кратности съответно $n_1, n_2, \ldots .n_m$, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ са полюсите на f, с кратности съответно $p_1, p_2, \ldots .p_n$, в $int\gamma$.

16.3. Нека f е холоморфна в околност на затворения кръг $\overline{K(0, R)}$ и уравнението $f(z) = c, c \in \mathbb{C}$ има единствен (еднократен) корен $z_1 \in K(0, R)$. Да се докаже, че

$$z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{z f'(z)}{f(z) - c} dz .$$

Лекция 17
Теорема на Руше. Принцип за запазване на областите.
Критерии за еднолистност.

В тази лекция, като следствие от принципа за аргумента ще изложим няколко резултата от геометричен характер. Първо ще докажем теоремата на Руше, която ни дава възможност да определяме броя на нулите на една холоморфна функция, заобикаляйки принципа за аргумента или най-малко като го прилагаме към по-проста функция. След това ще докажем един от най-важните факти за холоморфните функции, разглеждани като изображения - принципа за запазване на областите, а именно, че холоморфните функции изобразяват отворени множества върху отворени множества, т.е. холоморфните функции са отворени изображения. Накрая ще докажем два критерия за еднолистност на холоморфните функции.

Теорема на Руше

Теорема 17.1. (Руше) Нека γ е затворена жорданова крива, f и g са функции холоморфни в околност на $\gamma \cup int\gamma$ и $|g(z)|<|f(z)|, z\in\gamma$. Тогава функциите f и $f+g$ имат равен брой нули в $int\gamma$ (броени с кратностите им).

Доказателство. Преди всичко ще отбележим, че от $|g(z)|<|f(z)|, z\in\gamma$ следва, че за всяко $z\in\gamma$ $|f(z)|>0$ и $|f(z)+g(z)|\geq|f(z)|-|g(z)|>0$, т.е. f и $f+g$ нямат нули върху γ. Тогава от принципа за аргумента имаме

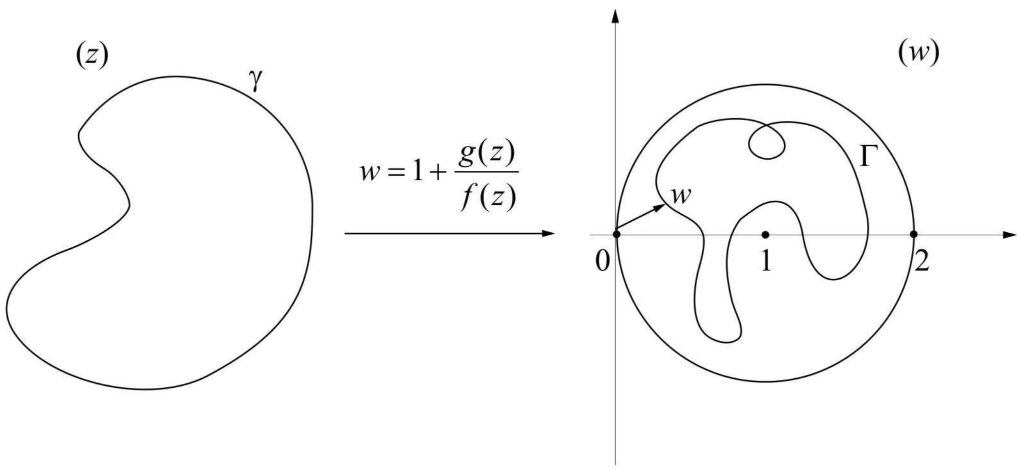
$$N_f=\frac{\Delta_\gamma \arg f(z)}{2\pi} \text{ и } N_{f+g}=\frac{\Delta_\gamma \arg(f(z)+g(z))}{2\pi}.$$

Да запишем $f(z)+g(z)=f(z)\left(1+\dfrac{g(z)}{f(z)}\right)$. Тогава

$$\arg(f(z)+g(z))=\arg f(z)+\arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) \tag{17.1}$$

и помним, че това равенство трябва да се разбира като съвпадане на множествата от стойности, които приемат многозначните функции от двете страни на равенството. Като конструираме, чрез „слепване” (както в доказателството на Теорема 16.2) непрекъснати клонове на $\arg f$ и на $\arg\left(1+\dfrac{g}{f}\right)$ върху γ, (17.1) определя непрекъснат клон на $\arg(f+g)$. За така избраните непрекъснати клонове е в сила равенството (17.1), откъдето

$$\Delta_\gamma \arg(f(z)+g(z))=\Delta_\gamma \arg f(z)+\Delta_\gamma \arg\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right).$$



фиг.17.1

Поради това, за да завършим доказателството, достатъчно е да покажем, че $\Delta_\gamma \arg\left(1+\dfrac{g(z)}{f(z)}\right)=0$. Действително, когато z опише веднъж γ, векторът $w=1+\dfrac{g(z)}{f(z)}$ описва затворена крива Γ, която се съдържа в кръга $K(1,1)$, защото $|w-1|=\dfrac{|g(z)|}{|f(z)|}<1,\ z\in\gamma$ (фиг.17.1). Ето защо той не обикаля нито веднъж около нулата. Следователно $\Delta_\gamma \arg(f(z)+g(z))=\Delta_\gamma \arg f(z)$ и $N_f = N_{f+g}$.■

Забележки 17.1.

(1) В теоремата на Руше условието $|g(z)|<|f(z)|,\ z\in\gamma$ не може да се замени с по-слабото $|g(z)|\le|f(z)|,\ z\in\gamma$. Например, ако $g(z)=-f(z)$, то $f(z)+g(z)\equiv 0$, независимо от това колко нули има f в $int\gamma$.

(2) Грубо казано според теоремата на Руше малки изменения на функцията върху γ не променят броят на нулите ѝ в $int\gamma$ (т.е.броят на нулите е инвариантен относно „малки деформации”).

Като следствие от теоремата на Руше, ще получим едно „геометрично” доказателство на основната теорема на алгебрата, което е коренно различно от доказателството, което изложихме в Лекция 11.

Следствие 17.1. (Основна теорема на алгебрата) Всеки неконстантен полином P_n от степен n с комплексни коефициенти има точно n комплексни нули (броени с кратностите им).

Доказателство. Нека $P_n(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_0=f(z)+g(z)$, където $f(z)=z^n$ и $g(z)=a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_0$. Имаме

$$|g(z)|\le|a_{n-1}||z|^{n-1}+\dots+|a_0|\le a\left(|z|^{n-1}+\dots+1\right)=a\frac{|z|^n-1}{|z|-1},$$

където $a = \max\limits_{0 \le k \le n-1} |a_k|$. Оттук за $|z| = 1 + a$ следва $|g(z)| \le |z|^n - 1 < |z|^n = |f(z)|$. От теоремата на Руше получаваме, че $P_n(z) = f(z) + g(z)$ има толкова нули в кръга $|z| < 1 + a$, колкото има и $f(z) = z^n$, т.е точно n. Така не само доказахме основната теорема на алгебрата, но и получихме оценка за модула на всяка от нулите на P_n.■

Пример 17.1. Да определим разположението на нулите на полинома $P(z) = z^4 + 6z + 3$. Нека $f(z) = z^4$ и $g(z) = 6z + 3$. Тогава за $|z| = 2$ имаме

$$|g(z)| \le 6|z| + 3 = 15 < 16 = |f(z)|$$

и от теоремата на Руше следва, че $P(z) = f(z) + g(z)$ има толкова нули в кръга $|z| < 2$, колкото има и $f(z) = z^4$, т.е. точно четири. Нека сега $P(z) = f_1(z) + g_1(z)$, където $f_1(z) = 6z$ и $g_1(z) = z^4 + 3$. За $|z| = 1$ имаме

$$|g_1(z)| \le |z|^4 + 3 = 4 < 6 = |f_1(z)|$$

и пак от теоремата на Руше следва, че $P(z) = f_1(z) + g_1(z)$ има толкова нули в единичния кръг колкото има $f_1(z) = 6z$, т.е. една. Следователно една от нулите на $P(z) = z^4 + 6z + 3$ лежи в единичния кръг, а останалите три са във венеца $1 < |z| < 2$.

Принцип за запазване на областите

Теорема 17.2. (Принцип за запазване на областите) Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и f е функция холоморфна и различна от константа в D. Тогава и $f(D)$ е област.

Доказателство. Ще докажем, че $f(D)$ е линейно свързано и отворено множество.

Свързаността е чисто топологичен факт и следва от непрекъснатостта на f. Действително, нека w_1 и w_2 са произволни точки от $f(D)$, а z_1 и z_2 са точки от D, такива че $f(z_1) = w_1$ и $f(z_2) = w_2$. Съществува крива $\gamma \subset D$, която свързва z_1 и z_2. Тогава $f(\gamma)$ е крива в $f(D)$, която свързва w_1 и w_2. Следователно $f(D)$ е линейно свързано множество.

Нека $w_0 \in f(D)$ е произволна точка и $z_0 \in D$ е такава, че $f(z_0) = w_0$. Ще докажем, че съществува околност на w_0, която лежи изцяло в $f(D)$. Тъй като f не е константа и нулите на холоморфната функция $f(z) - w_0$ са изолирани, то съществува $r > 0$, така че $f(z) - w_0 \ne 0$, за всяко $z \in \overline{K(z_0, r)}, z \ne z_0$. Нека $\gamma = \partial K(z_0, r)$ и $\delta = \min\limits_{\gamma} |f(z) - w_0|$. Имаме $\delta > 0$ и за всяко $w_1 \in K(w_0, \delta)$ неравенствата $|w_0 - w_1| < \delta \le |f(z) - w_0|$ са изпълнени за всяко $z \in \gamma$. Тогава от теоремата на Руше следва, че функцията $(w_0 - w_1) + (f(z) - w_0) = f(z) - w_1$ има толкова нули в $K(z_0, r)$, колкото има $f(z) - w_0$, т.е. поне една. Това означава, че за всяко $w_1 \in K(w_0, \delta)$ съществува $z_1 \in K(z_0, r)$, такова че $f(z_1) = w_1$, т.е. $K(w_0, \delta) \subset f(D)$. Следователно $f(D)$ е отворено множество. С това теоремата е доказана.■

Забележка 17.2. Този резултат няма аналог в реалния анализ. Така например функцията $f(x, y) = x^2 + y^2$ е безкрайно гладка (дори е реално аналитична) в $\mathbb{R}^2$, но $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty)$.

Следствие 17.2. Ако f е холоморфна в област D и някоя от функциите $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f, |f|$ и $\arg f$ (ако в D е отделим еднозначен клон на $\arg f$) е константа в D, то и f е константа в D.

Доказателство. От условието следва, че $f(D)$ е подмножество, съответно или на права успоредна на имагинерната ос, или на права успоредна на реалната ос, или на окръжност, или на лъч. Поради това $f(D)$ не е отворено множество и значи f е константа в D.■

Критерии за еднолистност

В доказателството на принципа за запазване на областите ние не използвахме цялата информация, която ни дава теоремата на Руше (и не ни беше необходима). Сега ще направим това.

Теорема 17.3. Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и f е функция холоморфна и различна от константа в D. Нека $w_0 \in f(D)$ е произволна точка и $z_0 \in D$ е n-кратна нула, $n \geq 1$, на $f(z) - w_0$. Тогава съществуват околности U на z_0 и $W \subset f(U)$ на w_0, така че за всяко $w \in W \setminus w_0$, функцията $f(z) - w$ има точно n различни нули в $U \setminus z_0$.

Доказателство. Следвайки доказателството на Принципа за запазване на областите, избираме $r > 0$, така че не само $f(z) - w_0 \neq 0$, но и $f'(z) \neq 0$ за всяко $z \in \overline{K(z_0, r)}, z \neq z_0$. Това е възможно, защото $f'(z)$ не е тъждествено нула (f не е константа) и нулите ѝ са изолирани точки. След това избираме $\delta = \min_{\gamma} |f(z) - w_0|$.Тогава околностите $U = K(z_0, r)$ и $W = K(w_0, \delta)$ са търсените. Всички нули на $f(z) - w$, $w \neq w_0$ са различни, защото $f'(z)$ няма нули в $U \setminus z_0$.■

Забележка 17.3. Тази теорема ни казва, че близко до точката z_0 поведението на f е като на полинома $(z - z_0)^n + w_0$.

Дефиниция 17.1. Функцията $f : D \to \mathbb{C}$ се нарича локално еднолистна в областта D, ако за всяко $z \in D$ съществува околност на z, в която f е еднолистна (т.е. $f(z_1) \neq f(z_2)$ за всеки $z_1 \neq z_2$ от тази околност).

Теорема 17.4. (Критерий за локална еднолистност) Нека $f : D \to \mathbb{C}$ е функция холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$. Тя е локално еднолистна в D, тогава и само тогава, когато $f'(z) \neq 0$ за всяко $z \in D$.

Доказателство. Нека f е локално еднолистна в D и да допуснем, че $f'(z_0) = 0$ за някое $z_0 \in D$. Това означава, че z_0 е поне двукратна нула на функцията $f(z) - w_0$, ($w_0 = f(z_0)$). Тогава (Теорема 17.3) съществуват околности U на z_0 и W на w_0, така че за всяко $w \in W \setminus w_0$, функцията $f(z) - w$ има поне 2 различни нули в $U \setminus z_0$, т.е. съществуват $z_1, z_2 \in U \setminus z_0$, $z_1 \neq z_2$, така че $f(z_1) = f(z_2)$ и f не е еднолистна в U - противоречие. Следователно $f'(z) \neq 0$ за всяко $z \in D$.

Обратно, нека $f'(z) \neq 0$ за всяко $z \in D$. Тогава (Теорема 17.3, $n = 1$) f е еднолистна в $K(z, r)$, $z \in D$.■

Забележки 17.4.

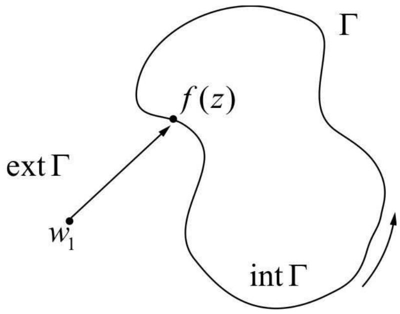
(1) Ако $f'(z_0) \neq 0, z_0 \in D$, то f изобразява еднолистно и конформно $K(z_0, r)$ върху област съдържаща $f(z_0)$. Това може да се счита за локална версия на теоремата за запазване на областите.
(2) Този критерий е чисто „локален”. Така например производната на цялата функция e^z няма нули в $\mathbb{C}$, но e^z не е еднолистна в $\mathbb{C}$. Ясно е обаче, че ако f е холоморфна и еднолистна в област $D \subseteq \mathbb{C}$, то $f'(z) \neq 0$ за всяко $z \in D$.

Теорема 17.5. (Глобален критерий за еднолистност) Нека γ е затворена жорданова крива и f е функция холоморфна в околност на $\gamma \cup int\gamma$. Ако f изобразява взаимно еднозначно γ върху крива Γ, то f е еднолистна в $int\gamma$ и $f(int\gamma) = \operatorname{int}\Gamma$.

Доказателство. Преди всичко ще отбележим, че тъй като f е еднолистна върху γ, то Γ е затворена жорданова крива. Първо, ще докажем, че за всяко $w_0 \in \operatorname{int}\Gamma$ съществува единствено $z_0 \in int\gamma$, така че $w_0 = f(z_0)$. За целта ще приложим принципа за аргумента към функцията $F(z) = f(z) - w_0$. Имаме

$$N_F = \frac{\Delta_\gamma \arg F(z)}{2\pi}.$$

Тъй като f е еднолистна върху γ, когато z опише веднъж γ, $f(z)$ описва Γ само веднъж. Това означава, че векторът $F(z) = f(z) - w_0$ прави само един оборот около точката w_0. Тогава или $\Delta_\gamma \arg F(z) = 2\pi$, или $\Delta_\gamma \arg F(z) = -2\pi$. Ако $\Delta_\gamma \arg F(z) = -2\pi$, то $\Delta_\gamma \arg F(z)/2\pi = -1$. Но това не е възможно, защото f, а оттук и F, няма полюси в $int\gamma$. Следователно $N_F = \Delta_\gamma \arg F(z)/2\pi = 1$ и значи за всяко $w_0 \in \operatorname{int}\Gamma$ съществува единствено $z_0 \in int\gamma$, така че $w_0 = f(z_0)$. Така показахме, че $f(int\gamma) \supset \operatorname{int}\Gamma$. За да завършим доказателството остава да покажем, че е в сила и обратното включване, т.е. $f(int\gamma) \subset \operatorname{int}\Gamma$.



