Лекция 22
Гама-функцията на Ойлер

Наред с елементарните функции, Гама-функцията на Ойлер е една от най-важните функции в математическия анализ. Тя се среща в най-различни изследвания както от теоретичен така и от приложен характер, от теория на числата до теоретичната физика, така че основни познания за нейните аналитични свойства са абсолютно необходими. В тази лекция ще изложим основните свойства на тази забележителна функция.

Появата на Гама-функцията е свързана със следната естествена задача: да се обобщи функцията $n!, n\in\mathbb{N}$ и за реални стойности, т.е. да се намери възможно „най-простата” функция на реално променливо $y=F(x)$, такава че $F(n+1)=n!$ (по исторически причини, следвайки Ойлер, пишем $n+1$, а не n). До различни изрази за тази функция достигат Ойлер, Гаус и Вайерщрас. Най-популярно е следното интегрално представяне на тази функция дадено от Ойлер

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\ ,$$

който достига до него, като забелязва, че

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{n}dt=n!.$$

Въвеждането на комплексна променлива дължим на Гаус. Тук ще следваме подхода на Вайерщрас.

Функция на Вайерщрас

Следвайки теоремата на Вайерщрас, по точно Т.20.2., да конструираме цяла функция с прости нули в $0,-1,-2,\ldots-n,\ldots$ Общият вид на тази функция е

$$f(z)=ze^{g(z)}\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}},$$

където $g(z)$ е цяла функция.

Дефиниция 22.1. Функция на Вайерщрас се нарича функцията

$$\Delta(z)=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^\infty(1+z/n)e^{-z/n}\ ,$$

където γ е константа, такава че $\Delta(1)=1$.

Лема 22.1. $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}(1+1/2+\cdots+1/n-\ln n)$

Доказателство. Тъй като $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+1/k)=n+1$, то

$$\Delta(1)=e^{\gamma}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+1/k)\prod_{k=1}^{n}e^{-1/k}=e^{\gamma}\lim_{n\to\infty}e^{\left(\ln(n+1)-\sum\limits_{k=1}^{n}1/k\right)}$$
$$=e^{\gamma}\lim_{n\to\infty}e^{\left(\ln n-\sum\limits_{k=1}^{n}1/k\right)},$$

защото $\ln(n+1)-\ln n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Тогава $\Delta(1)=1 \Leftrightarrow \gamma=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/2+\cdots 1/n-\ln n)$.■

Забележка 22.1. Добре известен факт е, че тази граница съществува. Той следва непосредствено от геометричното тълкуване на определения интеграл

$$\int_1^n\frac{dx}{x}=\ln n.$$

Константата γ се нарича *константа на Ойлер*. Известно е, че $\gamma=0,5772156\ldots$. Не е известно дали γ е рационално или ирационално число.

Твърдение 22.1. Функцията $\Delta(z)$ има следните свойства;

(1) $\overline{\Delta(\overline{z})}=\Delta(z)$ и в частност $\Delta(x)\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}$, като $\Delta(x)>0,\ x>0$;

(2) $\Delta(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!n^z}$;

(3) $\Delta(z)=z\Delta(z+1)$;

(4) $\pi\Delta(z)\Delta(1-z)=\sin\pi z$;

(5) $\Delta\left(\dfrac{1}{n}\right)\Delta\left(\dfrac{2}{n}\right)\ldots\Delta\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}},\ n=2,3,\ldots$

Доказателство. (2) Тъй като $n^z:=e^{z\ln n}$, то

$$\Delta(z)=e^{\gamma z}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+z/k)e^{-z/k}=e^{\gamma z}\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!n^z}e^{z\left(\ln n-\sum\limits_{k=1}^{n}1/k\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!n^z}.$$

(3) Имаме

$$z\Delta(z+1)=\lim_{n\to\infty}z\frac{(z+1)\ldots(z+n)(z+n+1)}{n!n^{z+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!n^z}\lim_{n\to\infty}\frac{z+n+1}{n}=\Delta(z).$$

(4) От (3) следва

$$\pi\Delta(z)\Delta(1-z)=-\frac{\pi}{z}\Delta(z)\Delta(-z)=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^2/n^2)=\sin\pi z.$$

(5) Нека $A=\Delta\left(\frac{1}{n}\right)\Delta\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Delta\left(\frac{n-1}{n}\right)$, $n=2,3,\dots$ Имаме, предвид 4)

$$A^2=\prod_{k=1}^{n-1}\Delta\left(\frac{k}{n}\right)\Delta\left(1-\frac{k}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\sin k\pi/n}{\pi}=\frac{1}{(\pi)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

Ще покажем, че

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Действително,

$$z^n-1=(z-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-e^{i2k\pi/n}\right)=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1),$$

откъдето

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-e^{i2k\pi/n}\right)=(z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+1)$$

и в частност за $z\to 1$

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{i2k\pi/n}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-e^{i2k\pi/n}\right|=\prod_{k=1}^{n-1}\left|e^{ik\pi/n}\right|\left|e^{-ik\pi/n}-e^{ik\pi/n}\right|=\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

Така получаваме

$$A^2=\frac{1}{(\pi)^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{(2\pi)^{n-1}},$$ т.е. (5).

