

ИЗПИТ

по Математически анализ, 03 юли 2011г.

Име:..... Фак.номер:..... Специалност:.....

1. Нека Δ е правоъгълник в равнината. Какво представлява едно подразделяне на Δ ?
Дефинирайте малка и голяма сума на Дарбу за ограничената функция $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$.
Дефинирайте риманов интеграл на f . Формулирайте поне едно необходимо и достатъчно условие за интегрируемост.

2. Разгледайте фигурата

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \geq 2x \geq y^2, \quad x^2 + y^2 \geq 2x, \quad 0 \leq y\}$$

(а) Представете $\int \int_K f(x, y) dx dy$ като повторен по два начина: с външно интегриране по едната и по другата променлива (тук f е непрекъснатата функция, дефинирана в K).

(б) Докажете, че криволинейните трапеци са измерими по Пеано-Жордан.

(в) Докажете, че функцията

$$f(x, y) = \begin{cases} e^y, & (x, y) \in K \\ 0, & (x, y) \notin K \end{cases}$$

е интегрируема по Риман.

3. Разгледайте хомогенна материална нишка, разположена по половин арка на циклоидата:

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Намерете центъра на масите на тази нишка.

4. Напишете формулата на Грийн и достатъчни условия, при които тя е вярна. Докажете я за област, която е криволинеен трапец по двете променливи. Пресметнете криволинейния интеграл от втори род

$$\oint_C (-x^2 y) dx + xy^2 dy$$

където C е окръжността $\{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$.

5. Напишете формулата за свеждане на повърхнинен интеграл от първи род към двоен риманов интеграл. Използвайте я, за да пресметнете площта на сфера с даден радиус.

6. Пресметнете площта на частта от явно зададената конична повърхнина

$$z = \sqrt{x^2 + y^2},$$

която се намира в цилиндъра $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

7. Напишете формулата на Гаус-Остроградски. Докажете закона на Архимед.