фиг.17.2

Да допуснем, че съществува $w_1 \in f(int\gamma)$, но $w_1 \notin \operatorname{int}\Gamma$. Ако $w_1 \in ext\,\Gamma$, то (фиг.17.2) когато z опише веднъж γ, $f(z)$ описва Γ само веднъж и векторът $f(z) - w_1$ не прави нито един пълен оборот около точката w_1. Поради това $\Delta_\gamma \arg(f(z) - w_1) = 0$ и значи $f(z) - w_1$ няма нули в $int\gamma$, т.е. $w_1 \notin f(int\gamma)$ - противоречие. Ако $w_1 \in \Gamma$, тъй като $f(int\gamma)$ е отворено множество (Принцип за запазване на областите), то $w_1 \in f(int\gamma)$ заедно със своя околност. В нея ще има и точки, които са от $ext\,\Gamma$, а това, както се убедихме по-горе, не е възможно. Следователно $f(int\gamma) = \operatorname{int}\Gamma$ и f е еднолистна в $\operatorname{int}\gamma$.■

Задачи

17.1. Нека $f(z)$ е холоморфна в околност на затворения единичен кръг $\{z : |z| \le 1\}$ и $|f(z)| < 1$ за $|z| = 1$. Да се докаже, че за всяко $n = 1,2,...$ уравнението $f(z) = z^n$ има точно n корена в $\{z : |z| < 1\}$ и в частност $f(z)$ има точно една неподвижна точка.

17.2. Нека γ е затворена жорданова крива, f и g са функции холоморфни в околност на $\gamma \cup \operatorname{int}\gamma$ и $|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|, z \in \gamma$. Да се докаже, че функциите f и g имат равен брой нули в $int\gamma$ (броени с кратностите им).

17.3. (Теорема на Хурвиц) Нека $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ е редица от функции холоморфни в областта D и $f_n \rightrightarrows f$ равномерно върху компактните подмножества на D. Да се докаже, че ако γ е затворена жорданова крива, $\gamma \cup int\gamma \subset D$ и $f(z) \ne 0, z \in \gamma$, то съществува ν, че за $n > \nu$ функциите f_n имат толкова нули в $int\gamma$, колкото има f. Като следствие заключете, че ако функциите f_n са еднолистни и $f \neq const$, то и f е еднолистна.

Упътване. Нека $\varepsilon = \min\limits_{z\in\gamma} |f(z)|$. Изберете ν, така че $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, z \in \gamma$ и приложете теоремата на Руше към функциите $f_n - f$ и f.

17.4. Нека $f(z)$ е холоморфна в област D и $z_0 \in D$. Да се докаже, че във всяка околност на z_0 съществуват точки $z_1 \neq z_2$, така че $f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1)$.

Упътване. Разсъждавайте за функцията $g(z) = f(z) - z.f'(z_0)$.

17.5. а) Да се докаже, че уравнението $tg\, z = z, z \in \mathbb{C}$ има само реални корени.

б) Ако означим с x_n единствения корен на уравнението $tg\, x = x$ в интервала $\big((n-1/2)\pi, (n+1/2)\pi\big), n = 1, 2, \ldots$, да се докаже, че $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{10}$.

Упътване. а) Докажете, че функцията $tg\, z$ е ограничена в областта $D_\delta = \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} K(z_n, \delta)$, където $z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ са полюсите на $tg\, z$ и $0 < \delta < \pi/2$ (сравни с Лема 15.1). След това използвайте теоремата на Руше за да преброите броя на нулите на $tg\, z - z$ в кръга $\{|z| < n\pi\}$ за достатъчно големи $n \in \mathbb{N}$ и го сравнете с броя на реалните нули в този кръг.

б) Приложете зад.16.2 към функциите $f(z) = \sin z - z\cos z$ и $g(z) = \frac{1}{z^2}$ в областта $D = \{\varepsilon < |z| < n\pi\}$ и след това направете граничен преход при $\varepsilon \to 0, n \to \infty$.

Лекция 18
Принцип за максимума на модула. Лема на Шварц.
Автоморфизмите на единичния кръг.

В тази лекция, като следствие от принципа за запазване на областите ще получим още един основен принцип в Комплексния анализ – Принцип за максимума на модула. След това ще докажем лемата на Шварц и с нейна помощ ще определим всички автоморфизми на единичния кръг.

Принцип за максимума на модула. Лема на Шварц

Теорема 18.1. (Принцип за максимума на модула) Ако f е холоморфна и различна от константа в област $D \subseteq \mathbb{C}$, то $|f|$ няма локален максимум в D и в частност не приема най-голяма стойност в D.

Доказателство. Нека $z_0 \in D$, $w_0 = f(z_0)$ и $K(z_0, r) \subset D$ е произволна околност на z_0. Тъй като $f(K(z_0,r))$ е отворено множество (Принцип за запазване на областите), то съществува кръг $K(w_0, \delta) \subset f(K(z_0, r))$. Ясно е, че в този кръг има точки w, за които $|w| > |w_0|$ (например, ако $w_0 = \mathrm{R}e^{i\theta}$, то $w = w_0 + \rho e^{i\theta}, 0 < \rho < \delta$ са такива) и тогава съществува точка $z \in K(z_0, r)$, така че $|f(z)| > |f(z_0)|$, т.е. $|f|$ няма локален максимум в $z_0 \in D$.■

Теорема 18.2. Ако $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена област и f е холоморфна в D и непрекъсната в $\overline{D}$, то $|f|$ достига най-голямата си стойност върху границата на D.

Доказателство. Тъй като $\overline{D}$ е компакт и f (а оттук и $|f|$) е непрекъсната функция в $\overline{D}$, то $|f|$ достига най-голяма стойност в $\overline{D}$. Ако f не е константа, тази стойност не се достига в D. Ако f е константа твърдението е тривиално. Следователно най-голямата стойност на $|f|$ се достига върху ∂D.■

Забележка 18.1. Тази теорема не е вярна, ако D не е ограничена област. Така например, ако $D = \{z : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ и $f(z) = e^z$, то $|f(z)| = 1, z \in \partial D = \{z : z = iy, y \in \mathbb{R}\}$, докато $|f(x)| = e^x > 1$ за всяко $x > 0$.

Тъй като минималната стойност на $|f|$ е 0, то от принципа за максимума директно получаваме:

Следствие 18.1. (Принцип за минимума на модула) Ако f е холоморфна и различна от константа в област $D \subseteq \mathbb{C}$ и $f(z) \neq 0, z \in D$ то $|f|$ няма локален минимум в D и в частност не приема най-малка стойност в D.

Доказателство. Прилагаме принципа за максимума към функцията $g(z) = \frac{1}{f(z)}$.■

Следствие 18.2. Ако $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена област и f е холоморфна в D, непрекъсната в $\overline{D}$ и $f(z) \neq 0, z \in D$, то $|f|$ достига най-малката си стойност върху границата на D.

Принципът за максимума е мощно средство за получаване на оценки на ръста на модула на холоморфните функции. Ще демонстрираме това като докажем следния важен резултат, известен като лема на Шварц.

Теорема 18.3. (Лема на Шварц) Нека f е холоморфна в единичния кръг $U = \{z : |z| < 1\}$, $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1, z \in U$. Тогава

(18.1) $$|f(z)| \leq |z|, z \in U;$$

(18.2) $$|f'(0)| \leq 1.$$

При това, ако в (18.1) за някое $z \in U \setminus 0$, или в (18.2), има равенство, то $f(z) = e^{i\theta} z, \theta \in \mathbb{R}$.

Доказателство. Нека $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$ е тейлъровото развитие на f в U около нулата. Тъй като $f(0) = 0$, то $a_0 = 0$ и $f(z) = zg(z)$, където

$$g(z) = a_1 + a_2 z + \cdots + a_n z^{n-1} + \cdots.$$

Функцията $g(z)$ е холоморфна в U, защото е сума на степенен ред със същия радиус на сходимост като този на тейлъровия ред на f, и $g(0) = a_1 = f'(0)$. Нека $z \in U$ е произволна точка и $r < 1$ е такова, че $|z| < r$. Тъй като g е непрекъсната в $|z| \leq r$, от Теорема 18.2 имаме, че

$$|g(z)| \leq \max_{|\zeta|=r} |g(\zeta)| = \frac{\max\limits_{|\zeta|=r} |f(\zeta)|}{|\zeta|} \leq \frac{1}{r}.$$

Оттук при $r \to 1$ получаваме $|g(z)| \leq 1$, откъдето $|f(z)| \leq |z|$ и също $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$. Ако за някое $z_0 \in U \setminus 0$, $|f(z_0)| = |z_0|$ или $|f'(0)| = 1$, то или $|g(z_0)| = 1$, или $|g(0)| = 1$. И в двата случая $|g|$ приема най-голяма стойност в U и от принципа за максимума, следва, че g е константа. Тогава $f(z) = \lambda z, |\lambda| = 1$, т.е. $f(z) = e^{i\theta} z, \theta \in \mathbb{R}$.■

Забележка 18.1. За различни обобщения на лемата на Шварц вж.[15] и [16].

Автоморфизмите на единичния кръг.

Лемата на Шварц е изключително полезна в теорията на конформните изображения. Тук ще приложим лемата на Шварц, за да опишем всички автоморфизми на единичния кръг.

Дефиниция 18.1. Автоморфизъм на областта $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ се нарича всяко взаимно-еднозначно и конформно изображение на D в себе си.

Множеството от всички автоморфизми на D се означава с $AutD$ и то е група относно операцията суперпозиция. В Лекция 4 (Твърдение 4.12) описахме групата от всички дробно-линейни автоморфизми на единичния кръг $U = \{z : |z| < 1\}$. Сега ще покажем, че с това се изчерпват всичките автоморфизми на U.

Теорема 18.4. $AutU = \left\{ z \to e^{i\theta} \dfrac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}, \theta \in \mathbb{R}, z_0 \in U \right\}$.

Доказателство. Нека f е един автоморфизъм на U и $f(0) = \alpha$. Нека

$$\lambda(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

е дробно-линеен автоморфизъм на U, за който $\lambda(\alpha) = 0$. Тогава $g(z) = \lambda \circ f(z)$ е автоморфизъм на U, като $g(0) = 0$. От лемата на Шварц имаме

(18.3) $\qquad |g(z)| \leq |z|$ за всяко $z \in U$.

Освен това $g^{-1}(0) = 0$ и прилагайки лемата на Шварц, този път към g^{-1}, получаваме

$$|g^{-1}(w)| \leq |w| \text{ за всяко } w \in U.$$

Замествайки в това неравенство $w = g(z)$ имаме

$$|z| \leq |g(z)| \text{ за всяко } z \in U.$$

Оттук и от (18.3) следва $|g(z)| = |z|$ за всяко $z \in U$. Отново от лемата на Шварц заключаваме, че $g(z) = e^{i\theta} z$, за някое $\theta \in \mathbb{R}$. Тогава $f(z) = \lambda^{-1} \circ g(z) = \lambda^{-1}(e^{i\theta} z)$ е дробно-линеен автоморфизъм на U. С това твърдението е доказано.∎

Задачи

18.1. Да се докаже, че ако $D = ext\gamma$, където γ е затворена жорданова крива и f е холоморфна и ограничена в D, и непрекъсната в $\overline{D}$, то $|f|$ достига най-голямата си стойност върху $\partial D = \gamma$.

Упътване. Изобразете D еднолистно и конформно в ограничена област чрез трансформацията $w = 1/(z - z_0),\ z_0 \in int\gamma$ и разсъждавайте за функцията $g(w) = f(z_0 + 1/w)$.

18.2. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена област, функцията f е холоморфна в D и непрекъсната в $\overline{D}$. Да се докаже, че ако $|f(z)| = const,\ z \in \partial D$, то или $f(z) = const,\ z \in D$ или $f(z)$ има поне една нула в D.

18.3. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена област и f и g са холоморфни в D и непрекъснати в $\overline{D}$, Да се докаже, че $|f| + |g|$ достига най-голямата си стойност върху границата на D.

18.4. Нека $f(z)$ е цяла функция и $|f(z)| \le \dfrac{1}{|\operatorname{Re} z|}$ за всяко $z \in \mathbb{C}$. Да се докаже, че $f(z) = 0$ за всяко $z \in \mathbb{C}$.

Упътване. За всяко $R > 0$ разгледайте функцията $g(z) = (z - iR)(z + iR)f(z)$ и докажете, че за $|z| = R$ е в сила неравенството $|g(z)| \le 2R$.

18.5. Нека f е холоморфна в единичния кръг $U = \{z : |z| < 1\}$, $|f(z)| \le 1, z \in U$ и $z = 0$ е нейна n- кратна нула. Да се докаже, че

(1) $$|f(z)| \le |z|^n, z \in U;$$

(2) $$|f^{(n)}(0)| \le n!.$$

При това, ако в (1) за някое $z \in U \setminus 0$, или в (2), има равенство, то

$$f(z) = e^{i\theta} z^n, \theta \in \mathbb{R}.$$

Лекция 19
Глобална теорема на Коши-хомологична версия

В тази лекция ще изложим една по-обща версия на теоремата на Коши и на формулата на Коши, следвайки елегантното доказателство на J.Dixon [8].

Според класическата теорема на Коши-Гурса (Теорема 8.4 от Лекция 8), ако $D \subset \mathbb{C}$ е едносвързана област ,то $\int_\gamma f(z)dz = 0$ за всяка затворена крива $\gamma \subset D$ и за всяка холоморфна в D функция f. Естествено възниква въпроса: ако $D \subset \mathbb{C}$ е произволна област, как да опишем затворените криви $\gamma \subset D$, за които $\int_\gamma f(z)dz = 0$, за всяка холоморфна в D функция f? Частичен отговор дава Теорема 8.7 (Лекция 8) - ако $\gamma \subset D$ е жорданова крива и $int\gamma \subset D$, то $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Условието $int\gamma \subset D$, всъщност означава, че γ не обикаля около нито една точка от допълнението $\mathbb{C} \setminus D$. Но, ако γ не е жорданова, какво да наречем вътрешност на γ и как да мерим колко пъти тя обикаля около дадена точка $z \notin \gamma$? Всъщност ние вече разполагаме с подходящ инструмент. Ако дефинираме (както в Лекция 16, Теорема 16.2) непрекъснат клон на $\arg(\zeta - z), \zeta \in \gamma$ върху γ, ние можем да преброим колко пъти γ обикаля около z като следим за изменението $\Delta_\gamma \arg(\zeta - z)$ на $\arg(\zeta - z)$, когато ζ опише веднъж γ. Тогава всеки път, когато γ направи обиколка около z, числото $\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg(\zeta - z)$ ще се увеличи, или намали с 1. Сега предвид Теорема 16.2 (с $f(\zeta) = \zeta - z$) имаме

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg(\zeta - z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Така достигаме до следната дефиниция:

Дефиниция 19.1. Нека $\gamma \subset \mathbb{C}$ е затворена крива. Индекс на γ относно точката $z \notin \gamma$ се нарича числото

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Ясно. че $n(\gamma^-, z) = -n(\gamma, z)$, $z \notin \gamma$.

Пример 19.1. Нека $k \in \mathbb{Z} \setminus 0$ и $\gamma_k : \zeta = \gamma_k(t) = z_0 + re^{i2k\pi t}, t \in [0,1]$ е окръжността с център z_0 и радиус $r > 0$, описана k пъти (в посока обратна на движението на часовниковата стрелка, ако $k>0$, и в посока на движението на часовниковата стрелка, ако $k<0$). Тогава

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\begin{cases}k, |z-z_0|<r\\ 0, |z-z_0|>r\end{cases}.$$

Действително, ако $|z-z_0|>r$, твърдението следва от теоремата на Коши (Теорема 8.7 от Лекция 8). Ако $|z-z_0|<r$ да опишем около z окръжност $C_k:\zeta=z+\varepsilon e^{i2k\pi t}, t\in[0,1]$, където $0<\varepsilon<(r-|z-z_0|)/2$. Тогава $\{\zeta:|\zeta-z|\le\varepsilon\}\subset\{\zeta:|\zeta-z_0|<r\}$ и от теоремата на Коши за сложен контур имаме:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k\cup C_k^-}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=0\Leftrightarrow\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{i2k\pi\varepsilon e^{i2k\pi t}}{\varepsilon e^{i2k\pi t}}dt=k.$$

Следващата лема съдържа две основни свойства на индекса $n(\gamma,z)$, разглеждан като функция на z, които ще използваме по-нататък.

Лема 19.1. Нека $\gamma\subset\mathbb{C}$ е затворена крива. Тогава:

(1) ако $z\notin\gamma$, то $n(\gamma,z)\in\mathbb{Z}$;

(2) $n(\gamma,z)$ е константа във всяка свързана компонента на допълнението $\mathbb{C}\setminus\gamma$ и е тъждествено нула в неограничената му компонента.

Доказателство. Преди всичко ще припомним, че носителят на γ е компакт, допълнението му $\mathbb{C}\setminus\gamma$ е отворено и неограничено множество и е обединение на (изброимо много) непресичащи се области, точно една от които е неограничена.

