

# ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Математика и информатика"

20 февруари 2005г., група Б

Име:..... Фак.номер:.....

1. Разгледайте тялото

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x^2 + y^2) \leq z^2, 3 \leq x \leq 5\}$$

- (а) Представете  $K$  като цилиндрично тяло.
- (б) Докажете, че цилиндричните тела (следователно и  $K$ ) са измерими по Пеано-Жордан.
- (в) Докажете, че функцията

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 - y, & y \geq 0, (x, y, z) \in K \\ -1, & y < 0, (x, y, z) \in K \\ 0, & (x, y, z) \notin K \end{cases}$$

е интегрируема по Риман.

2. Разгледайте функцията  $f(x) = \cos \|x\|$ , където  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

- (а) Напишете полето  $F(x) = \mathbf{grad} f(x)$ .
- (б) Пресметнете  $\mathbf{div} F(x)$  и  $\mathbf{rot} F(x)$  ( $F$  е определено в подточка (а)).
- (в) Как ще обясните резултата, получен за  $\mathbf{rot} F(x)$ ?

3. Да разгледаме полето

$$F(x, y) = ((x + y + 1)e^x - e^y, e^x - (x + y + 1)e^y)$$

- (а) Удовлетворява ли това поле необходимото условие за потенциалност?
- (б) Изведете (с доказателство) формулата за потенциал на поле, удовлетворяващо необходимото условие, в правоъгълна област.
- (в) Намерете потенциал на полето  $F$ . Единствен ли е отговорът?

4. Пресметнете гравитационната сила, с която хомогенната повърхнина

$$\varphi(\theta, t) = (R \cos \theta, R \sin \theta, t)$$

където  $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, h]$  (цилиндър с височина  $h$  и радиус на основата  $R$ ) притегля материална точка с маса  $m$ , разположена в началото на координатната система (центърът на долната основа).

5. Формулирайте и докажете закона на Архимед.