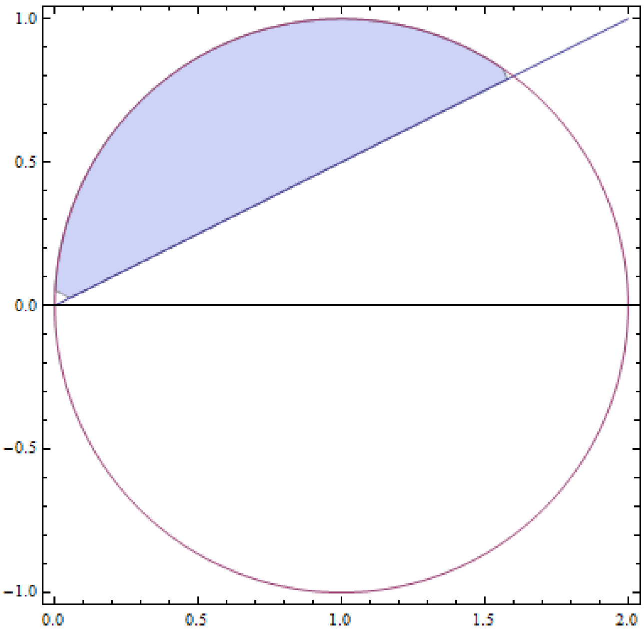
Контролно 1 по Математически анализ

спец. Приложна математика, курс 2

Зимен семестър на уч. 13/14г.

Дадено на 05.12.2913

Задача 1. *1т.*
Решение. Представяне второто неравенство в каноничен вид: $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$(Фиг. 1).



Фигура 1: $D : x \leq 2y, \quad x^2 + y^2 \leq 2x.$

Ненулевата пресечната точка на правата с окръжността е $(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$. Като криволинеен трапец, множеството D е $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \quad 0 \leq x \leq 4/5, \quad x/2 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \quad \right\}$. Последователно пресмятаме

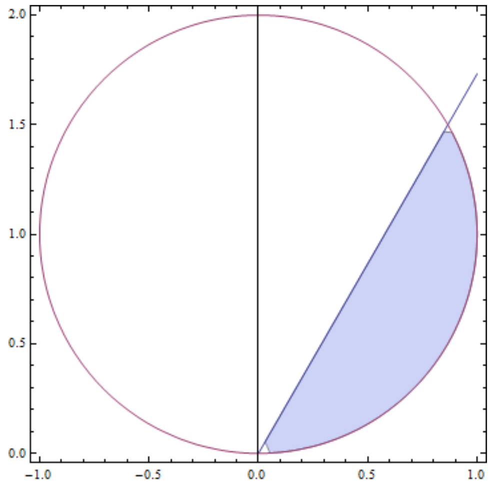
$$\iint_D ye^x dxdy = \int_0^{8/5} \int_{x/2}^{\sqrt{2x-x^2}} ye^x dydx = \frac{1}{2} \int_0^{8/5} e^x y^2 \Big|_{x/2}^{\sqrt{2x-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{8/5} e^x (2x - \frac{5}{4}x^2) dx$$

След неколкократно интегриране по части получаваме $I = \frac{1}{4}\left(9 - e^{8/5}\right)$

Задача 2. *1.5т.*
Решение. Множеството е Фиг. 2. Извършваме полярна смяна

$$x = \rho \cos(\varphi), \quad y = \rho \sin(\varphi).$$

Първото неравенство се трасформира в $r^2 \leq 2r \sin(\varphi)$, от където $0 \leq \sin(\varphi)$ и $2\sin(\varphi) \geq r$. Второто ограничение е еквивалентно на $\sin(\varphi) \leq \sqrt{3}\cos(\varphi)$, от където, имайки в предвид че $\varphi \in [0,\pi]$ (от положителността на синуса) окончателно получаваме $\varphi \in [0, \pi/3]$. И така, образът D' на D като криволинеен трапец е $D' = \left\{(\rho,\varphi) \middle| \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/3, \quad 0 \leq r \leq 2\sin(\varphi)\right\}$. Якобиянът на смяната е ρ. Последователно пресмятаме