(1) Ще изложим доказателство само за случая на гладка крива.

Да фиксираме $z\notin\gamma$ и нека $\gamma:\zeta=\gamma(t):[0,1]\to\mathbb{C}$ е една параметризация на γ. Дефинираме функцията $F:[0,1]\to\mathbb{C}$

$$F(s)=\int_0^s\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}dt.$$

Имаме $F(0)=0$, $F(1)=2\pi i n(\gamma,z)$ и за да докажем, че $n(\gamma,z)\in\mathbb{Z}$, достатъчно е да покажем, че $e^{F(1)}=1$.

Действително, функцията F е диференцируема (Теорема на Лайбниц-Нютон) и

$$F'(s)=\frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}$$

Тогава (сравни с доказателството за съществуване на еднозначен клон на логаритъма-Лема 16.2)

$$\left((\gamma(s)-z)e^{-F(s)}\right)' = 0 ,$$

така че $e^{F(s)} = c(\gamma(s)-z)$, където $c \neq 0$ е константа. Сега от $\gamma(0)=\gamma(1)$ следва

$$e^{F(1)} = c(\gamma(1)-z) = c(\gamma(0)-z) = e^{F(0)} = 1 .$$

С това твърдението в (1) е доказано.

(2) Ще докажем, че функцията $n(\gamma,z)$ е непрекъсната в $\mathbb{C}\setminus\gamma$. Нека $z_0 \notin \gamma$ и $m = dist(z_0,\gamma)$. Тогава за всяко $\zeta \in \gamma$ и всяко z, за което $|z-z_0| < m/2$ имаме

$$|\zeta - z| = |\zeta - z_0 + z_0 - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| \geq m - m/2 = m/2 ,$$

откъдето следва

$$|n(\gamma,z)-n(\gamma,z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right] d\zeta\right| = \frac{|z-z_0|}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\right|$$
$$\leq \frac{|z-z_0|}{2\pi}\int_\gamma \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|} \leq \frac{|z-z_0|}{2\pi}\frac{l(\gamma)}{m.m/2} \xrightarrow[z\to z_0]{} 0.$$

Така $n(\gamma,z)$ е непрекъсната функция в $\mathbb{C}\setminus\gamma$ и понеже приема само целочислени стойности, тя е константа във всяка свързана компонента на $\mathbb{C}\setminus\gamma$. В неограничената компонента тази константа е нула, защото, ако изберем R, така че $\gamma \subset K(0,R)$, то за достатъчно големи $|z|$ имаме, че

$$|n(\gamma,z)| \leq \frac{l(\gamma)}{2\pi(|z|-R)} < 1 . \blacksquare$$

Забележка 19.1. Всъщност, както доказахме в Лекция 9 (вж. Забележка 9.3) функцията $n(\gamma,z)$ е холоморфна в $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

Използвайки индекса на γ, можем да дефинираме какво би трябвало да се разбира под „вътрешност” и „външност” на γ.

Дефиниция 19.2. Ако $\gamma : z = \gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ е затворена крива, то

$$int\gamma := \{z \in \mathbb{C}\setminus\gamma : n(\gamma,z) \neq 0\} ,$$

$$ext\gamma := \{z \in \mathbb{C}\setminus\gamma : n(\gamma,z) = 0\} .$$

Ясно е, че $\mathbb{C} = int\gamma \cup \gamma \cup ext\gamma$. В примера, който разгледахме по-горе тази дефиниция съвпада с нашата интуитивна представа за „вътрешност” и „външност” на една крива:

$$\operatorname{int}\gamma_k = \{z\in\mathbb{C}\setminus\gamma_k : n(\gamma_k, z)\neq 0\} = \{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<r\}$$
$$ext\gamma_k = \{z\in\mathbb{C}\setminus\gamma_k : n(\gamma_k, z) = 0\} = \{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|>r\}.$$

Дефиниция 19.3. Една затворена крива $\gamma\subset D$ се нарича хомологична на нула относно D, ако за всяко $z\notin D$, $n(\gamma,z)=0 \Leftrightarrow \operatorname{int}\gamma\subset D$. Ще пишем $\gamma\sim 0$.

Теорема 19.1. (Глобална теорема на Коши-хомологична версия) Нека $D\subset\mathbb{C}$ е област и $\gamma\subset D$ е затворена крива. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) (**Глобална формула на Коши**) За всяка холоморфна в D функция f и всяко $z\in D\setminus\gamma$

$$n(\gamma,z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta;$$

(2) $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta=0$, за всяка холоморфна в D функция f;

(3) $\gamma\sim 0$.

Доказателство. (1)$\Rightarrow$(2) Нека $z\in D\setminus\gamma$ и $g(\zeta)=(\zeta-z)f(\zeta)$. Тогава $g(\zeta)$ е холоморфна в D, $g(z)=0$ и от глобалната формула на Коши имаме

$$\int_\gamma f(\zeta)d\zeta=\int_\gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i\, n(\gamma,z)g(z)=0.$$

(2)$\Rightarrow$(3) За всяко $z\notin D$ функцията $1/(\zeta-z)$ е холоморфна в D и

$$n(\gamma,z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z}=0,$$

т.е. $\gamma\sim 0$.

(3)$\Rightarrow$(1) Нека $\gamma\subset D$ е затворена крива, $\gamma\sim 0$ и f е холоморфна в D функция. Предвид дефиницията на $n(\gamma,z)$ глобалната формула на Коши приема следната еквивалентна форма

$$\int_\gamma\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta=0,\ \text{за всяко } z\in D\setminus\gamma. \tag{19.1}$$

Идеята е да покажем, че интегралът в (19.1) е холоморфна функция на $z\in D\setminus\gamma$, която може да се продължи до цяла функция. След това ще покажем, че тя е ограничена и ще приложим теоремата на Лиувил.

Да започнем с изследването на подинтегралната функция в (19.1) като функция на две променливи. По- точно ще докажем, че функцията

$$g(z,\zeta)=\begin{cases}\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}, & \zeta\neq z\\ f'(z), & \zeta=z\end{cases}$$

е непрекъсната в $D\times D$ и е холоморфна по всяка от променливите. Ясно е, че $g(z,\zeta)$ е непрекъсната, ако $\zeta\neq z$. За да докажем непрекъснатостта и по диагонала да разгледаме разликата $g(z,\zeta)-g(z_0,z_0)$. Имаме:
а) ако $\zeta=z$

$$g(z,z)-g(z_0,z_0)=f'(z)-f'(z_0);$$

б) ако $\zeta\neq z$

$$g(z,\zeta)-g(z_0,z_0)=\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}-f'(z_0)=\frac{1}{\zeta-z}\int\limits_{[z,\zeta]}(f'(w)-f'(z_0))dw.$$

Сега да използваме непрекъснатостта на f'. За всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, така че

$$|f'(w)-f'(z_0)|<\varepsilon$$

за всяко $w\in K(z_0,\delta)\subset D$. Тогава за всяко $(z,\zeta)\in K(z_0,\delta)\times K(z_0,\delta)$ имаме
в случай а)

$$|g(z,z)-g(z_0,z_0)|<\varepsilon$$

и в случай б)

$$|g(z,\zeta)-g(z_0,z_0)|\leq\frac{1}{|\zeta-z|}\int\limits_{[z,\zeta]}|f'(w)-f'(z_0)|\,dw<\frac{\varepsilon}{|\zeta-z|}|\zeta-z|=\varepsilon\quad.$$

Това доказва, че функцията $g(z,\zeta)$ е непрекъсната в $D\times D$.

Тъй като f е холоморфна в D, то при фиксирано $\zeta=\zeta_0\in D$ функцията $g(z,\zeta_0)$ е холоморфна в $D\backslash\zeta_0$, непрекъсната е в D и следователно (Т.(Риман)) е холоморфна в D. Аналогично при фиксирано z, $g(z,\zeta)$ е холоморфна функция (на ζ) в D.

Нека $D'=\{z\in\mathbb{C}:n(\gamma,z)=0\}$. Ясно е, че $\mathbb{C}\setminus D\subset D'$ и $\mathbb{C}=D\cup D'$. Дефинираме функцията

$$h(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma g(z,\zeta)d\zeta, & z\in D\\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, & z\in D'\end{cases}$$

Ще докажем, че $h(z)$ е цяла функция. Преди всичко, ще отбележим, че тя е добре дефинирана, защото ако $z\in D\cap D'$ ($\gamma\not\subset D\cap D'$), то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z,\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{f(z)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - f(z)n(\gamma,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\ .$$

От дефиницията на $h(z)$ следва (виж Лекция 9, Теорема 9.3 и забележката след нея), че тя е холоморфна в $D\backslash\gamma$ и в D'. Остава да докажем, че тя е холоморфна и върху γ. Действително, нека $z_0 \in \gamma$, $\delta > 0$ е такова, че $K(z_0,\delta) \subset D$ и $\sigma \subset K(z_0,\delta)$ е произволна затворена крива. Имаме

$$\int_\sigma h(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \left(\int_\gamma g(z,\zeta)d\zeta\right)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\int_\sigma g(z,\zeta)dz\right)d\zeta.$$

В повторния интеграл можем да сменим реда на интегриране, защото той е сума на повторни риманови интеграли от реалнозначни функции непрекъснати върху правоъгълника, образуван от параметричните интервали на кривите γ и σ, и можем да приложим теоремата на Фубини. Тъй като при фиксирано ζ, $g(z,\zeta)$ е холоморфна функция на z в D, то от теоремата на Коши–Гурса имаме

$$\int_\sigma g(z,\zeta)dz = 0 \text{ и следователно } \int_\sigma h(z)dz = 0.$$

Сега от теоремата на Морера следва, че $h(z)$ е холоморфна в $z_0 \in \gamma$.

Така доказахме, че $h(z)$ е цяла функция. Остана да докажем, че тя е тъждествено нула. Нека $R > 0$ е такова, че γ и ограничените компоненти на $\mathbb{C}\backslash\gamma$ се съдържат в кръга $|z| < R$. Тогава, ако $|z| > R$, то $n(\gamma,z) = 0$, т.е. $z \in D'$ и

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\ .$$

Тогава

$$|h(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}d\zeta \le \frac{\max_\gamma |f(\zeta)|}{2\pi(|z|-R)} l(\gamma) \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0\,.$$

От теоремата на Лиувил следва, че $h(z) \equiv 0, z \in \mathbb{C}$. С това теоремата е доказана.■

Забележка 19.2. Ако D е едносвързана област то всяка затворена крива $\gamma \subset D$ е хомологична на нула. Действително, тъй като $\overline{\mathbb{C}}\backslash D$ е свързано множество и се съдържа в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\gamma$, то ще се съдържа в една единствена свързана компонента на $\overline{C} \setminus \gamma$, а именно в неограничената компонента. Сега от Лема 19.1 следва, че за всяко $z \notin D$, $n(\gamma, z) = 0$, т.е. $\gamma \sim 0$. Вярно е и обратното (вж. [1], Т.14, стр.132). Така, ако D е едносвързана област, условието (3) в глобалната теорема на Коши автоматично е изпълнено и като следствия получаваме класическите теорема и формула на Коши.

Изложеното по-горе доказателство се пренася без изменение и при интегриране върху малко по-общи обекти от затворените криви.

Дефиниция 19.4. Нека $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ са затворени криви и $m_1, m_2, \dots, m_p$ са цели числа. Формалната сума $\Gamma = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + \dots + m_p\gamma_p$ се нарича цикъл. Под носител на Γ се разбира $\Gamma^* = \bigcup_{k=1}^{p} \gamma_k^*$, и за всяка непрекъсната функция f върху Γ^*

$$\int_\Gamma f(z)dz := \sum_{k=1}^{p} m_k \int_{\gamma_k} f(z)dz$$

Под индекс на Γ относно $z \notin \Gamma^*$ се разбира

$$n(\Gamma, z) = \sum_{k=1}^{p} m_k\, n(\gamma_k, z).$$

Ако γ е затворена крива цикълът 1γ съвпада с γ , а цикълът -1γ с γ^-. Освен това $m_k\gamma_k$ е сума на m_k копия на γ_k, ако $m_k > 0$ и е сума на $-m_k$ копия на -1γ , ако $m_k < 0$.

Ясно е, че цикъла не се променя, ако премахнем или добавим събираемо $m_k\gamma_k$ с $m_k = 0$. Поради това два различни цикъла могат да се изразят чрез едни и същи криви и можем да дефинираме сумата им.

Дефиниция 19.5. Ако $\Gamma = \sum_{k=1}^{p} m_k\gamma_k$ и $\Gamma' = \sum_{k=1}^{p} m'_k\gamma_k$ са два цикъла, то

$$\Gamma + \Gamma' := \sum_{k=1}^{p} (m_k + m'_k)\gamma_k$$

Ясно е, че $n(\Gamma + \Gamma', z) = n(\Gamma, z) + n(\Gamma', z)$ и $n(-\Gamma, z) = -n(\Gamma, z)$ ($-\Gamma = \sum_{k=1}^{p} (-m_k)\gamma_k$).

Теорема 19.2. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област и $\Gamma \subset D$ е цикъл. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) За всяка холоморфна в D функция f и всяко $z \in D \setminus \Gamma$

$$n(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \;;$$

(2) $\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta = 0$, за всяка холоморфна в D функция f ;

(3) $\Gamma \sim 0$ ($n(\Gamma, z) = 0, z \notin D$).

Забележка 19.3. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена, крайно-свързана област, чиято граница е съставена от краен брой непресичащи се затворени жорданови криви. $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$, като за определеност, нека γ_0 отделя D от безкрайната точка и съдържа във вътрешността си $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Тогава цикълът $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \dots - \gamma_n$ е хомологичен на нула относно D и като следствия получаваме теоремата и формулата на Коши ($n(\Gamma, z) = 1,\ z \in D$) за сложен контур.

Теорема 19.3. (Глобална теорема за резидуумите) Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област и Γ е цикъл хомологичен на нула относно D (т.е. $n(\Gamma, z) = 0, z \notin D$). Нека функцията f е холоморфна в D с изключение на краен брой точки $z_k \notin \Gamma, k = 1, 2 \dots, n$. Тогава

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} n(\Gamma, z_k) \operatorname{Re}s(f, z_k) .$$

Доказателство. Нека $\delta > 0$ е такова, че затворените кръгове $\overline{K(z_k, \delta)}$ се съдържат в $D \setminus \Gamma$ и нямат общи точки помежду си. Нека $C_k = \partial K(z, \delta)$ (положително ориентирана) и $m_k = n(\Gamma, z_k)$. Да разгледаме областта

$$D_1 = D \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

и цикъла

$$\Gamma_1 = \Gamma - \sum_{k=1}^{n} m_k C_k .$$

Функцията f е холоморфна в D_1, цикъла Γ_1 се съдържа в D_1 и $n(\Gamma_1, z) = 0$ за всяко $z \notin D_1$. От Теорема 19.2 имаме, че

$$\int_{\Gamma_1} f(\zeta)d\zeta = 0 ,$$

което е еквивалентно на

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} m_k \int_{C_k} f(z)dz .$$

Тъй като

$$\int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Re}s(f, z_k),\ k = 1, 2, \dots, n ,$$

то с това теоремата е доказана.■

Задачи

19.1. Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област, $\gamma \subset D$ е затворена крива и $\gamma \sim 0$. Да се докаже, че за всяко $z \in D \setminus \gamma$ и $k = 0,1,2\ldots$

$$n(\gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \ .$$

19.2. Нека функцията f е мероморфна в област D с полюси $b\ , b_2, \ldots$ от кратности съответно $p_1, p_2, \ldots$ и нули $a_1, a_2, \ldots$ от кратности съответно $n_1, n_2, \ldots$ Тогава за всеки хомологичен на нула цикъл $\Gamma \subset D$, който не минава през никоя от тези точки,

$$n(f \circ \Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_k n(\Gamma, a_k) n_k - \sum_j n(\Gamma, b_j) p_j \ .$$

Горните суми са крайни, защото множеството $D_0 = \{z : n(\Gamma, z) \neq 0\}$ е релативно компактно в D.

Лекция 20
Цели функции. Теорема на Вайерщрас.

Нека $D \subseteq \mathbb{C}$ е област и функцията f е холоморфна и различна от константа в D. Ние знаем, че множеството от нулите на f в D няма точка на сгъстяване в D. Естествен е следния въпрос: Нека S е подмножество на D, което няма точка на сгъстяване в D. Съществува ли функция f холоморфна в D, чието множество от нули в D е точно S? В тази лекция ще дадем положителен отговор на този въпрос, като за простота ще изложим доказателство само за случая $D = \mathbb{C}$. Основен инструмент в конструирането на f са безкрайните произведения, затова ще започнем с тях.

