

ИЗПИТ

по Математически анализ, 07 юли 2010г.

Име:..... Фак.номер:..... Специалност:.....

1. Разгледайте фигурата

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 1\}$$

- (а) Представете $\int \int_K f(x, y) dx dy$ като повторен по два начина: с външно интегриране по едната и по другата променлива (тук f е непрекъсната функция, дефинирана в K).
- (б) Докажете, че криволинейните трапеци са измерими по Пеано-Жордан.
- (в) Докажете, че функцията

$$f(x, y) = \begin{cases} 8x, & (x, y) \in K \\ 0, & (x, y) \notin K \end{cases}$$

е интегрируема по Риман.

2. Разгледайте хомогенна материална нишка, разположена по полуокръжност в горната полуравнина:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$$

където R е положителна константа. Каква е гравитационната сила, с която материалната нишка притегля материална точка с маса m_0 , разположена в началото на координатната система?

3. Разгледайте функцията $f(x) = e^{3\|x\|} \langle x, a \rangle$, където $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и a е векторът $(4, 5, 3)$. Пресметнете $\mathbf{grad} f$. Каква е стойността на $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} f)$ и защо?

4. Да разгледаме полето

$$F(x, y) = ((x + y + 1)e^x - e^y, e^x - (x + y + 1)e^y)$$

- (а) Удовлетворява ли това поле необходимото условие за потенциалност?
- (б) Изведете (с доказателство) формулата за потенциал на поле, удовлетворяващо необходимото условие, в правоъгълна област.
- (в) Намерете потенциал на полето F . Единствен ли е отговорът?

5. Напишете формулата за свеждане на повърхнинен интеграл от първи род към двоен риманов интеграл. Изведете формула за повърхнина на ротационно тяло.

6. Пресметнете площта на тора:

$$\varphi(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, a + b \sin u)$$

$$(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi], \quad a > b > 0.$$

7. Формулирайте и докажете формулата на Гаус- Остроградски за област, която е цилиндрично тяло по трите променливи едновременно.