ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
7 октомври 2008г.

Име:... Фак.номер:............

1. Формулирайте принципа на Кавалиери. Изведете формулата за обем на ротационно тяло. Пресметнете обема на пресечения конус, определен с $x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, $x \in [1, 2]$.

2. Дайте дефиниция на пренебрежимо множество. Нека A е подмножеството на $\mathbb{R}^2$, състоящо се от всички точки с рационални координати. Пренебрежимо ли е A? Обосновете отговора си. Намерете контура на A (да го означим с ∂A). Пренебрежимо множество ли е ∂A? Измеримо множество ли е A?

3. Нека $\alpha : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^3$, където Δ е интервал, е гладка векторна функция на скаларен аргумент. Нека $\alpha(t)$ е с постоянна дължина, т.е. $\parallel \alpha(t) \parallel \equiv const$. Докажете, че $\dot{\alpha}(t)$ е перпендикулярно на $\alpha(t)$ за всяко $t \in \Delta$.

4. Разгледайте векторното поле

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{y} + y \cos(xy), -\frac{x}{y^2} + x \cos(xy) \right)$$

в областта $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Потенциално ли е това поле? Ако отговорът Ви е "да", намерете потенциала в явен вид.

5. Разгледайте в $\mathbb{R}^3$ уравнението $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Намерете максимално отворено подмножество на пространството $\mathbb{R}^3$, в което това уравнение определя гладка повърхнина.

6. Изведете формулата за площ на ротационна повърхнина. Намерете площта на тора

$$\varphi(u, v) = (b \cos u, (a + b \sin u) \cos v, (a + b \sin u) \sin v),$$

където $a > b > 0$ са дадени константи, а параметрите се менят в областта

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi,\ 0 < v < 2\pi\}$$

.