Безкрайни произведения от комплексни числа и функции

Дефиниция 20.1 Нека $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от комплексни числа. Формалният израз

(20.1) $$z_1 z_2 \dots z_n \dots = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$$

се нарича безкрайно произведение, а числата $p_n = \prod_{k=1}^{n} z_k$, $n = 1,2,\dots$ - негови частични произведения.

Водени от аналогията с безкрайните редове естествено е да казваме, че безкрайното произведение (20.1) е сходящо и има стойност p, ако $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Такава дефиниция е непълна по няколко причини. Например всяко безкрайно произведение, което има поне един множител равен на нула ще е сходящо, а премахването на този множител може да го направи разходящо (напр. произведението $0.1.2\dots$). От друга страна едно безкрайно произведение може да е сходящо към нула без нито един негов множител да е нула (напр., ако $|z_n| \le q < 1$).

Дефиниция 20.2. Нека първо $z_n \neq 0$ за всяко n. Безкрайното произведение (20.1) е сходящо и има стойност p, ако $\lim_{n\to\infty} p_n = p \neq 0$. В общия случай безкрайното произведение (20.1) е сходящо, ако съществува индекс ν, така че $z_n \neq 0$ за всяко $n > \nu$ и безкрайното произведение $\prod_{n=\nu+1}^{\infty} z_n$ е сходящо, т.е. $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=\nu+1}^{n} z_k = q \neq 0$. Стойност на безкрайното произведение (20.1) е числото $p = z_1 z_2 \dots z_\nu q$.

Така стойността на едно безкрайно произведение е нула, само ако поне един от множителите му е нула. Също така е ясно, че прибавянето или премахването на краен брой от множителите не влияе на сходимостта. Поради това можем да разглеждаме само безкрайни произведения, в които всички множители са различни от нула.

Ако безкрайното произведение $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ е сходящо, то

$$z_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \to \frac{p}{p} = 1,\ n \to \infty .$$

Следователно $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$ е необходимо (но не и достатъчно) условие за това безкрайното произведение да е сходящо. Затова е прието вместо $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ безкрайното произведение да се записва във вида $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$, като сега необходимо условие за сходимост е $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Примери 20.1.

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ е разходящо, защото

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1 \to \infty .$$

(2) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ е разходящо, защото

$$p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0 .$$

(3) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ е сходящо, защото

$$p_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k.k} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2} .$$

Примерите (1) и (2) показват, че условието $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ е необходимо, но не е достатъчно, за да е сходящо безкрайното произведение.

Твърдение 20.1. Ако $u_n \in \mathbb{C}$, $u_n \neq -1$, безкрайното произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ е сходящо тогава и само тогава, когато е сходящ редът $\sum_{n=1}^{\infty}\log_0(1+u_n)$ и тогава

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = e^{\sum_{n=1}^{\infty}\log_0(1+u_n)}.$$

Доказателство. Нека

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) \quad \text{и} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\log_0(1+u_k) = \sum_{k=1}^{n}\ln|1+u_k| + i\sum_{k=1}^{n}\arg_0(1+u_k) \quad, n = 1,2,\dots$$

Нека първо $p_n \to p \neq 0$. Тогава $\sum_{k=1}^{n}\ln|1+u_k| = \ln|p_n| \to \ln|p|$ и за да докажем, че редицата S_n е сходяща достатъчно е да докажем, че е сходяща редицата $\sum_{k=1}^{n}\arg_0(1+u_k)$. Имаме $\sum_{k=1}^{n}\arg_0(1+u_k) = \arg p_n$, където $\arg p_n$ е един еднозначен клон на аргумента на p_n. Тъй като $p_n \to p \neq 0$, то ако φ е един фиксиран аргумент на p, съществува редица от аргументи на p_n, $\{\arg^* p_n\}_{n=1}^{\infty}$, така че $\lim\limits_{n\to\infty}\arg^* p_n = \varphi$. Понеже $\arg^* p_n$ и $\arg p_n$ са аргументи на едно и също число p_n, то съществува редица от цели числа $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, така че за всяко n

(20.2) $$\arg^* p_n = \arg p_n + 2k_n\pi = \sum_{k=1}^{n}\arg_0(1+u_k) + 2k_n\pi.$$

Ще покажем, че k_n е константа за достатъчно голямо n. Действително имаме:

$$\arg^* p_n - \arg^* p_{n-1} = \arg_0(1+u_n) + 2(k_n - k_{n-1})\pi,$$

$$\arg^* p_n - \arg^* p_{n-1} \to \varphi - \varphi = 0 \text{ и } \arg_0(1+u_n) \to \arg_0 1 = 0,$$

защото $u_n \to 0$ и $\arg_0 z$ е непрекъсната в $z = 1$. Тогава $k_n - k_{n-1} \to 0$ и тъй като k_n са цели числа, това означава, че съществува индекс ν, че $k_n = k_{n-1} = k$ за всяко $n > \nu$. Сега от (20.2) и от сходимостта на редицата $\{\arg^* p_n\}_{n=1}^{\infty}$ следва, че е сходяща и редицата $\sum_{k=1}^{n}\arg_0(1+u_k)$.

Обратно, нека $S_n \to S$. Имаме, че $p_n = e^{S_n}$ и от непрекъснатостта на функцията e^z следва, че $p_n = e^{S_n} \to e^S \neq 0$. С това твърдението е доказано.■

Тази теорема ни казва, че всеки въпрос свързан с безкрайни произведения може да се трансформира във въпрос за безкрайни редове чрез логаритмуване.

Дефиниция 20.3. Безкрайното произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$, $u_n \neq -1$, се нарича абсолютно сходящо, ако $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ е сходящо.

Забележка 20.1. На пръв поглед , водени от аналогията с безкрайните редове, естествената дефиниция на абсолютна сходимост на едно безкрайно произведение е: $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ се нарича абсолютно сходящо, ако е сходящо произведението $\prod_{n=1}^{\infty}|z_n|$. Тази дефиниция обаче е непригодна за нашите цели, защото тогава всяко сходящо произведение ще бъде и абсолютно сходящо, докато $\prod_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ще бъде абсолютно сходящо без да е сходящо.

Твърдение 20.2. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ е абсолютно сходящо;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ е абсолютно сходящ;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\log_0(1+u_n)$ е абсолютно сходящ.

Доказателство. Преди всичко ще отбележим, че е в сила неравенството

$$S_n = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| \leq P_n = (1+|u_1|)(1+|u_2|)\ldots(1+|u_n|)$$

Също така $e^x \geq 1+x$,за всяко $x \geq 0$. (Това неравенство е вярно за всяко x.). Тогава

$$S_n \leq P_n \leq e^{S_n}\ , \quad , n = 1,2,\ldots$$

Тъй като редиците $\{S_n\}$ и $\{P_n\}$ са монотонно растящи оттук следва, че (1)$\Leftrightarrow$(2).

Ако е изпълнено някое от условията (2) или (3), то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ и тогава съществува индекс ν, така че $|u_n| \leq 1/2$ за $n > \nu$. Развитието в ред на Тейлър на $\log_0(1+z)$ в $|z|<1$ е

$$\log_0(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots = z\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n\right).$$

В частност за $|z| \le 1/2$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n\right| \le \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2},$$

откъдето получаваме неравенствата

$$\frac{1}{2}|z| \le |\log_0(1+z)| \le \frac{3}{2}|z|, \ |z| \le \frac{1}{2}.$$

Така за всяко $n > \nu$ имаме

$$\frac{1}{2}|u_n| \le |\log_0(1+u_n)| \le \frac{3}{2}|u_n|.$$

Следователно или и двата реда в (2) и (3) са абсолютно сходящи или никой от тях не е абсолютно сходящ, т.е (2) $\Leftrightarrow$ (3).■

Следствие 20.1. Ако безкрайното произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ е абсолютно сходящо, то е сходящо. Обратното не е вярно.

Доказателство. Нека $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|u_n|)$ е сходящо. Тогава е абсолютно сходящ, а значи и сходящ, редът $\sum_{n=1}^{\infty}\log_0(1+u_n)$. Сега твърдението следва от Твърдение 20.1.

Безкрайното произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ е сходящо към 1, но не е абсолютно сходящо.■

Забележка 20.2. Членовете на едно абсолютно сходящо произведение могат да се разместват без това да нарушава абсолютната му сходимост или да променя стойността му. Доказателството е подобно на доказателството на съответното твърдение за абсолютно сходящи редове.

Да преминем сега към безкрайни произведения от функции. И тук, както при редовете, за нашите цели ще бъде важна равномерната сходимост.

Дефиниция 20.4. Нека $M \subseteq \mathbb{C}$ и $f_n : M \to \mathbb{C}$, $, n = 1,2,\ldots$ е редица от функции. Безкрайното произведение $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ се нарича равномерно сходящо в M, ако съществува индекс ν, така че $f_n(z) \neq 0$ за всяко $n > \nu$ и за всяко $z \in M$, редицата $\prod_{k=\nu+1}^{n} f_k(z)$, $, n = \nu+1, \nu+2, \ldots$ е равномерно сходяща в M и границата ѝ е функция, която няма нули в M.

От теоремата на Вайерщрас е ясно, че ако $D \subseteq \mathbb{C}$ е област, $f_n : D \to \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$ са холоморфни в D и безкрайното произведение $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ е равномерно сходящо върху компактните подмножества на D, то $f(z)$ е холоморфна в D.

Твърдение 20.3. (Критерий за равномерна сходимост) Нека $M \subseteq \mathbb{C}$ и $f_n : M \to \mathbb{C}$, $f_n(z) \neq 0$, $z \in M$, $n = 1, 2, \ldots$ е редица от функции, такива че за всяко n съществува еднозначен клон $\log f_n$. Тогава, ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} \log f_n(z)$ е равномерно сходящ в M и сумата му е ограничена функция, то и безкрайното произведение $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ е равномерно сходящо в M.

Доказателство. Нека $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n} f_k(z)$, $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \log f_k(z)$ и $S_n(z) \Rightarrow S(z)$. Имаме, че $p_n(z) = e^{S_n(z)}$. Ще докажем, че $e^{S_n(z)} \Rightarrow e^{S(z)}$. От очевидното равенство

$$\left| e^{S_n(z)} - e^{S(z)} \right| = \left| e^{S(z)} \right| \left| e^{S_n(z) - S(z)} - 1 \right|$$

и неравенствата (виж зад. 6.2)

$$\left| e^{w} \right| \leq e^{|w|} \ , \ \left| e^{w} - 1 \right| \leq e^{|w|} - 1$$

следва

$$\left| e^{S_n(z)} - e^{S(z)} \right| \leq e^{|S(z)|} \left(e^{|S_n(z) - S(z)|} - 1 \right).$$

По условие за всяко $\delta > 0$ съществува число ν, че за всяко $n > \nu$ и всяко $z \in M$, $|S_n(z) - S(z)| < \delta$ и $|S(z)| \leq A$. Тогава

$$\left| e^{S_n(z)} - e^{S(z)} \right| \leq e^{A} \left(e^{\delta} - 1 \right), n > \nu, z \in M \ .$$

Сега, ако $\varepsilon > 0$ е произволно, можем да изберем $\delta > 0$, така че $e^{A}\left(e^{\delta} - 1\right) < \varepsilon$. Следователно за всяко $n > \nu$ и всяко $z \in M$

$$\left| e^{S_n(z)} - e^{S(z)} \right| < \varepsilon ,$$

т.е. $e^{S_n(z)} \Rightarrow e^{S(z)}$.

Накрая ще отбележим, че ако M е компакт и $\log f_n$ са непрекъснати функции, то функцията $|S(z)|$ е непрекъсната в M и значи е ограничена.■

Цели функции. Теорема на Вайерщрас

Нека S е подмножество на $\mathbb{C}$, което няма точка на сгъстяване в $\mathbb{C}$. За всяко $z \in S$ да фиксираме естествено число ν_z. Сега ще се заемем с нашата основна задача: Да се конструира цяла функция f, чийто нули са точно точките $z \in S$ и всяка от тях е ν_z- кратна нула на f. Първо ще разгледаме два елементарни случая.

1) $S = \varnothing$.

Ако $g(z)$ е произволна цяла функция, то очевидно $f(z) = e^{g(z)}$ е цяла функция без нули в $\mathbb{C}$. Вярно е и обратното. Ако f е цяла функция без нули, то (Лема 16.2) в $\mathbb{C}$ можем да отделим еднозначен клон на $\log f$, т.е. съществува цяла функция $g(z)$, така че $f(z) = e^{g(z)}$, $z \in \mathbb{C}$.

2) $S = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, $\nu_k := \nu_{z_k}$.

Ясно е, че полиномът $P(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{\nu_k}$ е решение на задачата. Нещо повече, ако f е цяла функция, с краен брой нули в точките z_k, $k = 1,2,\ldots n$, от кратност съответно ν_k, ($k = 1,2,\ldots n$), то функцията $h(z) = \dfrac{f(z)}{P(z)}$ има отстраними особености в точките $z_k, 1 \le k \le n$. Тогава $h(z)$ е цяла функция без нули в $\mathbb{C}$. Следователно

$$f(z) = e^{g(z)} P(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{\nu_k} ,$$

където $g(z)$ е цяла функция.

Нека сега S е безкрайно множество. Тъй като то няма крайна точка на сгъстяване и затворените кръгове в $\mathbb{C}$ са компакти, то съществуват само краен брой $z \in S$, за които $|z| \le N$, $N = 1,2,\ldots$ Поради това S е изброимо множество, т.е. $S = \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$, като $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$. Ясно е, че за конструирането на f не можем да изпозваме безкрайното произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (z - z_n)^{\nu_n}$. То е разходящо за всяко $z \in \mathbb{C}$, защото общият му член не клони към 1. Да предположим, че $z_n \neq 0$, $n = 1,2,\ldots$ (Както ще се убедим по-нататък, това не е ограничение.). Тогава можем да разгледаме безкрайното произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{\nu_n} ,$$

което има по-голям шанс да е сходящо (общият му член клони към 1). Но това произведение не винаги е равномерно сходящо върху компактните помножества на $\mathbb{C}$, например при $z_n = n$ и $\nu_n = 1$. Оригиналната идея на Вайерщрас е да се въведе един нов множител, който не променя нулите и осигурява желаната сходимост. По-точно търсената функция има вида

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{\nu_n} e^{P_n(z)},$$

където $P_n(z)$ е полином, който предстои да определим.

Теорема 20.1. (Вайерщрас) (1) Нека $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ е редица от различни комплексни числа и $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от естествени числа. Тогава съществува цяла функция, чийто нули са точно точките z_n и всяка от тях е от кратност ν_n, $n = 1, 2, \ldots$

(2) Нека $f(z)$ е цяла функция, за която $z = 0$ е m- кратна нула, а останалите ѝ нули са подредени в редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, като всяка нула е записана толкова пъти колкото е кратността ѝ. Тогава съществува цяла функция $g(z)$, така че

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{P_n(z)},\ P_n(z) = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n.$$

Доказателство. (1) Да предположим първо, че $z_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Без ограничение можем да считаме, че членовете на редицата са подредени по растящ модул, т.е.

$$0 < |z_1| \le |z_2| \le \ldots \le |z_n| \le \ldots$$

Също така вместо с редицата от различни комплексни числа $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ще работим с редицата

(20.3)
$$\underbrace{z_1, z_1, \ldots z_1}_{\nu_1}, \ldots, \underbrace{z_n, z_n, \ldots z_n}_{\nu_n}, \ldots,$$

в която всяко z_n е вписано толкова пъти, колкото е кратноста на нулата в z_n. Ще считаме, че допълнената редица е преномерирана и пак ще пишем $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ще покажем, че можем да изберем полиноми $P_n(z)$, така че безкрайното произведение

(20.4)
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{P_n(z)}$$

да е равномерно сходящо върху компактните подмножества на $\mathbb{C}$. Достатъчно е да докажем равномерна сходимост върху всеки кръг $|z| \le R, R > 0$. Да изберем ν, толкова голямо, че $|z_n| > 2R$ при $n > \nu$. Имаме,че за $n > \nu$ и $|z| \le R$

$$\left|\frac{z}{z_n}\right| < \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \text{ и } \left|1 - \frac{z}{z_n}\right| > 1 - \left|\frac{z}{z_n}\right| > \frac{1}{2}$$

Тогава за да покажем, че произведението

$$\prod_{n=\nu+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{P_n(z)}$$

е равномерно сходящо върху $|z| \le R$, е достатъчно (Твърдение 20.3) да определим полиномите $P_n(z)$, така че редът

$$\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\left(\log_0(1 - z/z_n) + P_n(z)\right) = \sum_{n=\nu+1}^{\infty} r_n(z)$$

да е равномерно сходящ върху кръга $|z| \le R$. От избора на ν имаме,че за $n > \nu$ функциите $\log_0(1 - z/z_n)$ са холоморфни в $|z| \le R$ и нека

$$\log_0\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) = -\frac{z}{z_n} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 - \cdots - \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n - \cdots, n > \nu$$

са тейлъровите им развития в този кръг. Полагаме

$$P_n(z) = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n, n > \nu .$$

Тогава

(20.5) $$|r_n(z)| \le \left|\frac{z}{z_n}\right|^{n+1}\left(1 + \left|\frac{z}{z_n}\right| + \left|\frac{z}{z_n}\right|^2 + \cdots\right) \le \left|\frac{z}{z_n}\right|^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) \le \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^n}$$

и значи редът $\sum_{n=\nu+1}^{\infty} r_n(z)$ е абсолютно и равномерно сходящ върху $|z| \le R$. От тук следва, че произведението

$$\prod_{n=\nu+1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{P_n(z)}$$

е абсолютно и раномерно сходящо върху $|z| \le R$. Тъй като функцията

$$\prod_{n=1}^{\nu}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{P_n(z)}$$

е ограничена за $|z|\leq R$ то и безкрайното произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{P_n(z)}$$

е равномерно сходящо върху $|z|\leq R$ и се анулира само за тези от точките $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ които са в този кръг. С това доказахме, че безкрайното произведение (20.4) е равномерно сходящо върху компактните подмножества на $\mathbb{C}$. Тъй като членовете му са цели функции, то дефинира цяла функция f. Нейните нули са точно числата от редицата (20.1).