Гама-функцията на Ойлер

Дефиниция 22.2. Гама функция на Ойлер се нарича функцията $\Gamma(z):=\frac{1}{\Delta(z)}$.

Ясно е, че тази функция е мероморфна с прости полюси в точките $0,-1,-2,\dots-n,\dots$ и няма нули.

Твърдение 22.2. Гама-функцията има следните свойства:

(1) $\overline{\Gamma(\overline{z})}=\Gamma(z)$ и в частност $\Gamma(x)\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$, като $\Gamma(x)>0, x>0$;

(2) $\Gamma(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$;

(3) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \Gamma(z+n)=z(z+1)\dots(z+n-1)\Gamma(z), \Gamma(1)=1, \Gamma(n+1)=n!, n\in\mathbb{N}$;

(4) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$;

(5) $\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(\dfrac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=\dfrac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}},\ n=2,3,\ldots$;

(6) $|\Gamma(z)|\leq\Gamma(x),\ z=x+iy,\ x>0$;

(7) $\operatorname{Res}(\Gamma,-n)=\dfrac{(-1)^n}{n!},\ n=0,1,\ldots$

Доказателство. Свойствата (1)-(5) следват непосредствено от дефиницията и Твърдение 22.1.

(6) Следва от (2), предвид $|n^z|=n^x$ и $|z+n|\geq x+n,\ x>0$.

(7) Предвид (3) имаме

$$\operatorname{Res}(\Gamma,-n)=\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)=\lim_{z\to -n}\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}=\frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\ldots(-1)}=\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Теорема за единственост. Интегрално представяне на Гама-функцията.

Лема 22.1. Всяка функция f холоморфна в дясната полуравнина $H=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0\}$ и удовлетворяваща функционалното уравнение

$$f(z+1)=zf(z),\ z\in H,$$

може да се продължи до мероморфна (в $\mathbb{C}$) функция $\hat{f}$ с прости полюси в точките $0,-1,-2,\ldots-n,\ldots$, с резидууми съответно

$$\operatorname{Res}(\hat{f},-n)=\frac{(-1)^n}{n!}f(1),\ n=0,1,2,\ldots$$

В частност $\hat{f}$ е цяла функция, само ако $f(1)=0$.

Доказателство. От функционалното уравнение, по индукция получаваме

$$f(z+n+1)=z(z+1)\ldots(z+n)f(z),\ z\in H.$$

Нека $z\in\mathbb{C}$ и $-z\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогава $z+n+1\in H$ за подходящо n и можем да дефинираме

$$\hat{f}(z)=\frac{f(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)}.$$

Тази функция е холоморфна в $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ и $\hat{f}(z)=f(z),\ z\in H$. Освен това

$$\lim_{z\to -n}(z+n)\hat{f}(z)=\lim_{z\to -n}\frac{f(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}=\frac{(-1)^n}{n!}f(1)$$

за всяко $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Това означава,че $-n$ е прост полюс на $\hat{f}$ с резидуум

$$\operatorname{Re} s(\hat{f}, -n) = \frac{(-1)^n}{n!} f(1), n = 0, 1, 2, \ldots \blacksquare$$

Теорема 22.1.(H. Wielandt, за единственост) Нека $F(z)$ е функция холоморфна в дясната полуравнина $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ и

(а) $F(z+1) = zF(z), z \in H$;

(б) $F(z)$ е ограничена в ивицата $S = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}$.

Тогава $F(z) = a\Gamma(z), z \in H$, където $a = F(1)$.

Доказателство. Функцията $f(z) = F(z) - a\Gamma(z)$ е холоморфна в H, $f(1) = 0$ и $f(z+1) = zf(z)$. От Лема 22.1 следва,че f се продължава до цяла функция $\hat{f}$. Тъй като $\Gamma(z)$ е ограничена в S (следва от Твърдение 22.2 (6)), то и f е ограничена в S. Оттук следва, че f е ограничена и в ивицата $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z < 1\}$. Действително, за $z \in S_0, |\operatorname{Im} z| \leq 1$, това е ясно от съображения за непрекъснатост, а за $z \in S_0, |\operatorname{Im} z| > 1$ това следва от $f(z) = f(z+1)/z$ и ограничеността на f в S. Да разгледаме сега цялата функция

$$g(z) := \hat{f}(z)\hat{f}(1-z).$$

Тя е ограничена в S_0, защото ако $z \in S_0$, то и $1 - z \in S_0$. Освен това

$$g(z+1) = \hat{f}(z+1)\hat{f}(-z) = z\hat{f}(z)\hat{f}(-z) = -(-z\hat{f}(-z))\hat{f}(z) = -\hat{f}(1-z)\hat{f}(z) = -g(z).$$

Оттук следва, че:

(1) $g(z)$ е ограничена и в S, защото ако $z \in S$, то $z - 1 \in S_0$

и

(2) $g(z+2) = g(z+1+1) = -g(z+1) = g(z)$.