Фигура 2: $D : y \leq \sqrt{3}x, \quad x^2 + y^2 \leq 2y.$

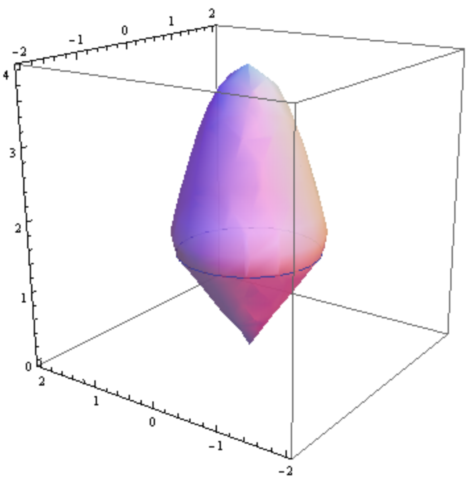
$$\iint_D \frac{dxdy}{(1 - x^2 - y^2)^2} = \iint_{D'} \frac{\rho d\rho d\varphi}{(1 - \rho^2)^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \int_0^{2\sin(\varphi)} \frac{d(1-\rho^2)}{(1-\rho^2)^2} d\varphi =$$
$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{(1-\rho^2)} \Big|_0^{2\sin(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{1 - 4\sin^2(\varphi)} d\varphi - \frac{\pi}{6}.$$

Извършваме субституцията $t = \tan(\varphi), d\varphi = \frac{dt}{1+t^2}, \sin^2(\varphi) = \frac{t^2}{1+t^2}$. Получаваме интерала

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{1 - 4\sin^2(\varphi)} d\varphi - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1 - 4\frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1-\sqrt{3}t)(1+\sqrt{3}t)} - \frac{\pi}{6}$$

Имаме особеност в т. $t = 1/\sqrt{3}$. Тъй като в знаменателя $(1 - t\sqrt{3})$ е на първа степен, интегралът е разходящ.

Задача 3. *1.5т.*
Решение. Множеството е изобразено на Фиг. 3.



Фигура 3: $: 2x^2 + 2y^2 \leq z^2, \quad 2 - z/2 \geq x^2 + y^2, \quad z \geq 0.$

Конусът и параболидът се пресичат върху окръжност с радиус 1 и център $C(0,0,1)$. Представяме множеството като цилиндрично тяло:

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2 \le 1, \quad \sqrt{2x^2+2y^2} \le z \le \sqrt{2}(2-x^2-y^2)\right\}$$

Да означим с D единичния кръг в $\mathbb{R}^2$. Според теоремата на Фубини

$$V_K = \iiint_K 1dxdydz = \iint_D \int_{\sqrt{2x^2+2y^2}}^{\sqrt{2}(2-x^2-y^2)} dz\, dxdy = \iint_D (\sqrt{2}(2-x^2-y^2) - \sqrt{2x^2+2y^2})dxdy$$

Извършваме полярна смяна. Получаваме

$$\iint_D (\sqrt{2}(2-x^2-y^2) - \sqrt{2x^2+2y^2})dxdy = 2\pi\int_0^1 \rho\big(-\rho\sqrt{2} + \sqrt{2}(2-\rho^2)\big)d\rho\, d\varphi = \frac{5\pi}{3\sqrt{2}}.$$

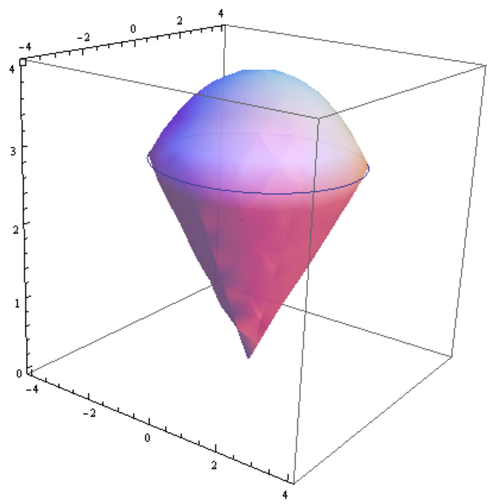
Задача 4. *1.5т.*

Решение. Множеството е изобразено на Фиг. 4.

Правим смяна в сферични координати

$$x = \rho\cos(\varphi)\sin(\theta), \quad y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta), \quad z = \cos(\theta)$$

Първото неравенство дава $\rho \le 4$. От второто полуаваме $\sin^2(\theta) \le \cos^2(\theta)$, което, понеже



Фигура 4: $K: x^2+y^2+z^2 \le 16, \quad x^2+y^2 \le z^2, \quad z \ge 0,$.

$\theta \in [0,\pi]$ означава, че $\theta \in [0,\pi/4]$. За масата получаваме

$$M_K = \iiint_K (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^4 \rho^2\sin(\theta)\rho^2 d\rho\, d\theta d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi/4}\sin(\theta)d\theta\int_0^4 \rho^4 d\rho =$$

$$2\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\frac{4^5}{5} = \frac{1024}{5}\pi(2-\sqrt{2})$$