Ако и нулата е член на редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и искаме тя да е m- кратна нула, търсената функция е

$$f(z)=z^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{P_n(z)},\ P_n(z)=\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n.$$

(2) Ако $f_0(z)$ е цялата функция от (1) с нули точно

$$\underbrace{0,0,\ldots 0}_{m}, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots,$$

то функцията $\dfrac{f(z)}{f_0(z)}$ е цяла функция без нули и тогава (както вече се убедихме в случая $S=\varnothing$) съществува цяла функция $g(z)$, така че $f(z)=e^{g(z)}f_0(z)$.■

Съществува един важен случай, когато полинома $P_n(z)$ участващ в безкрайното произведение (20.4) може да се замени с полином (зависещ от z_n) от фиксирана степен, т. е. не зависеща от n.

Теорема 20.2. Нека $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$ е редица от различни от нула комплексни числа и съществува естествено число s, така че редът

(20.6) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|z_n|^{s+1}}$$

е сходящ. Тогава безкрайното произведение

(20.7) $$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{P_s^n(z)},\ P_s^n(z)=\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{s}\left(\frac{z}{z_n}\right)^s$$

е равномерно сходящо върху компактните подмножества на $\mathbb{C}$.

Доказателство. Да се върнем към неравенствата (20.5) като заменим полинома $P_n(z)$ с полинома $P_s^n(z)$. Имаме, че за всяко $n > \nu$ и за всяко $|z| \le R$

$$|r_n(z)| \le \left|\frac{z}{z_n}\right|^{s+1}\left(1+\left|\frac{z}{z_n}\right|+\left|\frac{z}{z_n}\right|^2+\cdots\right) \le \left|\frac{z}{z_n}\right|^{s+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right)=\frac{2R^{s+1}}{|z_n|^{s+1}}.$$

Следователно сходимостта на реда (20.6) означава равномерна сходимост върху кръга $|z| \le R$ на реда $\sum_{n=\nu+1}^{\infty} r_n(z)$, а оттук и на безкрайното произведение (20.7).■

Ще завършим с едно приложение на теоремата на Вайерщрас. Ще намерим представянето на функцията $\sin \pi z$.

Твърдение 20.1. $\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$.

Доказателство. Нулите на функцията $\sin \pi z$ са всички цели числа , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ и всички те са прости нули. Тъй като редът $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ е сходящ, то

(20.8) $$\sin \pi z = z e^{g(z)} \prod_{n \ne 0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}} = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}e^{\frac{z}{n}} = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Разместването на множителите във второто равенство е възможно, защото безкрайното произведение е абсолютно сходящо (вж. Забележка 20.2).

За да определим цялата функция $g(z)$ ще изпозваме следното помощно твърдение (вж. [2], гл.vii, Лема 1.9)

Лема 20.1. Нека $f_n : D \to \mathbb{C}$, $f_n(z) \ne 0$, $z \in D$, $n = 1, 2, \ldots$ е редица от функции холоморфни в област D. Ако безкрайното произведение

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

е равномерно сходящо върху компактните подмножества на D, то

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{f_n(z)},$$

като редът е равномерно сходящ върху компактните подмножества на D.

Тъй като безкрайното произведение (20.8) е равномерно сходящо и множителите му не се анулират върху компактните подмножества на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, то

$$\frac{\pi\cos\pi z}{\sin\pi z}=\frac{1}{z}+g'(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}\ ,\ z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

Сравнявайки това равенство с полученото в Лекция 15 (Твърдение 15.1) разлагане на функцията $\pi\cot g\pi z$ получаваме $g'(z)=0$, откъдето намираме $g(z)=const$ Така

$$\sin\pi z=Kz\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right),\ K=const$$

Тъй като

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin\pi z}{z}=\pi=\lim_{z\to 0}K\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=K\ ,$$

то окончателно получаваме

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).\blacksquare$$

Сравняването на представянето на една цяла функция като безкрайно произведение с нейно тейлърово развитие, често води до интересни връзки. Ще илюстрираме това с функцията $\sin\pi z$. Имаме

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=\pi z-\frac{(\pi z)^3}{3!}+\frac{(\pi z)^5}{5!}-\cdots$$

Коефициентът пред z^3 в безкрайното произведение е

$$-\pi\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Тъй като тейлъровото развитие на $\sin\pi z$ около $z=0$ е единствено, то

$$-\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^3}{3!},$$

откъдето получаваме известното тъждество на Ойлер

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Задачи

20.1. Нека $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от функции холоморфни в област D и редът $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ е равномерно сходящ върху компактните подмножества на D. Да се докаже, че безкрайното произведение $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ е равномерно сходящо върху компактните подмножества на D, функцията $f(z)$ е холоморфна в D, при това $f(z_0)=0$ за някое $z_0\in D$ тогава и само тогава, когато $f_n(z_0)=-1$ за някое n.
Упътване. Приложете критерия на Коши за равномерна сходимост към редицата от частичните произведения.

20.2. Нека $h(z)=z\prod_{n=1}^{\infty}(1+z/n)e^{-z/n}$. Да се докаже, че

а) $h(z)$ е цяла функция с прости нули точно в точките $0,-1,-2,\dots$;

б) $-h(z)h(-z)=\pi^{-1}z\sin\pi z$;

в) $h(1)=e^{-\gamma}$, където $\gamma:=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right)\in\mathbb{R}$ е константата на Ойлер;

г) $h(z)=e^{-\gamma z}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z}$

Упътване за а). Предвид предната задача, достатъчное да се докаже,че редът

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1-\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right|$$

е равномерно сходящ върху компактните подмножества на $\mathbb{C}$. За целта използвайте неравенството от зад 6.2 в).

Лекция 21
Мероморфни функции. Теорема на Митаг-Лефлер

В тази лекция ще изложим една теорема за мероморфни функции аналогична на теоремата на Вайерщрас за цели функции. Ще конструираме мероморфна функция с отнапред зададени полюси и главни части в лорановите развития около тях.

Дефиниция 21.1. Една функция f се нарича мероморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$, ако тя е холоморфна в D с евентуално изключение на полюси. Ще казваме, че f е мероморфна функция, ако тя е мероморфна в $\mathbb{C}$.

Тъй като полюсите са изолирани особени точки, то множеството от полюсите на една мероморфна функция няма крайни точки на сгъстяване. Тогава във всеки кръг $|z| < N, N = 1,2,\dots$, те са краен брой и понеже $\mathbb{C} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{|z| < N\}$, то множеството от полюсите на една мероморфна функция е изброимо и ако е безкрайно, единствената му точка на сгъстяване е безкрайната.

Ясно е, че всяка цяла функция е мероморфна. Обратното не е вярно.

Примери 21.1.

(1) Функцията $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$, $a \in \mathbb{C}$ е мероморфна с единствен полюс a. По-общо всяка рационална функция е мероморфна;

(2) Функцията $f(z) = \cot g \pi z$ е мероморфна с полюси всички цели числа;

(3) Функцията $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/(z-1))}$ не е мероморфна, защото $z = 1$ е неизолирана особена точка на f (тя е точка на сгъстяване на полюси на f). Но тя е мероморфна в единичния кръг $|z| < 1$.

Ако f е цяла функция, то $1/f$ е мероморфна функция с полюси нулите на f. По-общо в сила е следната характеристика на мероморфните функции:

Теорема 21.1. Една функция е мероморфна тогава и само тогава, когато може да се представи като частно на две цели функции.

Доказателство. Нека $f(z) = g(z)/h(z)$, където g и h са цели функции. Тогава единствените особени точки на f са нулите на h и всяка от тях е или отстранима особеност или полюс на f, т.е. f е мероморфна функция. (По-точно: Нека $a \in \mathbb{C}$ е m-кратна нула на h. Тя е отстранима особеност на f, ако е s-кратна нула на g, $s \geq m$ и е полюс на f, ако или не е нула на g или е s-кратна нула на g, но $s < m$.)

Обратно, нека $f(z)$ е мероморфна функция. От теоремата на Вайерщрас следва, че съществува цяла функция $h(z)$ с нули точно полюсите на f от съответните кратности. Тогава $f(z)h(z)=g(z)$ е цяла функция. Така $f(z)=g(z)/h(z)$.■

Да се заемем сега с основната си задача. Нека $S\subset\mathbb{C}$ е множество, което няма точка на сгъстяване в $\mathbb{C}$, т.е. $S=\{z_1,z_2,\ldots,z_n,\ldots\}$, като $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$. За всяко n да фиксираме естествено число ν_n. Ако f е цялата функция от теоремата на Вайерщрас, то функцията $1/f$ е мероморфна с полюси точно точките z_n и всяка от тях е ν_n- кратен полюс на $1/f$, $n=1,2,\ldots$ Така конструирането на мероморфна функция с отнапред зададени полюси от съответни кратности е тривиално следствие от теоремата на Вайерщрас за целите функции. Но може да се направи повече, на всеки полюс можем да предпишем главната част в реда му на Лоран. Именно това е задачата решена от Митаг-Лефлер, чиято теорема ще формулираме и докажем след малко.

Нека $S=\{z_1,z_2,\ldots,z_n\}$ е крайно множество, $\nu_k, k=1,2,\ldots,n$ са естествени числа и

$$g_k(z)=\frac{a_1^k}{z-z_k}+\frac{a_2^k}{(z-z_k)^2}+\cdots+\frac{a_{\nu_k}^k}{(z-z_k)^{\nu_k}}\quad ,a_{\nu_k}^k\neq 0\,,\ k=1,2,\ldots,n \tag{21.1}$$

е редица от рационални функции. Тогава функцията $g(z)=\sum\limits_{k=1}^{n}g_k(z)$ е мероморфна с полюси точно точките $z_1,z_2,\ldots,z_n$ от кратности съответно $\nu_k, k=1,2,\ldots,n$ и със съответни главни части в реда на Лоран $g_k(z), k=1,2,\ldots,n$. По-общо, ако f е мероморфна функция със същото свойство, то функцията $f(z)-g(z)$ има само отстраними особености и следователно съществува цяла функция $h(z)$, така че (21.2) $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{n}g_k(z)+h(z)$. В частност, ако безкрайната точка е отстранима или полюс на $h(z)$, то $h(z)$ е полином, $f(z)$ е рационална функция и (21.2) е разлагането ѝ на елементарни дроби.

Нека $S=\{z_1,z_2,\ldots,z_n,\ldots\}$ е безкрайна редица от различни комплексни числа и $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$. Нека $\nu_n, n=1,2,\ldots$ са естествени числа и $g_n(z), n=1,2,\ldots$ е редица от рационални функции от вида (21.1). Сега не може да процедираме както по-горе, защото редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(z)$ може да е разходящ, например при $z_n=n$ и $g_n(z)=1/(z-n)$. Поради това е неохoдимо да се модифицира този ред, така че той да стане равномерно сходящ върху компактните подмножества на $\mathbb{C}$. При това по такъв начин, че да не се въвеждат нови особености и да не се променят главните части. Всичко това е постигнато в следната

Теорема 21.2. (Митаг-Лефлер) (1) Нека $\{z_n\}_1^\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ е редица от различни комплексни числа и

$$g_n(z) = \frac{a_1^n}{z - z_n} + \frac{a_2^n}{(z - z_n)^2} + \cdots + \frac{a_{\nu_n}^n}{(z - z_n)^{\nu_n}} \;,\; a_{\nu_n}^n \neq 0 \,,\; n = 1,2,\ldots$$

е редица от рационални функции. Тогава съществува мероморфна функция с полюси точно числата z_n, от кратности ν_n и чиято главна част във всяко z_n е $g_n(z)$;

(2) Нека f е мероморфна функция с полюси $z_n, n = 1,2,\ldots$ и съответни главни части $g_n(z), n = 1,2,\ldots$ Тогава съществува цяла функция $h(z)$ и редица от полиноми $p_n(z), n = 1,2,\ldots$, така че е в сила представянето

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - p_n(z)) \,.$$

Доказателство. (1) Както в теоремата на Вайерщрас, без ограничение можем да предполагаме, че $z_n \neq 0, n = 1,2,\ldots$, защото към конструираната мероморфна функция винаги можем да добавим рационална функция с единствен полюс в нулата. Също така можем да считаме, че членовете на редицата са подредени по растящ модул, т.е.

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots \leq |z_n| \leq \ldots$$

За всяко n рационалната функция $g_n(z)$ е холоморфна в кръга $|z| < |z_n|$ и нека

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

е тейлъровото ѝ развитие около нулата в този кръг. Този ред е равномерно сходящ върху компактните подмножества на $|z| < |z_n|$ и в частност е равномерно сходящ за $|z| \leq |z_n|/2$. Следователно съществува полином (частична сума на реда)

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{m_n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

от достатъчно висока степен m_n, така че за всяко $n = 1,2,\ldots$

(21.3) $$|g_n(z) - p_n(z)| < \frac{1}{2^n} \,,\; |z| \leq |z_n|/2 \,.$$

Ще докажем, че търсената функция е

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(g_n(z)-p_n(z)).$$

Достатъчно е да докажем, че редът е равномерно сходящ върху всеки кръг $|z|\le R$, от който са изключени точките z_n, $|z_n|\le R$. Тъй като $\lim_{n\to\infty}|z_n|=+\infty$, то съществува ν, че $|z_n|>2R \Leftrightarrow R<|z_n|/2$ за всяко $n>\nu$. Тогава за всяко $|z|\le R$ и за всяко $n>\nu$, $|z|\le|z_n|/2$, откъдето следва, че неравенствата (21.3) са в сила за всяко $|z|\le R$. Следователно редът

$$f_R(z)=\sum_{n=\nu+1}^{\infty}(g_n(z)-p_n(z))$$

е равномерно сходящ върху $|z|\le R$. Тъй като членовете му са холоморфни функции за $|z|\le R$ (за $n>\nu$ полюсите на $g_n(z)$ са вън от кръга $|z|\le R$) сумата му $f_R(z)$ е функция холоморфна за $|z|\le R$. Тогава очевидно

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(g_n(z)-p_n(z))=\sum_{n=1}^{\nu}(g_n(z)-p_n(z))+f_R(z)$$

е функция холоморфна в $|z|\le R$ с изключение на тези точки z_n, които са в този кръг. Всяка от тях е полюс на f със съответна главна част g_n. Тъй като $R>0$ бе произволно избрано, то $f(z)$ е мероморфна функция с желаните свойства.

(2) Ако $f_0(z)$ е мероморфната функция от (1) с полюси точно $z_n, n=1,2,\dots$ и съответни главни части $g_n(z), n=1,2,\dots$, то функцията $h(z)=f(z)-f_0(z)$ е цяла. Следователно

$$f(z)=h(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(g_n(z)-p_n(z)).\blacksquare$$

Примери 21.2.

(1) Нека $z_n=n$, $n\in\mathbb{Z}$ и $g_n(z)=1/(z-n)^2$. За $|z|\le R$ и $|n|\ge 2R$ имаме $|z-n|^2\ge(n-|z|)^2\ge(|n|-R)^2\ge n^2/4$ и тъй като $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2<\infty$, то редът $\sum_{|n|\ge 2R}1/(z-n)^2$ е равномерно сходящ за $|z|\le R$ и следователно функцията

$$f_1(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}$$

е мероморфна с полюси точно точките $n\in\mathbb{Z}$ и главни части $1/(z-n)^2$.