Така $g(z)$ е ограничена в ивицата $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z \leq 2\}$ и е периодична спериод 2. Следователно тя е ограничена в $\mathbb{C}$ и от теоремата на Лиувил следва, че тя е константа. Тогава $g(z) \equiv g(1) = f(1)\hat{f}(0) = 0$. Следователно $\hat{f}(z) \equiv 0$, т.е. $F(z) = a\Gamma(z), z \in H$. $\blacksquare$

Теорема 22.2.(Ойлер) $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re} z > 0$.

Доказателство. Ще докажем, че функцията

$$F(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re} z > 0$$

удовлетворява условията на Теорема 22.1. Преди всичко да отбележим, че

$$|t^{z-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t},\ z = x+iy$$

и функцията $t^{x-1}e^{-t}, x>0$ е интегруема в $[0,\infty)$. Следователно интегралът дефиниращ F е абсолютно сходящ, ако $\operatorname{Re} z > 0$. Ще докажем, че той е равномерно сходящ върху компактните подмножества на дясната полуравнина. Достатъчно е да се докаже, че е равномерно сходящ във всяка ивица $\{z\in\mathbb{C} : 0 < a \le \operatorname{Re} z \le b < +\infty\}$. Действително, нека $0<\delta<1<R<+\infty$ и

$$F_{\delta,R}(z) = \int_\delta^R t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

Имаме

$$|F_{\delta,R}(z) - F(z)| = \left|\int_0^\delta t^{z-1}e^{-t}\,dt + \int_R^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt\right| \le \int_0^\delta t^{a-1}e^{-t}\,dt + \int_R^\infty t^{b-1}e^{-t}\,dt \xrightarrow[\delta\to 0, R\to\infty]{} 0 .$$

Тъй като функциите $F_{\delta,R}(z)$ са непрекъснати, оттук следва., че и $F(z)$ е непрекъсната в дясната полуравнина. Нещо повече тя е холоморфна там. За да докажем това ще използваме теоремата на Морера. Нека γ е произволна затворена крива в дясната полуравнина. Тогава

$$\int_\gamma F(z)\,dz = \int_\gamma\left(\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt\right)dz = \int_0^\infty e^{-t}\left(\int_\gamma t^{z-1}\,dz\right)dt .$$

Тъй като при фиксирано $t>0$, функцията $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$ е холоморфна в дясната полуравнина, то от теоремата на Коши имаме, че

$$\int_\gamma t^{z-1}\,dz = 0 \text{ и следователно } \int_\gamma F(z)\,dz = 0 .$$

Така доказахме, че функцията $F(z)$ е холоморфна в дясната полуравнина.

Функционалното уравнение $F(z+1) = zF(z)$ получаваме след интегриране по части:

$$F(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt = -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt = zF(z) .$$

След това от равенството $|t^{z-1}| = t^{\operatorname{Re} z-1}$ директно следва неравенството

$$|F(z)| \le F(\operatorname{Re} z),\ \operatorname{Re} z > 0 ,$$

и в частност $F(z)$ е ограничена във всяка ивица $\{z\in\mathbb{C} : 0 < a \le \operatorname{Re} z \le b < +\infty\}$.

Накрая от Теорема 22.1 следва, че $F(z)=a\Gamma(z), \operatorname{Re} z>0,$ където $a=F(1)=1$, т.е.

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt, \operatorname{Re} z>0 \text{ .}\blacksquare$$

Теорема 22.3. Мултипликативна формула на Гаус.

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-z}\Gamma(nz)\; n=2,3,\ldots, z\in H\;.$$

Доказателство. Да фиксираме n и да разгледаме функцията

$$F(z)=\Gamma\left(\frac{z}{n}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right)\Big/(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{1/2-z}\;.$$

Тази функция е холоморфна в дясната полуравнина H;

$$F(z+1)=n\frac{\Gamma(1+z/n)}{\Gamma(z/n)}F(z)=n\frac{z}{n}F(z)=zF(z)$$

и $F(1)=1$, предвид (5) от Твърдение 22.2. От теоремата за единственост следва $F=\Gamma$ и в частност $F(nz)=\Gamma(nz)$. ■

Следсвие 22.1. (Формула на Лежандър)

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$