(2) Нека $z_n=n$, $n\in\mathbb{Z}$ и $g_n(z)=1/(z-n)$. Редът $\sum_{n=1}^{\infty}1/(z-n)$ е разходящ и има нужда от коригиращ полином. Имаме, че в околност на нулата

$$\frac{1}{z-n} = \frac{-1}{n(1-z/n)} = -\frac{1}{n}\left(1+\frac{z}{n}+\frac{z^2}{n^2}\cdots\right).$$

Ще покажем, че е достатъчно да вземем $p_n(z) = -\frac{1}{n}$. Действително, за $|z| \le R$ и $|n| \ge 2R$ имаме

$$\left|\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right| = \frac{|z|}{|n||n-z|} \le \frac{R}{|n|(|n|-R)} \le \frac{2R}{n^2}.$$

Така функцията

$$f_2(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

е мероморфна с полюси точно точките $n \in \mathbb{Z}$ и съответни главни части $1/(z-n)$.

Забележка 21.1. Това е всъщност функцията $\pi \cot g \pi z$ (сравни с Лекция 15).

В изложеното до тук (сравни с Лекция 20) се вижда сходството между теоремата на Вайерщрас за целите функциии и теоремата на Митаг-Лефлер. Като приложение на теоремата на Митаг-Лефлер, сега ще докажем едно обобщение на теоремата на Вайерщрас.

Теорема 21.3. Нека $\{z_n\}_1^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ е редица от различни комплексни числа и $\{w_n\}_1^{\infty}$ е произволна редица от комплексни числа. Съществува цяла функция $f(z)$, такава че $f(z_n) = w_n$ за всяко $n = 1, 2, \ldots$

Доказателство. От теоремата на Вайерщрас имаме, че съществува цяла функция $g(z)$ с прости нули точно точките $\{z_n\}_1^{\infty}$, т.е $g(z_n) = 0, g'(z_n) \ne 0$. От теоремата на Митаг-Лефлер имаме, че съществува мероморфна функция $h(z)$ с прости полюси точно точките $\{z_n\}_1^{\infty}$ и съответни главни части $w_n/g'(z_n)(z-z_n)$. (Ако $w_n = 0, h(z)$ е холоморфна в $z = z_n$). Тъй като $\{z_n\}_1^{\infty}$ са прости полюси на $h(z)$ и прости нули на $g(z)$, то всички особени точки на функцията $f(z) = g(z)h(z)$ са отстраними и следователно $f(z)$ е цяла функция. Развивайки $g(z)$ и $h(z)$ съответно в ред на Тейлър и ред на Лоран около $z = z_n$ имаме

$$g(z) = g'(z_n)(z-z_n) + \frac{g''(z_n)}{2}(z-z_n)^2 + \cdots$$

и

$$h(z) = \frac{w_n}{g'(z_n)(z-z_n)} + h_1(z),$$

където $h_1(z)$ е функция холоморфна в $z = z_n$. Оттук следва

$$f(z_n) = \lim_{z \to z_n} f(z) = \lim_{z \to z_n} g(z)h(z) = w_n .$$

С това теоремата е доказана.■

Задачи

21.1. Да се докаже теоремата на Вайерщрас (Теорема 20.1.) чрез теоремата на Митаг-Лефлер.
Упътване: Цялата функция f има нули точно в точките z_n от съответни кратности $\nu_n, n = 1,2,\ldots$, тогава и само тогава, когато мероморфната функция $\frac{f'}{f}$ има прости полюси в z_n със съответни главни части $g_n(z) = \frac{\nu_n}{z - z_n}$.

21.2. Нека $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, z_k \neq z_j, k \neq j$ и $\{\zeta_m\}_{m=1}^{\infty}$, $z_n \neq \zeta_m, n, m = 1, 2, \ldots$ са две редици от комплексни числа, които нямат крайни точки на сгъстяване и

$$g_n(z) = \frac{a_1^n}{z - z_n} + \frac{a_2^n}{(z - z_n)^2} + \cdots + \frac{a_{\nu_n}^n}{(z - z_n)^{\nu_n}} \; , \; a_{\nu_n}^n \neq 0 \, , \; n = 1,2,\ldots$$

е редица от рационални функции. Да се докаже, че съществува мероморфна функция с полюси точно в $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, със съответни главни части $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ и нули $\{\zeta_m\}_{m=1}^{\infty}$.

21.3. Нека $0 < R_1 < R_2 < \cdots < R_n < \cdots, R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, $\gamma_n = \{z : |z| = R_n\}$ и $f(z)$ е мероморфна функция с полюси точно в точките $z_n, n = 1,2,\ldots$ и съответни главни части $g_n(z), n = 1,2,\ldots$ Да се докаже,че:

а)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) - \sum_{k: z_k \in int\, \gamma_n} g_k(z)$$

за всяко $z \in int\gamma_n \setminus \{z_k\}_{k=1}^{\infty}$;

б) ако съществува константа $M > 0$ и цяло число $m \geq 0$, така че

$$|f(z)| \leq M |z|^m , \; z \in \gamma_n, n = 1, 2\ldots, \text{ то}$$

$$f(z) = h(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(z) - p_n(z)) ,$$

където

$$h(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \ , \ \ p_n(z) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

са полиноми от степен най-много m.
Упътване. а) Приложете теоремата за резидуумите, като използвате, че

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, z_k\right) = \operatorname{Re}s\left(\frac{\varphi_n(z)}{\zeta - z}, z_k\right),$$

където

$$\varphi_n(z) = \sum_{k:z_k \in int\,\gamma_n} g_k(z)\,.$$

б) Докажете и използвайте представянето

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\left(1 + \frac{z}{\zeta} + \cdots + \frac{z^m}{\zeta^m}\right) + \frac{1}{\zeta - z}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{m+1}, \ \ \zeta \in \gamma_n,\, z \in int\gamma_n\,.$$

Лекция 22
Гама-функцията на Ойлер

Наред с елементарните функции, Гама-функцията на Ойлер е може би най-важната от класическите „специални функции” в математическия анализ. Тя се среща в най-различни изследвания както от теоретичен, така и от приложен характер, от теория на числата до теоретичната физика. В тази лекция ще изложим някои от основните свойства на тази забележителна функция.

Появата на Гама-функцията е свързана със следната естествена задача: да се обобщи функцията $n!, n \in \mathbb{N}$ и за реални стойности, т.е. да се намери възможно „най-простата” функция на реална променлива $y = F(x)$, такава че $F(n+1) = n!$ (по исторически причини, следвайки Ойлер, пишем $n+1$, а не n). До различни изрази за тази функция достигат Ойлер, Гаус и Вайерщрас. Най-популярно е следното интегрално представяне на тази функция, дадено от Ойлер

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \ ,$$

който достига до него, като забелязва, че

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n!.$$

Въвеждането на комплексна променлива дължим на Гаус. Тук ще следваме подхода на Вайерщрас.

Функция на Вайерщрас

Следвайки теоремата на Вайерщрас, по точно Т.20.2., да конструираме цяла функция с прости нули в $0, -1, -2, \dots -n, \dots$ Общият вид на тази функция е

$$f(z) = z e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \ ,$$

където $g(z)$ е цяла функция.

Дефиниция 22.1. Функция на Вайерщрас се нарича функцията

$$\Delta(z) = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z/n) e^{-z/n} \ ,$$

където γ е константа, такава че $\Delta(1) = 1$.

Лема 22.1. $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}(1+1/2+\cdots+1/n-\ln n)$

Доказателство. Тъй като $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+1/k)=n+1$, то

$$\Delta(1)=e^{\gamma}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+1/k)\prod_{k=1}^{n}e^{-1/k}=e^{\gamma}\lim_{n\to\infty}e^{(\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}1/k)}$$

$$=e^{\gamma}\lim_{n\to\infty}e^{(\ln n-\sum\limits_{k=1}^{n}1/k)},$$

защото $\ln(n+1)-\ln n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Тогава $\Delta(1)=1\Leftrightarrow\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/2+\cdots1/n-\ln n)$.■

Забележка 22.1. Добре известен факт е, че тази граница съществува. Той следва непосредствено от геометричното тълкуване на определения интеграл

$$\int_1^n\frac{dx}{x}=\ln n.$$

Константата γ се нарича *константа на Ойлер.* Известно е, че $\gamma=0,5772156\ldots$. Не е известно дали γ е рационално или ирационално число.

Твърдение 22.1. Функцията $\Delta(z)$ има следните свойства;

(1) $\overline{\Delta(\overline{z})}=\Delta(z)$ и в частност $\Delta(x)\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}$, като $\Delta(x)>0,\ x>0$;

(2) $\Delta(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!n^z}$;

(3) $\Delta(z)=z\Delta(z+1)$;

(4) $\pi\Delta(z)\Delta(1-z)=\sin\pi z$;

(5) $\Delta\left(\dfrac{1}{n}\right)\Delta\left(\dfrac{2}{n}\right)\ldots\Delta\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}},\ n=2,3,\ldots$

Доказателство. (2) Тъй като $n^z:=e^{z\ln n}$, то

$$\Delta(z)=ze^{\gamma z}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+z/k)e^{-z/k}=e^{\gamma z}\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!n^z}e^{z\left(\ln n-\sum\limits_{k=1}^{n}1/k\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!n^z}.$$

(3) Имаме

$$z\Delta(z+1)=\lim_{n\to\infty}z\frac{(z+1)\ldots(z+n)(z+n+1)}{n!n^{z+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!n^z}\lim_{n\to\infty}\frac{z+n+1}{n}=\Delta(z).$$

(4) От (3) следва

$$\pi\Delta(z)\Delta(1-z)=-\frac{\pi}{z}\Delta(z)\Delta(-z)=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2)=\sin\pi z.$$

(5) Нека $A=\Delta\left(\frac{1}{n}\right)\Delta\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Delta\left(\frac{n-1}{n}\right), n=2,3,\ldots$ (от (1) следва $A>0$) Имаме, предвид 4),

$$A^2=\prod_{k=1}^{n-1}\Delta\left(\frac{k}{n}\right)\Delta\left(1-\frac{k}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\sin k\pi/n}{\pi}=\frac{1}{(\pi)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

Ще покажем, че

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Действително,

$$z^n-1=(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-e^{i2k\pi/n}\right)=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1),$$

откъдето

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-e^{i2k\pi/n}\right)=(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+1)$$

и в частност за $z\to 1$

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{i2k\pi/n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-e^{i2k\pi/n}\right|=\prod_{k=1}^{n-1}\left|e^{ik\pi/n}\right|\left|e^{-ik\pi/n}-e^{ik\pi/n}\right|=\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

Така получаваме

$$A^2=\frac{1}{(\pi)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{(2\pi)^{n-1}},$$ т.е. (5).

Гама-функцията на Ойлер

Дефиниция 22.2. Гама-функция на Ойлер се нарича функцията $\Gamma(z):=\frac{1}{\Delta(z)}$.

Ясно е, че тази функция е мероморфна с прости полюси в точките $0,-1,-2,\ldots-n,\ldots$ и няма нули.

Твърдение 22.2. Гама-функцията има следните свойства:

(1) $\overline{\Gamma(\overline{z})}=\Gamma(z)$ и в частност $\Gamma(x)\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$, като $\Gamma(x)>0, x>0$;

(2) $\Gamma(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$;

(3) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \Gamma(z+n)=z(z+1)\ldots(z+n-1)\Gamma(z), \Gamma(1)=1, \Gamma(n+1)=n!, n\in\mathbb{N}$;

(4) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$;

(5) $\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(\dfrac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=\dfrac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$, $n=2,3,\ldots$;

(6) $|\Gamma(z)|\le\Gamma(x),\ z=x+iy,\ x>0$;

(7) $\operatorname{Re}s(\Gamma,-n)=\dfrac{(-1)^n}{n!}$, $n=0,1,\ldots$

Доказателство. Свойствата (1)-(5) следват непосредствено от дефиницията и Твърдение 22.1.

(6) Следва от (2), предвид $|n^z|=n^x$ и $|z+n|\ge x+n,\ x>0$.

(7) Предвид (3), имаме

$$\operatorname{Re}s(\Gamma,-n)=\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)=\lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}=\frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\ldots(-1)}=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Теорема за единственост. Интегрално представяне на Гама-функцията.

Лема 22.1. Всяка функция f, холоморфна в дясната полуравнина $H=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0\}$ и удовлетворяваща функционалното уравнение

$$f(z+1)=zf(z),\ z\in H,$$

може да се продължи до мероморфна (в $\mathbb{C}$) функция $\hat{f}$ с прости полюси в точките $0,-1,-2,\ldots-n,\ldots$, с резидууми съответно

$$\operatorname{Re}s(\hat{f},-n)=\frac{(-1)^n}{n!}f(1),\ n=0,1,2,\ldots$$

В частност $\hat{f}$ е цяла функция, само ако $f(1)=0$.

Доказателство. От функционалното уравнение, по индукция получаваме

$$f(z+n+1)=z(z+1)\ldots(z+n)f(z),\ z\in H.$$

Нека $z\in\mathbb{C}$ и $-z\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогава $z+n+1\in H$ за подходящо n и можем да дефинираме

$$\hat{f}(z)=\frac{f(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)}.$$

Тази функция е холоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ и $\hat{f}(z)=f(z),\ z\in H$. Освен това

$$\lim_{z\to -n}(z+n)\hat{f}(z)=\lim_{z\to -n}\frac{f(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}=\frac{(-1)^n}{n!}f(1)$$

за всяко $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Това означава,че $-n$ е прост полюс на $\hat{f}$ с резидуум

$$\operatorname{Re} s(\hat{f}, -n) = \frac{(-1)^n}{n!} f(1), n = 0, 1, 2, \dots \blacksquare$$

Теорема 22.1.(H. Wielandt, за единственост) Нека $F(z)$ е функция, холоморфна в дясната полуравнина $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ и

(а) $F(z+1) = zF(z), z \in H$;

(б) $F(z)$ е ограничена в ивицата $S = \{z \in \mathbb{C} : 1 \le \operatorname{Re} z < 2\}$.

Тогава $F(z) = a\Gamma(z), z \in H$, където $a = F(1)$.

Доказателство. Функцията $f(z) = F(z) - a\Gamma(z)$ е холоморфна в H, $f(1) = 0$ и $f(z+1) = zf(z)$. От Лема 22.1 следва,че f се продължава до цяла функция $\hat{f}$. Тъй като $\Gamma(z)$ е ограничена в S (следва от Твърдение 22.2 (6)), то и f е ограничена в S. Оттук следва, че f е ограничена и в ивицата $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} z < 1\}$. Действително, за $z \in S_0, |\operatorname{Im} z| \le 1$, това е ясно от съображения за непрекъснатост, а за $z \in S_0, |\operatorname{Im} z| > 1$ това следва от $f(z) = f(z+1)/z$ и ограничеността на f в S. Да разгледаме сега цялата функция

$$g(z) := \hat{f}(z)\hat{f}(1-z).$$

Тя е ограничена в S_0, защото ако $z \in S_0$, то и $1 - z \in S_0$. Освен това

$$g(z+1) = \hat{f}(z+1)\hat{f}(-z) = z\hat{f}(z)\hat{f}(-z) = -(-z\hat{f}(-z))\hat{f}(z) = -\hat{f}(1-z)\hat{f}(z) = -g(z).$$

Оттук следва, че:

(1) $g(z)$ е ограничена и в S, защото ако $z \in S$, то $z - 1 \in S_0$

и

(2) $g(z+2) = g(z+1+1) = -g(z+1) = g(z)$.

Така $g(z)$ е ограничена в ивицата $\{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} z < 2\}$ и е периодична с период 2. Следователно тя е ограничена в $\mathbb{C}$ и от теоремата на Лиувил следва, че тя е константа. Тогава $g(z) \equiv g(1) = f(1)\hat{f}(0) = 0$. Следователно $\hat{f}(z) \equiv 0$, т.е. $F(z) = a\Gamma(z), z \in H$. $\blacksquare$

Теорема 22.2.(Ойлер) $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re} z > 0$.

Доказателство. Ще докажем, че функцията

$$F(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt,\ \operatorname{Re} z > 0$$

удовлетворява условията на Теорема 22.1. Преди всичко да отбележим, че

$$|t^{z-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t},\ z = x + iy$$

и функцията $t^{x-1}e^{-t}, x > 0$ е интегруема в $[0, \infty)$. Следователно интегралът дефиниращ F е абсолютно сходящ, ако $\operatorname{Re} z > 0$. Ще докажем, че той е равномерно сходящ върху компактните подмножества на дясната полуравнина. Достатъчно е да се докаже, че е равномерно сходящ във всяка ивица $\{z \in \mathbb{C} : 0 < a \le \operatorname{Re} z \le b < +\infty\}$. Действително, нека $0 < \delta < 1 < R < +\infty$ и

$$F_{\delta,R}(z) = \int_\delta^R t^{z-1}e^{-t}dt$$

Имаме

$$|F_{\delta,R}(z) - F(z)| = \left|\int_0^\delta t^{z-1}e^{-t}dt + \int_R^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\right| \le \int_0^\delta t^{a-1}e^{-t}dt + \int_R^\infty t^{b-1}e^{-t}dt \xrightarrow[\delta\to 0, R\to\infty]{} 0\,.$$

Тъй като функциите $F_{\delta,R}(z)$ са непрекъснати, оттук следва, че и $F(z)$ е непрекъсната в дясната полуравнина. Нещо повече тя е холоморфна там. За да докажем това ще използваме теоремата на Морера. Нека γ е произволна затворена крива в дясната полуравнина. Тогава

$$\int_\gamma F(z)dz = \int_\gamma\left(\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\right)dz = \int_0^\infty e^{-t}\left(\int_\gamma t^{z-1}dz\right)dt\,.$$

Тъй като при фиксирано $t > 0$, функцията $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$ е холоморфна в дясната полуравнина, то от теоремата на Коши имаме, че

$$\int_\gamma t^{z-1}dz = 0 \text{ и следователно } \int_\gamma F(z)dz = 0\,.$$

Така доказахме, че функцията $F(z)$ е холоморфна в дясната полуравнина.

Функционалното уравнение $F(z+1) = zF(z)$ получаваме след интегриране по части:

$$F(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}dt = -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = zF(z)\,.$$

След това от равенството $|t^{z-1}| = t^{\operatorname{Re} z - 1}$ директно следва неравенството

$$|F(z)| \le F(\operatorname{Re} z), \operatorname{Re} z > 0,$$

и в частност $F(z)$ е ограничена във всяка ивица $\{z \in \mathbb{C} : 0 < a \le \operatorname{Re} z \le b < +\infty\}$.

Накрая от Теорема 22.1 следва, че $F(z) = a\Gamma(z), \operatorname{Re} z > 0,$ където $a = F(1) = 1$, т.е.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re} z > 0. \blacksquare$$

Теорема 22.3. Мултипликативна формула на Гаус.

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz)\ n = 2,3,\ldots, z \in H.$$

Доказателство. Да фиксираме n и да разгледаме функцията

$$F(z) = \Gamma\left(\frac{z}{n}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right)\Big/(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{1/2-z}.$$

Тази функция е холоморфна в дясната полуравнина H;

$$F(z+1) = n\frac{\Gamma(1+z/n)}{\Gamma(z/n)}F(z) = n\frac{z}{n}F(z) = zF(z)$$

и $F(1) = 1$, предвид (5) от Твърдение 22.2. От теоремата за единственост следва $F = \Gamma$ и в частност $F(nz) = \Gamma(nz)$. $\blacksquare$

Следствие 22.1. (Формула на Лежандър)

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

Задачи

22.1. Да се докажат следните свойства на Гама-функцията на Ойлер:

а) $\Gamma(n+1/2) = \dfrac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$;

б) $\Gamma(1/2+z)\Gamma(1/2-z) = \dfrac{\pi}{\cos\pi z}$;

в) $|\Gamma(iy)|^2 = \dfrac{\pi}{y\sinh y}, \quad |\Gamma(1/2+iy)|^2 = \dfrac{\pi}{\cosh\pi y}$

г) $\displaystyle\int_0^1 \ln\Gamma(t)dt = \ln\sqrt{2\pi}$;

д) $\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-it}dt = \exp(-\frac{\pi i z}{2})\Gamma(z), \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1.$ *Упътване*. Интегрирайте функцията $\zeta^{z-1}\exp(-\zeta)$ по контура на областта $\{z : \delta < |\zeta| < R, 0 < \arg\zeta < \pi/2\}$

22.2. Да се докаже, че

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right), \alpha > 0 .$$

22.3. Нека $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$. Да се докаже, че:

а) $\psi(z)$ е мероморфна в $\mathbb{C}$ с прости полюси в $0,-1,\dots,-n,\dots$ и $Res(\psi,-n) = -1$;

б) $\psi(1) = -\gamma$;

в) $\psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}$;

г) $\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot g\pi z$;

д) $\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right)$;

е) $\psi'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}$.

Лекция 23
Равномерно приближение с полиноми и рационални функции. Теореми на Рунге

Поведението на една функция холоморфна в област, до голяма степен се определя от поведението ѝ в околност на коя и да е точка от областта (виж напр. теоремата за единственост) Ако обаче вместо област разгледаме отворено множество, можем да получим холоморфна функция, дефинирайки я, така че стойностите ѝ в отделните свързани компоненти на отвореното множество (те са области) да са независими. Затова е интересен факта, че всяка функция холоморфна в отворено множество G, може да се дефинира като равномерна (върху компактните подмножества на G) граница на редица от рационални функции с полюси вън от G. Този забележителен резултат е доказан от Карл Рунге в 1885 г. При това доказателството на Рунге включва контрол върху разположението на полюсите на рационалните функции. В частност ако $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$ е свързано множество и $\infty \notin G$, то от неговата теорема непосредствено следва, че всяка функция холоморфна в G е равномерна граница на полиноми. Интересно е да се отбележи, че въпреки това този резултат не е доказан от Рунге. Публикуван е за първи път от Д. Хилберт в 1897 г. Доказателството му не използва теоремата на Рунге. В тази лекция ще докажем теоремата на Рунге. Ще изложим две версии на тази теорема, едната се отнася за равномерно приближение върху един отделно взет компакт, а другата-за равномерно приближение върху компактните подмножества на едно отворено множество.

Теорема на Рунге за компакт

Ключова роля в доказателството играе следната формула на Коши за компактни множества:

Лема 23.1. Ако $K\subset\mathbb{C}$ е компакт и $U, K\subset U$, е отворено множество, то съществуват краен брой хоризонтални или вертикални ориентирани отсечки $\gamma_1,\gamma_2,\dots\gamma_m$, лежащи в $U\setminus K$, такива че

(23.1)
$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\nu}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

за всяка функция f, холоморфна в U и всяко $z\in K$.

Доказателство. Ще предполагаме, че $U\neq\mathbb{C}$ (ако $U=\mathbb{C}$ твърдението е очевидно) и нека $\delta=dist(K,\partial U)$. Да построим в равнината квадратна мрежа, успоредна на координатните оси със страна h, като $h\sqrt{2}<\delta$. Тъй като K е компакт, само краен брой квадрати от мрежата го пресичат. Да ги означим с $Q_1,Q_2,\dots,Q_p$. Твърдим, че $K\subset\bigcup_{k=1}^{p}Q_k\subset U$. Първото включване е очевидно. За да покажем, че $Q_k\subset U,\ k=1,2,\dots p$, да вземем произволна точка $z_k\in Q_k\cap K$. Тогава

$K(z_k,\delta)\subset U$, предвид дефиницията на δ. А тъй като $diamQ_k = h\sqrt{2} < \delta$, то $Q_k \subset K(z_k,\delta)$ и следователно $Q_k \subset U, k=1,2,\dots p$.

Нека сега да ориентираме положително (т.е. обратно на движението на часовниковата стрелка) границата на всеки квадрат $Q_k, k=1,2,\dots p$. Да означим с $\gamma_1,\gamma_2,\dots\gamma_m$ тези страни на квадратите $Q_k, k=1,2,\dots p$, които не принадлежат на никои два съседни квадрата (т.е. ако Q_k и $Q_l, k\neq l$ имат обща страна, тя се изтрива). Ясно е, че за всяко $\nu=1,2,\dots m$, $\gamma_\nu \subset U$ и $\gamma_\nu \cap K=\varnothing$, защото в противен случай тя ще е обща страна на два квадрата, пресичащи K. Нека f е холоморфна в U и $z\in K$. Тогава $z\in Q_{k_0}$, за някое $k_0=1,2,\dots p$. Преди всичко, ще отбележим, че

(23.2)
$$\sum_{k=1}^{p}\int_{\partial Q_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\sum_{\nu=1}^{m}\int_{\gamma_\nu}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

защото, ако Q_k и $Q_l, k\neq l$ са два съседни квадрата, интегралът върху общата им страна се взема веднъж в положителна посока и веднъж в отрицателна. Тогава, ако $z\in intQ_{k_0}$, то от формулата на Коши имаме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases} f(z), ako\ k=k_0 \\ 0, ako\ k\neq k_0\end{cases}$$

и от (23.2) следва

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\nu}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta .$$

Ако $z\in\partial Q_{k_0}$, то $z\notin\gamma_\nu, \nu=1,2,\dots m$ (z лежи на изтрита страна на Q_{k_0}). Да изберем редица от точки $\left\{z_n\in intQ_{k_o}\right\}_{n=1}^{\infty}$, такава че $\lim_{n\to\infty} z_n=z$. Съществува $d>0$, така че $|\zeta-z_n||\zeta-z|\geq d$, за всяко $\zeta\in\gamma_\nu, \nu=1,2,\dots m$. Тогава за всяко $\nu=1,2,\dots m$

$$\left|\int_{\gamma_\nu}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\gamma_\nu}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_n}d\zeta\right|=|z_n-z|\left|\int_{\gamma_\nu}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-z_n)}d\zeta\right|$$
$$\leq|z_n-z|\max_{\zeta\in\gamma_\nu}|f(\zeta)|l(\gamma_\nu)/d\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Оттук, от непрекъснатостта на f и от доказаното по-горе, следва, че формулата (23.1) е в сила и за $z\in\partial Q_{k_0}$.■

Лема 23.2. Нека $\gamma\subset\mathbb{C}$ е отсечка, непресичаща компакта $K\subset\mathbb{C}$ и $h(\zeta)$ е функция непрекъсната върху γ. Тогава функцията

$$\int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \; z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$$

може да се апроксимира равномерно върху K с рационални функции от вида

$$\sum_{\mu=1}^{s} \frac{c_\mu}{z - z_\mu},$$

където $c_1, c_2, \ldots c_s \in \mathbb{C}$ и $z_1, z_2, \ldots, z_s \in \gamma$.

Доказателство. Функцията $g(\zeta, z) = h(\zeta)/(\zeta - z)$ е непрекъсната върху $\gamma \times K$ и понеже $\gamma \times K$ е компакт, тя е равномерно непрекъсната. Следователно за всяко $\varepsilon > 0$, съществува $\delta > 0$, така че за всяко $z \in K$ и всеки $\zeta, \zeta' \in \gamma$, за които $|\zeta - \zeta'| < \delta$ е изпълнено $|g(\zeta, z) - g(\zeta', z)| < \varepsilon$. Разделяме отсечката γ на подотсечки $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_s$ с дължина по-малка от δ, избираме $z_\mu \in \sigma_\mu$ и полагаме $c_\mu = -h(z_\mu) \int_{\sigma_\mu} d\zeta$. Тогава за всяко $z \in K$ имаме

$$\left| \int_{\sigma_\mu} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{c_\mu}{z - z_\mu} \right| = \left| \int_{\sigma_\mu} \left(g(\zeta, z) - g(z_\mu, z) \right) d\zeta \right| < \varepsilon l(\sigma_\mu),$$

откъдето непосредствено следва

$$\left| \int_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{\mu=1}^{s} \frac{c_\mu}{z - z_\mu} \right| < \varepsilon l(\gamma). \blacksquare$$

Теорема 23.1 (Рунге) Нека $K \subset \mathbb{C}$ е компакт и f е функция холоморфна в околност на K. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува рационална функция $R(z)$ с прости полюси вън от K, така че $|f(z) - R(z)| < \varepsilon$, за всяко $z \in K$.

Доказателство. Нека f е холоморфна в отвореното множество U и $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ са отсечките от Лема 23.1. От Лема 23.2 имаме, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува рационална функция

$$q_\nu(z) = \sum_{\mu=1}^{s_\nu} \frac{c_{\mu\nu}}{z - z_{\mu\nu}}, \; z_{\mu\nu} \in \gamma_\nu,$$

така че

$$\left| \int_{\gamma_\nu} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - q_\nu(z) \right| < \varepsilon/m, \; z \in K, \; \nu = 1, 2, \ldots, m$$

Тогава за $R(z)=\sum_{\nu=1}^{m} q_\nu(z)$ имаме $|f(z)-R(z)|<\varepsilon$, за всяко $z\in K$.■

Забележка 23.1 Множеството $\bigcup_{\nu=1}^{m}\gamma_\nu$, върху което лежат полюсите на $R(z)$ не зависи от ε и се определя само от K и U. Вярно е, че ако ε намалява броят на полюсите се увеличава, но те не се приближават към K. Сега ще покажем, че тези полюси могат да се изтласкат и извън U.

Метод за изтласкване на полюсите. Малка теорема на Рунге.

Лема 23.3. (за изтласкване на полюсите) Нека $K\subset\mathbb{C}$ е компакт и a и b са две различни точки от една и съща компонента на свързаност Z на отвореното множество $\overline{\mathbb{C}}\setminus K$, $a\neq\infty$. Ако $R(z)$ е рационална функция с единствен полюс в точката a, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува рационална функция $S(z)$ с единствен полюс в точката b, така че $|R(z)-S(z)|<\varepsilon$, $z\in K$. В частност, ако $b=\infty$, $S(z)$ е полином.

Доказателство. Нека първо предположим, че $b\neq\infty$. Тъй като a и b принадлежат на една и съща компонента на свързаност, то съществува начупена линия $\gamma\subset Z$, която ги свързва. Нека $dist(\gamma,K)=d>0$ и $z_0=a,z_1,\dots,z_m=b$ са точки от γ, такива че $|z_j-z_{j-1}|<d/2,\ j=1,2,\dots,m$. Ясно е, че е достатъчно да се ограничим със случая, при който $R(z)$ има само един член, $1/(z-a)^k$ (в общия случай имаме работа с линейна комбинация от такива функции) Имаме, че

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z-z_1-(a-z_1)}=\frac{1}{z-z_1}\frac{1}{1-\dfrac{a-z_1}{z-z_1}}$$

и тъй като за всяко $z\in K,\left|\dfrac{a-z_1}{z-z_1}\right|<\dfrac{d/2}{d}=\dfrac{1}{2}<1$, то

$$\frac{1}{z-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-z_1)^n}{(z-z_1)^{n+1}},$$

като редът е равномерно сходящ върху K. Оттук, чрез почленно диференциране получаваме представяне чрез равномерно сходящ ред и на функциите $1/(z-a)^k$, $k=2,3,\dots$ Сега като вземем подходящи парциални суми получаваме, че за всяко $\varepsilon>0$, съществува рационална функция $R_1(z)$ с единствен полюс в точката z_1, така че $|R(z)-R_1(z)|<\varepsilon/m, z\in K$. Аналогично следва, че съществува рационална функция $R_2(z)$ с единствен полюс в точката z_2, така че $|R_1(z)-R_2(z)|<\varepsilon/m, z\in K$. Продължавайки получаваме, че съществува рационална функция $R_m(z)$ с единствен полюс в точката $z_m = b$, така че $|R_{m-1}(z) - R_m(z)| < \varepsilon/m$, $z \in K$. Ясно е, че търсената функция е $S(z) = R_m(z)$.

Ако $b = \infty$, да изберем $c \in \mathbb{C}$, така че $K \subset K(0,|c|)$. От доказаното следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува рационална функция $Q(z)$ с единствен полюс в точката c, така че $|R(z) - Q(z)| < \varepsilon/2, z \in K$. Тъй като $Q(z)$ е холоморфна в кръга $K(0,|c|)$, съдържащ K, тя се апроксимира равномерно върху K чрез полиномите си на Тейлър, т.е. съществува полином $P(z)$, така че $|Q(z) - P(z)| < \varepsilon/2, z \in K$. Тогава $|R(z) - P(z)| < \varepsilon, z \in K$ ■

Теорема 23.2 (Уточнение на теоремата на Рунге) Нека $K \subset \mathbb{C}$ е компакт и $P \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ е множество, което има непразно сечение с всяка компонента на $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Ако f е холоморфна в околност на K, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува рационална функция $R(z)$ с полюси само от P, така че $|f(z) - R(z)| < \varepsilon$, за всяко $z \in K$.

Доказателство. От теоремата на Рунге следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува рационална функция

$$r(z) = \sum_{j=1}^{p} r_j(z), \text{ където } r_j(z) = c_j/(z - a_j),\, a_j \notin K,\ j = 1, 2, \dots p,$$

така че $|f(z) - r(z)| < \varepsilon/2$, за $z \in K$. Нека Z_j е компонентата на $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ съдържаща a_j и $b_j \in P \cap Z_j$, $j = 1, 2, \dots, p$. От лемата за изтласкване на полюсите, следва, че съществува рационална функция $S_j(z)$ с единствен полюс в точката b_j, така че $|r_j(z) - S_j(z)| < \varepsilon/2p, z \in K$. Тогава за рационалната функция $R(z) = \sum_{j=1}^{p} S_j(z)$ имаме $|r(z) - R(z)| < \varepsilon/2, z \in K$, и $|f(z) - R(z)| < \varepsilon, z \in K$.■

Следствие 23.1. Нека $K \subset \mathbb{C}$ е компакт и $U, K \subset U$, е отворено множество, така че във всяка компонента на свързаност на $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ има точка от $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$. Тогава всяка функция холоморфна в околност на K може да се апроксимира равномерно върху K с рационални функции с полюси вън от U.

Доказателство. Можем да изберем множеството $P \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K$, така че $P \cap U = \varnothing$.

Следствие 23.2.(Малка теорема на Рунге) Ако $K \subset \mathbb{C}$ е компакт със свързано допълнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, то всяка функция холоморфна в околност на K може да се апроксимира равномерно върху K с полиноми.

Доказателство. Тъй като $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ има само една компонента на свързаност, можем да изберем $P = \{\infty\}$.■

Забележка 23.2. 1. Ако допълнението на K не е свързано, теоремата не е вярна. Действително, ако $\overline{\mathbb{C}}\setminus K$ не е свързано, то ще има ограничена компонента на свързаност Z и нека $a\in Z$. Функцията $f(z)=1/(z-a)$ е холоморфна в околност на K и ако допуснем, че теоремата е вярна за K ще съществува полином $p(z)$ така, че

$$|f(z)-p(z)|<1/2diamZ \; , z\in K$$

Тогава

$$|(z-a)p(z)-1|<|z-a|/2diamZ<1/2 \, , \; z\in\partial Z\subset K .$$

Но $\overline{Z}$ е компакт и съгласно принципа за максимума, полиномът $(z-a)p(z)-1$ приема най-голямата си стойност в $\overline{Z}$ върху границата $\partial Z\subset K$. Поради това за всяко $z\in Z$ трябва да е в сила неравенството

$$|(z-a)p(z)-1|<1/2 \, ,$$

което очевидно не е вярно при $z=a\in Z$.

2. В малката теорема на Рунге, условието f да е холоморфна в околност на K може да се замени с по-слабото условие f да е непрекъсната върху K и да е холоморфна във вътрешните точки на K. Този резултат е получен от съветският математик С.Н.Мергелян в 1951 г. (вж.)

Терема на Рунге за отворени множества

До тук доказахме теореми на Рунге за апроксимация върху компактни подмножества на комплексната равнина. Сега ще докажем техните аналози за отворени множества. Когато апроксимираме с непрекъснати функции в отворено множество G, тъй като те може да не са ограничени в G, подходящия тип сходимост не е равномерната сходимост в G, а е равномерната сходимост върху компактните подмножества на G (т.е. локално равномерната сходимост в G).

Лема 23.4.(за компактното изчерпване) За всяко отворено множество $G\subset\mathbb{C}$ съществува редица от компактни множества $K_n\subset G$, $n=1,2\ldots$, такива че:

(1) $K_n\subset\operatorname{int}K_{n+1}$ и $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$;

(2) За всеки компакт $K\subset G$ съществува $n\in\mathbb{N}$, така че $K\subset K_n$;

(3) За всяко $n\in\mathbb{N}$, всяка компонента на $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ съдържа компонента на $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$.

Доказателство. Ако $G=\mathbb{C}$ можем да вземем $K_n=\overline{K(0,n)}$ и те очевидно удовлетворяват условията (1)-(3). Нека $G\neq\mathbb{C}$ и да дефинираме

$$K_n=\{z\in G: dist(z,\mathbb{C}\setminus G)\geq 1/n, |z|\leq n\}$$

Очевидно K_n е затворено и ограничено, т.е. компактно, подмножество на G. Тъй като G е отворено множество, то за всяко $z\in G$ съществува $r>0$, такова че $K(z,r)\subset G$ и ако изберем n, така че $1/n<r$ и $n>|z|$, то следва $z\in K_n$. Следователно $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$. Също така, ако $z\in K_n$ и $r=1/n-1/(n+1)$, то $K(z,r)\subset K_{n+1}$ и следователно $K_n\subset \operatorname{int}K_{n+1}$. Оттук следва, че $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}\operatorname{int}K_n$. Тогава ако K е компактно подмножество на G, то съществуват краен брой отворени множества $\operatorname{int}K_j$, $j=1,2\ldots n$, така че $K\subset \operatorname{int}K_1\cup\operatorname{int}K_2\cup\ldots\cup\operatorname{int}K_n$. Следователно $K\subset K_n$.

Остава да покажем, че е изпълнено и условието (3). Преди всичко да отбележим, че за всяко n, неограничената компонента на $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ съдържа неограничената компонента на $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$, защото и двете съдържат безкрайната точка и $\overline{\mathbb{C}}\setminus G\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ (следва от самата дефиниция на компонента на свързаност). Нека сега D е ограничена компонента на

$$\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n=\{|z|>n\}\cup\left\{\bigcup_{w\notin G}K(w,1/n)\right\}.$$

Тъй като всяко множество от това обединение е свързано, то ако някое от тях пресича D, то ще се съдържа в D (D е компонента на свързаност!). Понеже D е ограничено множество, то не пресича $\{|z|>n\}$. Следователно D пресича $\left\{\bigcup_{w\notin G}K(w,1/n)\right\}$ и в частност и $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$. Така съществува компонента E на $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$, която пресича D. Тъй като $\overline{\mathbb{C}}\setminus G\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$, то E е свързано подмножество на $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$, което пресича D и следователно $E\subset D$.■

Забележка 23.3. Смисълът на тази лема е: въпреки че $\overline{\mathbb{C}}\setminus G\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$, K_n няма други дупки освен тези наследени от G. От друга страна е ясно, че всяка компонента на $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$ се съдържа в компонента на $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ за всяко n.

Теорема 23.3.(Рунге) Нека $G\subset\mathbb{C}$ е отворено множество и $P\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus G$ е множество, което има непразно сечение с всяка компонента на $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$. Ако f е холоморфна в G, то съществува редица от рационални функции $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ с полюси само от P, така че $R_n\rightrightarrows f$ равномерно върху компактните подмножества на G.

Доказателство. Нека $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ е компактното изчерпване на G от Лема 23.3. Тъй като всяка компонента на $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ съдържа компонента на $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$, то множеството P ще има непразно сечение с всяка компонента на $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$. Оттук и от уточнената теорема на Рунге (Теорема 23.2) следва, че за всяко n съществува рационална функция $R_n(z)$ с полюси само от P, такава че

$$|f(z)-R_n(z)|<1/n,\ z\in K_n.$$

Ако $K\subset G$ е компакт, то съществува $\nu\in\mathbb{N}$, такова че $K\subset K_\nu$ и следователно $K\subset K_n$ за $n>\nu$. Тогава

$$|f(z)-R_n(z)|<1/n,\ z\in K,\ n>\nu,$$

което означава, че $R_n\rightrightarrows f$ равномерно върху K.■

Следствие 23.3. Ако $G\subset\mathbb{C}$ е отворено множество със свързано допълнение $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$ и f е холоморфна в G, то съществува редица от полиноми $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, така че $P_n\rightrightarrows f$ равномерно върху компактните подмножества на G.

Доказателство. Можем да вземем $\mathrm{P}=\{\infty\}$.

Приложения на теоремите на Рунге

Сега, използвайки теоремата на Рунге за отворени множества, ще изложим елегантни доказателства на глобалната теорема на Коши и на теоремата на Митаг-Лефлер.

Глобална теорема на Коши. Нека $D\subset\mathbb{C}$ е област и $\Gamma\subset D$ е цикъл. Следните твърдения са еквивалентни:

(1) За всяка холоморфна в D функция f и всяко $z\in D\setminus\Gamma$

$$n(\Gamma,z)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta;$$

(2) $\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta=0$, за всяка холоморфна в D функция f;

(3) $\Gamma\sim 0$ ($n(\Gamma,z)=0, z\notin D$).

Доказателство. Преди всичко ще отбележим, че както при доказателството на Т.19.1 имаме $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)$. Също така $(2)\Rightarrow(1)$. Действително функцията

$$g(z,\zeta)=\begin{cases}\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}, & \zeta\neq z\\ f'(z), & \zeta=z\end{cases}$$

е непрекъсната в $D\times D$ и е холоморфна по всяка от променливите (вж.доказатеството на Т.19.1). Тогава от (2) имаме

$$\int_\Gamma g(z,\zeta)d\zeta = 0,$$

откъдето получаваме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{f(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = n(\Gamma,z)f(z).$$

Остава да покажем, че $(3)\Rightarrow(2)$. Именно тук ще използваме теоремата на Рунге. Нека f е холоморфна в D. Нека $K=\mathbb{C}\setminus ext\,\Gamma$ (да припомним: $ext\,\Gamma := \{z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma : n(\Gamma,z)=0\}$). Тъй като $ext\,\Gamma$ е отворено множество, то K е затворено множество. Също така $\mathbb{C}\setminus K$ съдържа както $\mathbb{C}\setminus D$ така и неограничената компонента на $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, чиѝто допълнение е ограничено множество. Следователно K е компактно подмножество на D. Ясно е, че $\Gamma\subset K$. Съществува редица от рационални функции $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ с полюси в $\overline{\mathbb{C}}\setminus K$, които равномерно върху K, и в частност и върху Γ, клонят към f. Тогава

$$\int_\Gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\int_\Gamma R_n(z)dz = 0,$$

защото рационалната функция $R_n(z)$ е линейна комбинация на функции от вида $c/(z-a)$, където $a\in\mathbb{C}\setminus K$ и всички точки, относно които Γ има ненулев индекс принадлежат на K.■

Теорема на Митаг-Лефлер. Нека $G\subset\mathbb{C}$ е отворено множество, Нека $\{z_n\}_1^\infty$, е редица от точки на G, която няма точки на сгъстяване в G и

$$g_n(z) = \frac{a_1^n}{z-z_n} + \frac{a_2^n}{(z-z_n)^2} + \cdots + \frac{a_{\nu_n}^n}{(z-z_n)^{\nu_n}}\ ,\ a_{\nu_n}^n \neq 0\ ,\ n=1,2,\ldots$$

е редица от рационални функции. Тогава съществува мероморфна в G функция с полюси точно точките z_n, от кратности ν_n и чиято главна част във всяко z_n е $g_n(z)$.

Доказателство. Нека $\{K_n\}_1^\infty$ е компактното изчерпване на G от Лема 23.4. Тъй като K_n е компакт и редицата $\{z_n\}_1^\infty$ няма точки на сгъстяване в G, то K_n съдържа само краен брой точки от тази редица. Да дефинираме множествата от индекси I_n, $n=1,2,\ldots$ по следния начин:

$$I_1 = \{k : z_k\in K_1\},\ I_n = \{k : z_k\in K_n, z_k\notin K_{n-1}\},\ n\geq 2.$$

Нека

$$f_n(z) = \sum_{k \in I_n} g_k(z)\,,\ n \ge 1$$

Това е рационална функция с полюси в точките $z_k, k \in I_n$ и тъй като те не принадлежат на K_{n-1}, тя е холоморфна в околност на K_{n-1}. От теоремата на Рунге следва, че съществува рационална функция $R_n(z)$ с полюси в $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$, така че

$$| f_n(z) - R_n(z) | < \frac{1}{2^n}\,,$$

за всяко $z \in K_{n-1}, n \ge 2$. Тогава търсената функция е

(23.3) $$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} (f_n(z) - R_n(z))\,.$$

Преди всичко ще покажем редът в (23.3) е равномерно сходяш върху компактните подмножества на $G \setminus \{z_n\}_1^\infty$. Действително, нека K е компактно подмножество на $G \setminus \{z_n\}_1^\infty$. Съществува $\nu \in \mathbb{N}$, че $K \subset K_\nu$ и тогава за всяко $n > \nu$

$$| f_n(z) - R_n(z) | < \frac{1}{2^n}\,,\ z \in K\,.$$

Така редът в (23.3) се мажорира в K от геометричният ред и значи е равномерно сходящ върху K. Следователно $f(z)$ е холоморфна в $G \setminus \{z_n\}_1^\infty$. Остава да покажем, че всяка точка z_n е полюс на $f(z)$, със съответна главна част $g_n(z)$.

Да фиксираме $n \ge 1$. Съществува $\delta > 0$, така че $| z_n - z_k | > \delta$, за всяко $k \ne n$. Тогава функцията $g(z) = f(z) - g_n(z)$ е холоморфна в кръга $K(z_n, \delta)$. Следователно в продупчения кръг $0 < | z - z_n | < \delta$ имаме, че $f(z) = g_n(z) + g(z)$. Това означава, че z_n е полюс на f и g_n е съответната му главна част.■

Задачи

23.1. Нека $K \subset \{z : |z| = 1\}, K \ne \varnothing$ е компакт. Да се докаже, че съществува полином $p(z)$, такъв че $p(0) = 1$ и $\max_K | p(z) | < 1$.

Упътване. Приложете теоремата на Рунге към функцията $f(z) = 1/z$.

23.2. Нека K е компакт със свързано допълнение, $a_k, k = 1, 2, ..., n$ са точки от K и f е функция холоморфна в околност на K. Да се докаже, че за всяко $\varepsilon > 0$

съществува полином p, такъв че $|f(z)-p(z)|<\varepsilon,\ z\in K$ и $p(a_k)=f(a_k),\ k=1,2,...,n$.

Упътване. Нека $q(z)$ е полином, такъв че $q(a_k)=f(a_k),\ k=1,2,...,n$ (вж. зад.9.3) и $\omega(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)$. Приложете теоремата на Рунге към функцията $F(z)=(f(z)-q(z))/\omega(z)$.

23.3. Да се докаже, че $K\subset\mathbb{C}$ е компакт със свързано допълнение тогава и само тогава, когато за всяко $c\notin K$ съществува полином p, така че $|p(c)|>\max_K|p(z)|$.

Упътване. Приложете теоремата на Рунге към функцията $f(z)=0,\ z\in K,\ f(c)=1$.

23.4. Да се докаже, че съществува редица от полиноми $p_n,\ n=1,2,\dots$, такава че

$$\lim_{n\to\infty}p_n(z)=\begin{cases}1, \operatorname{Im} z>0\\ 0, \operatorname{Im} z=0\\ -1, \operatorname{Im} z<0.\end{cases}$$

Упътване. Нека за $n=1,2\dots$ $K_n=K_n^+\cup K_n^0\cup K_n^-$, където K_n^+ е затвореният правоъгълник с върхове в точките $-n+i/n, n+i/n, n+in, -n+in$, $K_n^0=[-n,n]$ и K_n^- е затвореният правоъгълник с върхове в точките $-n-i/n, n-i/n, n-in, -n-in$. Приложете теоремата на Рунге към функциите

$$f_n(z)=\begin{cases}1, z\in K_n^+\\ 0, z\in K_n^0\\ -1, z\in K_n^-.\end{cases}$$

23.5. Да се докаже, че съществува редица от полиноми $p_n,\ n=1,2,\dots$, такива че $p_n(0)=0$ и $\lim_{n\to\infty}p_n(z)=1,\ z\neq 0$.

Упътване. Достатъчно е да се докаже, че съществува редица от полиноми $q_n,\ n=1,2,\dots$, такива че $\lim_{n\to\infty}q_n(z)=1/z,\ z\neq 0$. За целта приложете теоремата на Рунге към функцията $f(z)=1/z$ и компактите

$$K_n=[1/n,n]\cup\{z:|z|\le n,\ dist(z,\mathbb{R}^+)\ge 1/n\}.$$

Литература

1. Алфорс, Л., Увод в теория на аналитичните функции, Наука и изкуство, 1971 (превод от английски).
2. Аргирова, Т., Теория на аналитичните функции, Наука и изкуство, 1988.
3. Домрин, А.В. и А.Г.Сергеев, Лекции по комплексному анализу, МИАН, 2004.
4. Маркушевич, А., Теория аналитических функций, т.1, Наука, 1967.
5. Рудин, У., Реален и комплексен анализ, Наука и изкуство, 1984 (превод от английски).
6. Шабат, Б.В., Введение в комплексный анализ, часть I, 1976г.
7. Bak, J. and D. Newman, Complex Analysis, Springer,2010 (third edition).
8. Dixon, J., A Brief Proof of Caushy's Integral Theorem, PAMS, v.29, num.3,1971.
9. Freitag, E. and R. Busam, Complex Analysis, Springer, 2009 (second edition)
10. Gilman, J., I.Kra and R.Rodriguez, Complex Analysis, Springer, 2007
11. Remert, R. , Theory of Complex functions, Springer, 1991 (превод от немски).
12. Saks, S. and A.Zigmund, Analytic Functions, Warsawa-Wroclaw, 1952.
13. Stein, E. and R.Shakarchi, Complex Analysis, Princeton Univ.Press, 2003
14. Stillwell,J., Mathematics and it's History, Springer,2010 (third edition).
15. Аргирова, Т. и Т. Генчев, Сборник задачи по теория на аналитичните функции, Наука и изкуство, 1986 (трето издание).
16. Бояджиев, П. и В. Хаджийски, Комплексен анализ. Ръководство, Университетско издателство „Св. Кл. Охридски", 2004.